ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Математика. Механика. Информатика Вып. 2(41)

МАТЕМАТИКА

УДК 513

Равномерно-разрывные подгруппы группы движений евклидова *n*-мерного пространства

З. И. Андреева
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
varden2012@yandex.ru; 89197176917

Рассмотрены неизоморфные типы равномерно-разрывных подгрупп группы движений евклидова точечного *n*-мерного пространства и исследована их структура.

Ключевые слова: *группа; движение; расстояние; равномерно-разрывная подгруппа; структура группы.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-5-10

Равномерно-разрывные подгруппы группы движений $\boldsymbol{D}$ используются для определения и изучения таких неевклидовых геометрий, о которых говорят, что они развертываются на евклидово пространство $\boldsymbol{E_n}$. Прежде чем определять и изучать такие геометрии нужно исследовать и классифицировать все равномерно-разрывные подгруппы группы $\boldsymbol{D}$.

Решению этого вопроса и посвящена данная статья.

Пусть $\boldsymbol{E_n}$ – *n*-мерное евклидово пространство и $\boldsymbol{D}$ группа его движений.

Определение 1 [1]. Группа движений G называется ***равномерно-разрывной***, если существует такое положительное действительное число d, что для любого движения $g \in G$ и любой точки M евклидова пространства из условия $M \neq g(M)$ следует $|Mg(M)| \geq d$.

Простейшей равномерно-разрывной группой является тривиальная группа, состоящая только из тождественного движения.

Рассмотрим нетривиальные равномерно-разрывные группы.

Теорема 1. Любое нетождественное движение из равномерно-разрывной группы движений евклидова пространства не имеет неподвижных точек.

Доказательство [1]. Пусть G – равномерно-разрывная группа, $g \in G$ и $g(M) = M$ для некоторой точки M. Рассмотрим шар $S = \{N \,/\, |NM| < d/2\}$. Очевидно, g(S) = S. Тогда g(N) ∈ S, поэтому $|Mg(N)| < d/2$. Следовательно,

$$Ng(N)| \leq |NM| + |Mg(N)| < d.$$

Отсюда, по определению 1, $N = g(N)$ для любой точки $N \in S$. В шаре S есть (n + 1) внутренних некомпланарных точек, но движение пространства, имеющее (n + 1) неподвижную точку, является тождественным. Итак, если g имеет хотя бы одну неподвижную точку, то оно тождественное.

Теорема 2. Любое нетождественное движение из равномерно-разрывной группы G движений евклидова пространства можно представить в виде $S_{П_к} \cdot T_{\bar{a}}$, где $\bar{a} \,//\, П_к$ и $1 \leq к \leq (n-1)$.

Доказательство. Всякое движение из $\boldsymbol{D}$ можно представить в виде произведения параллельного переноса и движения, имеющего хотя бы одну неподвижную точку (т.е. в виде $g \cdot T_{\bar{b}}$, где g – движение, имеющее хотя бы одну неподвижную точку). При $g = e$ получим параллельный перенос. Пусть $g \neq e$. Если $\bar{b} = \bar{0}$, то $g \cdot T_{\bar{b}} = g$ и не может входить в G.

Следовательно, $\bar{b} \neq \bar{0}$ для всех элементов из G, отличных от параллельного переноса. Если движение g имеет только одну неподвижную точку, то при $n > 2$ оно является центральной симметрией. Но произведение центральной симметрии на параллельный перенос есть центральная симметрия, поэтому оно не может входить в группу G.

Следовательно, если $g \neq e$, то оно имеет κ-плоскость двойных точек ($1 < \kappa < n - 1$) и вне этой плоскости двойных точек нет, т.е. $g = S_{\Pi_\kappa}$. Вектор $\bar{b}$ представим в виде суммы $\bar{b} = \overline{a_0} + \bar{a}$, где $\bar{a} \,//\Pi_\kappa$, $\overline{a_0} \perp \Pi_\kappa$ или $\overline{a_0} = \bar{0}$. Тогда $g \cdot T_{\bar{b}} = S_{\Pi_\kappa} \cdot T_{\overline{a_0}} \cdot T_{\bar{a}}$. Так как $S_{\Pi_\kappa} \cdot T_{\overline{a_0}} = S_{\Pi_\kappa^1}$, где $\Pi_\kappa^1 \,//\, \Pi_\kappa$, то $g \cdot T_{\bar{b}} = S_{\Pi_\kappa^1} \cdot T_{\bar{a}}$, где $\bar{a} \,//\Pi_\kappa^1$.

Теорема 3. Любая нетривиальная равномерно-разрывная группа содержит нетривиальную инвариантную подгруппу параллельных переносов.

Доказательство. Пусть G нетривиальная равномерно-разрывная подгруппа группы ***D.*** Так как множество параллельных переносов из G замкнуто относительно умножения и отображение, обратное параллельному переносу, является тоже параллельным переносом, то это множество является подгруппой в G. Так как $g^{-1} \cdot T_{\bar{a}} \cdot g = T_{\bar{b}}$. Пусть $S_{\Pi_\kappa} \cdot T_{\bar{a}}$ – любой элемент из G. Тогда

$$(S_{\Pi_\kappa} \cdot T_{\bar{a}})\,(S_{\Pi_\kappa} \cdot T_{\bar{a}}) \in G.$$

Но

$$(S_{\Pi_\kappa} \cdot T_{\bar{a}}) \cdot (S_{\Pi_\kappa} \cdot T_{\bar{a}}) = \\ = (S_{\Pi_\kappa} \cdot S_{\Pi_\kappa}) \cdot (T_{\bar{a}} \cdot T_{\bar{a}}) = e \cdot T_{2\bar{a}} = T_{2\bar{a}}.$$

Итак, в группе G есть параллельные переносы. Пусть $\boldsymbol{T}$ – группа всех содержащихся в G параллельных переносов. Если $g \in G$ и $T_{\bar{a}} \in \boldsymbol{T}$, то $g^{-1} \cdot T_{\bar{a}} \cdot g = T_{\bar{b}} \in \boldsymbol{T}$. Следовательно, подгруппа параллельных переносов, входящая в G, будет в ней инвариантной подгруппой.

Теорема 4. Равномерно-разрывная группа G_1 содержит только параллельные переносы на пропорциональные векторы тогда и только тогда, когда она циклическая.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $T_{\bar{b}} \in G_1$ ($\bar{b} \neq \bar{0}$) и пусть $\alpha\bar{b}$ – все возможные векторы, для которых $T_{\alpha\bar{b}} \in G_1$. Если A – фиксированная точка, $T_{\alpha\bar{b}}(A) = A_1$, то $\left|\alpha\bar{b}\right| = |AA_1| > d$, если $\alpha \neq 0$. Если $\{\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A, A_1, A_2, \ldots\}$ – орбита точки A при действии группы G_1, то все точки орбиты расположатся на одной прямой. Зафиксируем на этой прямой интервал I длины R, содержащий точку A. Пусть в этот интервал попали κ точек орбиты. Интервалы I_J с центрами в этих точках, длины которых равны d, не будут пересекаться. Очевидно, если интервал I с обеих сторон увеличить на $d/2$, то в него войдет столько же интервалов I_j, сколько и точек орбиты. Следовательно, $\kappa \leq R + d/2$ и число точек, попавших в интервал I, будет конечным. Выберем из этих точек ближайшую к A точку B ($B \neq A$). Пусть $\overline{AB} = \bar{a}$. Очевидно, $T_{\bar{a}} \in G_1$. Все $T_{m\bar{a}} \in G_1$, где $m \in R$. Покажем, что этими параллельными переносами исчерпываются все элементы группы G_1. По условию теоремы в группе G_1 содержатся только переносы на векторы $\alpha\bar{a}$. Пусть $\alpha = m + r$, где $0 \leq r < 1$. Тогда $T_{\alpha\bar{a}} = T_{m\bar{a}} \cdot T_{r\bar{a}}$. Если $T_{\alpha\bar{a}} \in G_1$, то и $T_{r\bar{a}} \in G_1$. Если $C = T_{r\bar{a}}(A)$, то либо $C = A$, либо C ближе к A, чем B, что невозможно.

Следовательно, $r\bar{a} = \bar{0}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, т.е. $r = 0$. Итак, группа G_1 состоит только из всех возможных переносов вида $T_{m\bar{a}}$, а поэтому является циклической группой: $G_1 = \{T_{\bar{a}}\}$.

$\Leftarrow$ Пусть $G_1 = \{T_{\bar{a}}\}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$. Любой элемент из G_1 имеет вид $T_{m\bar{a}}$. Если A – любая точка и $A_1 = T_{m\bar{a}}(A)$, то $A \neq A_1 \Leftrightarrow m \neq 0$. Но тогда $|AA_1| = |m\bar{a}| \geq |\bar{a}|$. Так как $|\bar{a}| > 0$, то группа G_1 равномерно-разрывная.

Теорема 5. Равномерно-разрывная группа G_2 содержит только параллельные переносы, ранг системы векторов которых равен κ, тогда и только тогда, когда она равна прямому произведению κ циклических групп.

Доказательство. $\Rightarrow$ Зафиксируем произвольную точку A. Пусть А – орбита точки A при действии группы G_2. Все точки орбиты будут лежать в одной κ-плоскости Π. Если зафиксировать точку B, не лежащую в плоскости Π, то ее орбита будет лежать в κ-плоскости, параллельной Π, и может быть получена из точек орбиты A параллельным переносом на вектор $\overline{AB}$. Если $A^1 = T_{\overline{AB}}(A)$ и $B^1 = T_{\overline{AB}}(B)$, то $|AA^1| = BB^1$.

Пусть K – шар радиуса R с центром в точке A, содержащий хотя бы одну отличную от A точку ее орбиты. Для любой точки A^1, лежащей в K, верно неравенство $|AA^1| > d$. Рассмотрим все возможные шары K^1 радиуса $d/2$, центрами которых являются точки из K. Очевидно, эти шары попарно не пересекаются. Следовательно, их число не превосходит отношение меры шара, полученного из K увеличением его радиуса на $d/2$ к суммарной мере шаров из K^1, т.е. не превосходит числа

$$\frac{\pi(R+d/2)^n}{\pi(d/2)^n} = \frac{2^n(R+d/2)^n}{d^n}.$$

Так как полученное число конечное, то в шаре K лежит конечное число точек орбиты А. Выберем из них точку, ближайшую к точке A, и пусть она получается из A переносом на вектор $\overline{a_1}$ ($\overline{a_1} \neq \overline{0}$). Это будет вектор наименьшей длины из всех векторов, соответствующих переносам, входящим в группу G_2. Очевидно, $G_2 \supset \{T_{\overline{a_1}}\}$. Так же, как и в теореме 3, можно доказать, что все переносы на векторы, пропорциональные $\overline{a_1}$, образуют подгруппу $\{T_{\overline{a_1}}\}$.

Расширим, если нужно, шар K так, чтобы в нем лежали хотя бы три точки орбиты А, не лежащие на одной прямой. В этом шаре тоже будет лежать конечное число точек этой орбиты. Через каждую точку проведем прямую, параллельную вектору $\overline{a_1}$. Этих прямых будет конечное число. Пусть $l \ni A$ и l_1 – та из проведенных прямых, которая отлична от l и расположена ближе всех к прямой l. На прямой l_1 внутри расширенного шара лежит лишь конечное число точек орбиты. Пусть C – ближайшая из них к точке A. Тогда в G_2 есть параллельный перенос на вектор $\overline{a_2} = \overline{AC}$. Все параллельные переносы на векторы, пропорциональные $\overline{a_2}$, образуют подгруппу $\{T_{\overline{a_2}}\}$. Очевидно, $\{T_{\overline{a_2}}\} \cap \{T_{\overline{a_1}}\} = \{e\}$. Если $T_{\overline{d}} \in G_2$ и $\overline{d} = \alpha\overline{a_1} + \beta\overline{a_2}$, то легко показать, что $\alpha_1 = n$, $\alpha_2 = m$. Следовательно,

$$G_2 \ni \{T_{\overline{a_1}}\} \otimes \{T_{\overline{a_2}}\}.$$

Если $к > 2$, то продолжая рассуждения, получим, что

$$G_2 = \{T_{\overline{a_1}}\} \otimes \{T_{\overline{a_2}}\} \otimes \ldots \otimes \{T_{\overline{a_k}}\}.$$

$\Leftarrow$ Пусть $G_2 = \{T_{\overline{a_1}}\} \otimes \{T_{\overline{a_2}}\} \otimes \ldots \otimes \{T_{\overline{a_k}}\}$, где векторы $\overline{a_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) линейно независимы. Любой элемент из G_2 имеет вид $T_{\overline{g}}$, где $\overline{g} = n_1\overline{a_1} + n_2\overline{a_2} + \ldots + n_k\overline{a_k}$.

Этот вектор отличен от нулевого тогда и только тогда, когда $n_1, n_2, \ldots, n_k$ не равны нулю одновременно. Если A – произвольная точка и $A_1 = T_{\overline{g}}(A)$, то

$$|AA_1| = |\overline{g}| = |n_1\overline{a_1} + n_2\overline{a_2} + \ldots + n_k\overline{a_k}| \geq$$
$$\geq |\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_k}| > 0.$$

Следовательно, группа G_2 равномерно-разрывная.

Теорема 6. Равномерно-разрывная груплпа G_3 содержит винтовые движения только с одной и той же осью и не содержит параллельных переносов на векторы, не параллельные этой оси, тогда и только тогда, когда она является циклической группой.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть равномерно-разрывная группа G_3 содержит винтовые движения только с одной и той же осью и не содержит параллельных переносов на векторы, не параллельные этой оси. Пусть A_0 произвольная точка и B_0 основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось l. Рассмотрим шар с центром в точке B_0 такого радиуса r, чтобы в нем содержались точка A_0 и еще хотя бы одна точка орбиты A_0. Пусть $к$ – число точек орбиты A_0, попавших в этот шар. Проведем открытые шары с центрами в этих точках радиуса $d/2$. Так как G_3 равномерно-разрывная группа характеристики $к$, то эти шары не будут пересекаться. Все они будут содержаться в шаре с центром B_0 радиуса $r + d/2$. Следовательно, $k \leq \frac{2^n(r+d/2)^n}{d^n}$, т.е. $к$ – целое число. Через каждую точку A_p ($0 \leq p \leq к$) проведем гиперплоскость γ_p, перпендикулярную оси $\boldsymbol{l}$. Из всех плоскостей $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ выберем ту, которая ближе всех расположена к γ_0. Пусть это будет та плоскость, которая проходит через точку A_1.

Обозначим $\overline{A_0A_1} = \bar{a}$. Тогда $A_1 = R^{\alpha}_{l,\bar a}(A_0)$, $R^{\alpha}_{l,\bar a}(A_0) \in G_4$, т.е. в G_4 входят все винтовые движения вида $R^{n\alpha}_{l,n\bar a}$, где n – любые целые числа. Пусть $R^{\beta}_{l,\bar b}$ – любое винтовое движение, входящее в G_4. Пусть $B_0 \in l$ и $B^1 = R^{\beta}_{l,\bar b}(B_0)$. Кроме того, обозначим $B_1 = R^{\alpha}_{l,\bar a}(B_0)$, …, $B_n = R^{n\varepsilon}_{l,n\bar a}(B_0)$. Пусть B^1 лежит между B_n и B_{n+1} и. пусть $\gamma^1 \ni B^1$, $\gamma^1 \perp l$ (рис. 1).

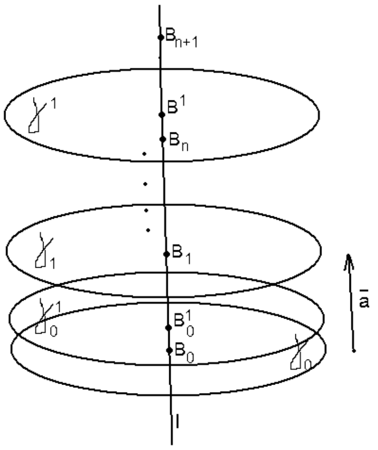

Рис. 1. *Гиперплоскости, проходящие через точки $B_к$*

Рассмотрим $R^{-n\alpha}_{l,-n\bar a}$. Это движение принадлежит группе G_3. Если $B_0^1 = R^{-n\alpha}_{l,-n\bar a}(B^1)$ и $\gamma_0^1 = R^{-n\alpha}_{l,-n\bar a}(\gamma^1)$, то γ_0^1 лежит между γ_0 и γ_1, что противоречит выбору γ_1. Следовательно, B^1 совпадает с B_n (или с B_{n+1}) и $\bar b = n\bar a$. Если бы при этом было $\beta \neq n\alpha$, то в группу G_3 входило бы движение

$$R^{-n\varepsilon}_{l,-n\bar a} \cdot R^{\beta}_{l,n\bar a} = R^{\beta-n\alpha}_{l,\bar 0} = R^{\beta-n\alpha}_{l}.$$

Если $\beta \neq n\alpha$, то в группе G_3 будет содержаться нетождественный поворот вокруг оси, что невозможно. Итак, $\beta = n\alpha$ и все входящие в G_4 винтовые движения имеют вид $R^{n\alpha}_{l,n\bar a}$. Следовательно, $G_3 = \left\{R^{\alpha}_{l,\bar a}\right\}$. Если для некоторого n найдется такое $к$, что $n\alpha = 2к\pi$, то $R^{n\alpha}_{l,n\bar a} = T_{2n\bar a}$ и в группу G_3 будут входить параллельные переносы $T_{2n\bar a}$ и винтовые движения $R^{(2n+s)\alpha}_{l,(2n+s)\bar a}$, где $1 \le s < n$.

Если G_3 содержит параллельный перенос на вектор $\bar b$, где $\bar b \parallel l$, то легко показать, что при $\alpha = \dfrac{2k\pi}{n}$ будет $\bar b = 2mn\bar a$, в противном случае $\bar b = \bar 0$. Но эти параллельные переносы содержатся в $G_3 = \left\{R^{\alpha}_{l,\bar a}\right\}$.

$\Leftarrow$ Пусть $G_3 = \left\{R^{\alpha}_{l,\bar a}\right\}$, пусть $R^{n\alpha}_{l,n\bar a} \in G_3$, $n \neq 0$, A – произвольная точка и $A^1 = R^{n\alpha}_{l,n\bar a}(A)$. Тогда $\left|AA^1\right| \ge \left|n\bar a\right| \ge \left|\bar a\right|$. Следовательно, группа G_3 – равномерно-разрывная.

Теорема 7. Равномерно-разрывная группа G_4 содержит винтовые движения с $к$ осями общего положения и не содержит параллельных переносов на векторы, не параллельные $к$-плоскости, параллельной этим осям, тогда и только тогда, когда она является произведением $к$ циклических групп, изоморфных G_3.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть G_4 равномерно-разрывная группа и содержит винтовые движения с осями $p_1, p_2, \ldots, p_к$, не лежащими в одной ($к$-1)-плоскости. Тогда все винтовые движения с осью p_s, входящие в G_4, образуют циклическую подгруппу $\left\{R^{\alpha_s}_{p_s,\bar a_s}\right\}$. Очевидно,

$$\left\{R^{\alpha_s}_{p_s,\bar a_s}\right\} \cap \left\{R^{\alpha_q}_{p_q,\bar a_q}\right\} = \{e\}, \text{ если } s \neq q,$$

и
$$G_4 = \prod_{s=1}^{k}\left\{R^{\alpha_s}_{p_s,\bar a_s}\right\}.$$

$\Leftarrow$ Легко доказать, что группа $G_4 = \prod_{s=1}^{k}\left\{R^{\alpha_s}_{p_s,\bar a_s}\right\}$, где $\left\{R^{\alpha_s}_{p_s,\bar a_s}\right\} \cap \left\{R^{\alpha_q}_{p_q,\bar a_q}\right\} = \{e\}$ *равномерно-разрывная.*

Теорема 8. Равномерно-разрывная группа G_5 содержит скользящие отражения только относительно одной $к$-плоскости и не содержит параллельных переносов на векторы, не параллельные этой плоскости, тогда и только тогда, когда она является либо циклической вида $\left\{S_{\Pi_k,\bar a}\right\}$, где $\bar a \mid \Pi_r$, либо произведением $\prod_{p=1}^{m}\left\{S_{\Pi_k,\bar a_p}\right\}$ из m изоморфных циклических групп, где $1 < m \le k$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Выделим в G_5 некоторую подгруппу H, содержащую все скользящие отражения относительно плоскости $\Pi_р$, векторы которых пропорциональны между собой.

Пусть $B_0 \in \Pi_p$. Проведем в плоскости Π_p шар K с центром в точке B_0 такого радиуса, чтобы в него попали отличные от B_0 точки ее орбиты при действии H. Как и в теореме 3, можно доказать, что в этот круг попало только конечное число точек орбиты.

Пусть B_1 ближайшая из них к B_0. Если $S_{\Pi,\bar a}(B_0) = B_1$, то легко показать, что $H = \{S_{\Pi,\bar a}\}$. Если $G_5 = H$, то G_5 циклическая, т.е. $G_5 = \{S_{\Pi,\bar a}\}$, где $\bar a \,||\, \Pi$. Группа G_5 состоит из всех возможных скользящих отражений $S_{\Pi,(2n+1)\bar a}$ и параллельных переносов $T_{2m\bar a}$, где n и m – любые целые числа.

Пусть G_5, кроме подгруппы H, содержит скользящие отражения относительно данной плоскости Π на векторы, не параллельные $\bar a$. Расширим, если нужно, круг K так, чтобы в него попали образы B_0 при таких отражениях. Так же, как и в теореме 3, можно доказать, что в круге K содержится конечное число точек орбиты точки B_0 при действии G_5.

Пусть $l_n \ni B_n$, $l_n \,||\, \bar a$, $l_n \subset \Pi$. Пусть l_1 – ближайшая из них к l_0. Обозначим $\bar b = \overline{B_0B_1}$. Тогда $\{S_{\Pi,\bar b}\} \subset G_5$ и $G_5 = \{S_{\Pi,\bar a}\} \cdot \{S_{\Pi,\bar b}\}$. Очевидно, $\{S_{\Pi,\bar a}\} \cap \{S_{\Pi,\bar b}\} = \{e\}$. Группа G_5 состоит из всех возможных скользящих отражений вида $S_{\Pi,k\bar a+p\bar b}$, где из чисел k и p хотя бы одно четное, и всех возможных параллельных переносов вида $T_{(2n+1)\bar a+(2m+1)\bar b}$.

Если G_5 содержит скользящие отражения на векторы, не равные $k\bar a + p\bar b$, то, продолжая рассуждения, аналогичные предыдущим, получим, что

$$G_5 = \prod_{p=1}^{m} \{S_{\Pi,\overline{a_p}}\},$$

где векторы $\overline{a_p}$ $(1 \le p \le m)$ для любого $1 \le m \le (n-1)$ линейно независимы.

$\Leftarrow$ Легко показать, что группы $\{S_{\Pi,\bar a}\}$ и $\prod_{p=1}^{m} \{S_{\Pi_k,\overline{a_p}}\}$, где векторы $\overline{a_p}$ $(1 \le p \le m)$ линейно независимы, являются равномерно-разрывными.

Теорема 9. Равномерно-разрывная группа не может содержать скользящие отражения относительно двух не параллельных плоскостей.

Доказательство. Пусть равномерно-разрывная группа G содержит скользящие отражения с плоскостями Π_1 и Π_2 и пусть $\Pi_1 \cap \Pi_2 = l$.

Так как

$$S_{\Pi_2,\bar b} \cdot S_{\Pi_1\bar a} = T_{\bar b} \cdot S_{\Pi_2} \cdot S_{\Pi_1} \cdot T_{\bar a} =$$

$$T_{\bar b} \cdot R_l^{2\alpha} \cdot T_{\bar a} = R_{l_1}^{2\alpha},$$

то, если $S_{\Pi_1\bar a} \in G$ и $S_{\Pi_2,\bar b} \in G$, то $R_{l_1}^{2\alpha} \in G$, что невозможно (следствие из теоремы 1).

Теорема 10. Равномерно-разрывная группа G содержит скользящие отражения относительно параллельных плоскостей тогда и только тогда, когда она является либо полупрямым произведением $G_8 = \{T_{\bar b}\} \leftthreetimes \{S_{\Pi,\bar a}\}$, где Π – одна из данных плоскостей, $\bar a \,||\, \Pi$, вектор $\bar b$ не параллелен Π, либо полупрямым произведением

$$G_9 = (\{T_{\bar b}\} \otimes \{T_{\bar c}\}) \leftthreetimes (\{S_{\Pi,\bar a}\} \cdot \{S_{\Pi,\bar g}\}),$$

где векторы $\bar a$ и $\bar g$ не коллинеарны и параллельны плоскости Π, и векторы $\bar b$ и $\bar c$, не коллинеарны и не параллельны плоскости Π.

$\Rightarrow$ Если равномерно-разрывная группа G содержит скользящее отражение относительно плоскости Π, то все скользящие отражения относительно этой плоскости, входящие в G, образуют либо подгруппу $\{S_{\Pi,\bar a}\}$, либо подгруппу $\{S_{\Pi,\bar a}\} \cdot \{S_{\Pi,\bar b}\}$ $\cdot$(теорема 7).

Пусть G содержит скользящее отражение относительно плоскости Π_1, где $\Pi_1 \neq \Pi$, но $\Pi_1 // \Pi$ (пусть это $S_{\Pi_1,\bar p}$, где $\bar p // \Pi_1$). Очевидно, G содержит движение $(S_{\Pi_1\bar a} \cdot S_{\Pi_1,\bar p}) = T_{\bar a} \cdot S_\Pi \cdot S_{\Pi_1} \cdot T_{\bar p} = T_{\bar a+\bar p+\bar q}$, где $\bar q$ перпендикулярен плоскости Π, направлен в сторону от Π к Π_1 и имеет длину, равную удвоенному расстоянию между Π и Π_1. Обозначим $\bar b = \bar a + \bar p + \bar q$. Этот вектор не параллелен плоскости Π. Следовательно, в первом случае G содержит параллельные переносы на векторы, коллинеарные вектору $\bar b$. Они образуют циклическую подгруппу. Обозначим ее $\{T_{\bar b}\}$. Группа G содержит подгруппы $\{S_{\Pi,\bar a}\}$ и $\{T_{\bar b}\}$. Так как $\{S_{\Pi,\bar a}\} \cap \{T_{\bar b}\} = e$ и $\{T_{\bar b}\}$ – инвариантна относительно $\{S_{\Pi,\bar a}\}$, то G_8 содержит $\{T_{\bar b}\} \leftthreetimes \{S_{\Pi,\bar a}\}$ Очевидно, G_8 будет искомой группой.

Если G содержит подгруппу $\{S_{\Pi,\bar{a}}\}\cdot\{S_{\Pi,\bar{g}}\}$, то она содержит движения $\{T_{\bar{b}}\}$ и $\{T_{\bar{c}}\}$, где $\bar{c}$, вектор наименьшей длины, параллельный вектору $\bar{g}+\bar{p}+\bar{q}$. Очевидно, векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ неколлинеарны, подгруппа $(\{T_{\bar{b}}\}\otimes\{T_{\bar{c}}\})$ инвариантна относительно $\{S_{\Pi,\bar{a}}\}\cdot\{S_{\Pi,\bar{g}}\}$, $(\{S_{\Pi,\bar{a}}\}\cdot\{S_{\Pi,\bar{g}}\}) \cap (\{T_{\bar{b}}\}\otimes\{T_{\bar{c}}\}) = e$, следовательно, в этом случае

$$G_9 = (\{T_{\bar{b}}\}\otimes\{T_{\bar{c}}\}) \leftthreetimes (\{S_{\Pi,\bar{a}}\}\cdot\{S_{\Pi,\bar{g}}\}).$$

$\Leftarrow$ Легко показать, что группы $G_8 = \{T_{\bar{b}}\} \leftthreetimes \{S_{\Pi,\bar{a}}\}$, где $\bar{a} \,||\, \Pi$, а вектор $\bar{b}$ не параллелен плоскости Π, и

$$G_9 = (\{T_{\bar{b}}\}\otimes\{T_{\bar{c}}\}) \leftthreetimes (\{S_{\Pi,\bar{a}}\}\cdot\{S_{\Pi,\bar{g}}\}),$$

где векторы $\bar{a}$ и $\bar{g}$ не коллинеарны и параллельны плоскости Π, и векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$, не коллинеарны и не параллельны плоскости Π, а являются равномерно-разрывными.

Список литературы

1. *Никулин В.В., Шафаревич И.Р.* Группы и геометрии. М.: Наука, 1993. 239 с.
2. *Андреева З.И.* Современные главы геометрии: учеб. пособие. Пермь: изд-во ПГНИУ, 2014. 102 с.
3. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Многообразие геометрии: учебник. Пермь: изд-во ПГГПУ, 2015. 171 с.

Uniformly discontinuous subgroups of the group of motions in *n*-dimensional Euclidean space

Z. I. Andreeva

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia

varden2012@yandex.ru; 8-919−717−69-17

The paper considers non-isomorphic types of uniformly discontinuous subgroups of the group of motions in n-dimensional Euclidean space and studies the structure of these groups.

Keywords: *group, motion, distance, uniformly discontinuous subgroup, group structure.*