УДК 517.988.63

Об одной краевой задаче, сводящейся к уравнению с разрывным оператором

Е. Ю. Еленская
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
elenliza @ yandex.ru; 8(342) 2-396-345

Ю. Н. Еленский
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
elenliza @ yandex.ru; 8(342) 2-396-345; 8-919 46 24 181

Рассматривается краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка, правая часть которого может быть разрывной. Излагаются условия, при которых существует хотя бы одно решение краевой задачи, и какое-нибудь из ее решений можно найти методом последовательных приближений.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение; разрывная правая часть; краевая задача; метод последовательных приближений.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-11-15

Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно неизвестной функции $x:[a,b]\to(-\infty,+\infty)$.

$$(Lx)(t)=-f(x(t)), \tag{1}$$

$$x(a)=x(b)=0, \tag{2}$$

где $(Lx)(t)=\dfrac{d}{dt}(p(t)x(t))-q(t)x(t);$ p,q,f – заданные вещественные функции; $p(x)>0,\ q(x)\geq 0$ при $x\in[a,b]$, p',q непрерывны, f определена на $(-\infty,+\infty)$. При этом предполагается, что функция f может быть разрывной.

В современной математической литературе встречаются различные задачи для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Такие уравнения исследуются, например, в работе [2]. В ней указано, что для дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями требуется определить понятие решения. Изложены различные варианты определения решения таких уравнений (гл. 2, с. 39–48). Но в указанной книге краевые задачи не рассматриваются.

Дадим вариант определения решения краевой задачи (1), (2) и укажем условия, при которых решение такой краевой задачи существует, и хотя бы одно из решений можно найти методом последовательных приближений.

Рассмотрим сначала более простую краевую задачу

$$(Lx)(t)=-f(t), \tag{3}$$

$$x(a)=x(b)=0, \tag{4}$$

где L – такой же дифференциальный оператор, как в уравнении (1) с указанными условиями в описании этого уравнения. Эта задача отличается от задачи (1), (2) тем, что правая часть уравнения (3) не зависит от неизвестной функции x. Если f – непрерывна на $[a,b]$, то решение задачи (3), (4) известно, оно дается равенством

$$x(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)ds \quad (t\in[a,b]), \tag{5}$$

где G – функция Грина краевой задачи (3), (4).

Если теперь в правой части уравнения (3) вместо функции f взять композицию $f \circ x$, то получится уравнение (1), а равенство (5) преобразуется в такое:

$$x(t) = \int_a^b G(t,s) f(x(s))ds \ \ (t \in [a,b]). \qquad (6)$$

Это – интегральное уравнение относительно неизвестной функции x. Если композиция $f \circ x$ – непрерывна, то интегральное уравнение (6) эквивалентно краевой задаче (1), (2). Данное уравнение положим в основу определения решения краевой задачи (1), (2) в случае разрывности функции f.

Функцию x, определенную на [*a; b*], будем называть решением краевой задачи (1), (2), если x – решение интегрального уравнения (6).

Укажем вариант условий, при которых решение краевой задачи существует, и одно из решений можно найти методом последовательных приближений. Идея доказательства – сведение краевой задачи с помощью функции Грина к интегральному уравнению. А для доказательства существования решения интегрального уравнения используем теорему существования неподвижной точки нелинейного интегрального оператора, которая изложена в работе [5]. Эта теорема доказана на основе обобщения части теоремы 4.1 работы М.А. Красносельского [1], в которой используется полуупорядоченность, порожденная правильным конусом. Обобщение заключается в том, что вместо непрерывности оператора предполагается его непрерывность слева или непрерывность справа, т.е. допускается вариант, когда оператор разрывен. Указанная теорема изложена в работе [4].

Напомним формулировку теоремы из работы [5] с небольшими изменениями обозначений, которую будем использовать для доказательства существования решения краевой задачи (1), (2).

Теорема 1. Пусть

1) Ω – компакт в R^j, $G: \Omega \times \Omega \to R$, функция G непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю; существует такое число β_0, что

$$\int_\Omega G(t,s)dt \ge \beta_0 G(t,s) \quad (t,s \in \Omega);$$

2) существуют такие $t_0 \in \Omega$ и окрестность U точки t_0, что $\int_U G(t_0,s)ds > 0$;

3) $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, не убывает, непрерывна слева (или справа) на $[0,+\infty)$;

4) $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$ при $x \to +0$, $\frac{f(x)}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Тогда существует хотя бы одна ненулевая неподвижная точка оператора A, определенного равенством

$$(Ax)(t) = \int_\Omega G(t,s) f(x(s))ds \ \ (t \in \Omega), \quad (7)$$

в пространстве $C(\Omega)$ функций, непрерывных на множестве Ω.

Замечание. Из доказательства этой теоремы следует возможность нахождения хотя бы одной из неподвижных точек оператора (7) методом последовательных приближений.

Вариант достаточных условий существования решения уравнения (6) дадим с помощью теоремы 1.

Согласно теории, изложенной, например, в работе [3], функция Грина определяется равенством

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{c} u_1(t) u_2(s), & t \le s, \\ \frac{1}{c} u_1(s) u_2(t), & t \ge s, \end{cases} \qquad (8)$$

где u_1, u_2 – линейно независимая система из двух решений однородного дифференциального уравнения $(Lx)(t) = 0$, L – дифференциальный оператор из уравнения (1), c – некоторая константа.

Лемма 1. Пусть $u: [a;b] \to R$; u, u' – непрерывны на $[a;b]$; $u(a) = 0$; $u'(a) > 0$; $u(t) > 0$ при $t \in (a,b]$. Тогда существуют такие константы $k > 0, \ \lambda > 0$, что $k(t-a) \le u(t) \le \lambda(t-a)$ при $t \in [a;b]$.

Доказательство. Так как u' – непрерывна, и $u'(a) > 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $u'(t) > 0$ при $t \in [a, a+\delta]$. Положим $k_1 = \min_{t \in [a,a+\delta]} u'(t)$, $\lambda_1 = \max_{t \in [a,a+\delta]} u'(t)$,

Очевидно, $k_1 > 0, \ \lambda_1 > 0$. По теореме Лагранжа $u(t) = u(t) - u(a) = u'(\xi)(t-a)$, где $\xi \in (a, a+\delta)$.

Поэтому $k_1(t-a)\le u(t)\le \lambda_1(t-a)$ при $t\in[a,a+\delta]$.

Положим

$$k_2=\min_{t\in[a,a+\delta]}\frac{u(t)}{t-a},\ \lambda_2=\max_{t\in[a,a+\delta]}\frac{u(t)}{t-a}.$$

Тогда $k_2(t-a)\le u(t)\le \lambda_2(t-a)$ при $t\in[a+\delta;b]$. Отсюда и из предыдущих неравенств вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть $u:[a;b]\to R$; u,u' – непрерывны на $[a;b]$; $u(b)=0$; $u'(b)<0$; $u(t)>0$ при $t\in[a,b)$. Тогда существуют такие константы $k>0,\ \lambda>0$, что $k(b-t)\le u(t)\le \lambda(b-t)$ при $t\in[a;b]$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Теперь докажем теорему существования решения краевой задачи (1), (2).

Теорема 2. Пусть

1) L – линейный дифференциальный оператор краевой задачи (1), (2) со всеми условиями, указанными выше при описании этой задачи; среди решений однородного дифференциального уравнения $(Lx)(t)=0$ найдутся такие решения u_1,u_2, что $u_1(a)=0,\ u_2(b)=0;\quad u_1'(a)>0,\ u_2'(b)<0$; $u_1(t)>0$ при $t\in(a;b]$; $u_2(t)>0$ при $t\in[a;b)$; $\Delta(t)=u_1'(t)u_2(t)-u_1(t)u_2'(t)>0$ в какой-нибудь точке $t\in(a;b)$;

2) $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, не убывает, непрерывна слева на $[0,+\infty)$;

3) $\dfrac{f(x)}{x}\to+\infty$ при $x\to+0$, $\dfrac{f(x)}{x}\to 0$ при $x\to+\infty$.

Тогда существует хотя бы одно решение краевой задачи (1), (2) в пространстве C[a,b].

Доказательство. Покажем существование такого числа β_0, что

$$\int_a^b G(t,s)dt\ge \beta_0 G(t,s)\quad (t,s\in[a,b]),\qquad (9)$$

где G – функция Грина, определенная равенством (8). Из условий теоремы следует, что система u_1,u_2 – линейно независима, и $c=\Delta(t)p(t)>0$ ([3], с. 194).

$$\int_a^b G(t,s)dt=\frac{1}{c}(\int_a^s u_1(t)u_2(s)dt+$$

$$+\int_s^b u_1(s)u_2(t)dt=$$

$$=\frac{1}{c}(u_2(s)\int_a^s u_1(t)dt+u_2(s)\int_s^b u_2(t)dt).$$

Из лемм 1 и 2 следует существование таких констант $k_1,k_2>0$, что

$$u_1(s)\ge k_1(s-a),\qquad u_2(s)\ge k_2(b-s)$$

при $s\in[a,b]$.

Кроме того, функции z_1 и z_2, определенные равенствами

$$z_1(s)=\int_a^s u_1(t)dt,\ \ z_2(s)=\int_s^b u_2(t)dt,$$

$(s\in[a,b])$, удовлетворяют условиям лемм 1 и 2, соответственно. Поэтому найдутся такие константы $k_3,k_4>0$, что

$$z_1(s)\ge k_3(s-a),\quad z_2(s)\ge k_4(b-s)$$
$$(s\in[a,b]).$$

Из предыдущих соотношений следует неравенство

$$\int_a^b G(t,s)dt=\frac{1}{c}(\int_a^s u_1(t)u_2(s)dt+\int_s^b u_1(s)u_2(t)dt)=$$

$$=\frac{1}{c}(u_2(s)z_1(s)+u_1(s)z_2(s))\ge$$

$$\ge\frac{1}{c}(k_2(b-s)k_3(s-a)+k_1(s-a)k_4(b-s))=$$

$$=\frac{k_2k_3+k_1k_4}{c}(s-a)(b-s).$$

Положим $k_0=k_2k_3+k_1k_4$. Тогда

$$\int_a^b G(t,s)dt\ge\frac{k_0}{c}(s-a)(b-s),\qquad (10)$$

где $(s\in[a,b])$.

Оценим теперь $G(t,s)$ сверху. Из лемм 1 и 2 следует существование таких констант $\lambda_1>0,\lambda_2>0$, что

$$u_1(t)\le\lambda_1(t-a),u_2(t)\le\lambda_2(b-t)\ (t\in[a,b]).$$

Пусть $0 \le t \le s$.

Тогда

$$G(t,s) = \frac{1}{c} u_1(t) u_2(s) \le$$

$$\le \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c}(t-a)(b-s) \le \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c}(s-a)(b-s).$$

Пусть теперь $s \le t \le b.$ Тогда

$$G(t,s) = \frac{1}{c} u_1(s) u_2(t) \le$$

$$\le \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c}(s-a)(b-t) \le \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c}(s-a)(b-s).$$

Итак, при любых $t, s \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$G(t,s) \le \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c}(s-a)(b-s). \quad (11)$$

Положим $\beta_0 = \dfrac{k_0}{\lambda_1 \lambda_2}$. Тогда из неравенств (10) и (11) следует неравенство (9).

Итак, выполнено условие 1) теоремы 1 при $\Omega = [a,b]$.

Если положить $t_0 = \dfrac{a+b}{2}$, $U = (a,b)$, то условие 2) тоже выполнено. Очевидно, выполнено и условие 3). Поэтому существует хотя бы одна неподвижная точка оператора A, определенного равенством (7), в пространстве $C[a,b]$. Это означает, что существует хотя бы одно решение краевой задачи (1), (2). Теорема доказана.

Из замечания к теореме 1 следует возможность нахождения хотя бы одного из решений методом последовательных приближений.

Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$x'' + f(x) = 0, \quad (12)$$

$$x(0) = x(10) = 0, \quad (13)$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \le 50, \\ 10, & x > 50. \end{cases}$$

Ее можно рассматривать как задачу о движении материальной точки под действием силы, которая изменяется скачкообразно.

В соответствии с определением решения такой задачи, которое принято в настоящей работе, решением задачи (12), (13) будем считать решение интегрального уравнения

$$x(t) = \int_0^{10} G(t,s) f(x(s)) ds \quad (t \in [0;10]),$$

где G – функция Грина, которая определяется равенством

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{10}(10-s)t, & 0 \le t \le s, \\ \frac{1}{10}(10-t)s, & s \le t \le 10. \end{cases}$$

Легко проверяется, что для этого интегрального уравнения выполняются все условия теоремы 2. Поэтому существует хотя бы одно решение этого уравнения и, следовательно, краевой задачи (12), (13) в пространстве $C[0;10]$. Кроме того, некоторые из решений можно найти методом последовательных приближений.

Задача (12), (13) легко решается аналитически. Ее решением будем считать функцию $x:[0;10] \to R$, удовлетворяющую условиям (13), которая является решением дифференциального уравнения (12) в точках непрерывности x'' при дополнительных условиях непрерывности x и x' на [0; 10]. Выяснилось, что эта задача имеет 3 решения (см. таблицу).

Приближенные значения решений задачи

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
0	0	0	0
1	9	15,0	38,5
2	16	28,0	73,2
3	21	39,1	98,2
4	24	48,1	113,2
5	35	52,8	118,2
6	24	48,1	113,2
7	21	39,1	98,2
8	16	28,0	73,2
9	9	15,0	38,5
10	0	0	0

Если взять в качестве начального приближения $x_0(t) \equiv 0$, то последовательные приближения для указанного интегрального уравнения сходятся к решению x_1. Если взять, например, начальное приближение $x_0(t) = -2.08(t-5)^2 + 52$, то последовательные приближения сходятся к решению x_3.

К решению x_2 последовательные приближения, по-видимому, не сходятся.

Заключение

Указан метод доказательства существования решений краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью. Метод обоснован с помощью теоремы существования неподвижной точки нелинейного оператора, который преобразует в себя конусный отрезок банахова пространства.

Показано, что в рассмотренных условиях метод последовательных приближений сходится к какому-нибудь решению краевой задачи. Результаты проиллюстрированы примером.

Список литературы

1. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 394 с.
2. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
3. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
4. *Еленская Е.Ю., Еленский Ю.Н.* О существовании неподвижных точек разрывных операторов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2007. Вып. 7(92). С. 9–12.
5. *Еленская Е.Ю.* Существование неподвижных точек непрерывных слева или непрерывных справа операторов в пространствах с правильным конусом // Вестник Ижевского государственного технического университета. 2011. № 4(52). С. 165–167.

About a boundary value problem reduced to an equation with a non-continuous operator

E. Yu. Elenskaya, Yu. N. Elenskiy
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
elenliza@yandex.ru; (342) 2-396-345

The article considers a boundary value problem for a second-order linear differential equation with non-continuous right part. The conditions are given that guarantee the existence of at least one solution for this boundary value problem. These conditions also guarantee that a solution can be found with the method of successive approximations.

Keywords: *differential equation; non-continuous right part; boundary value problem; method of successive approximations.*