

УДК 532

Об истоках механики деформируемых твердых тел

В. И. Яковлев

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
iakovlev@psu.ru; (342) 239 62 98

Приводится краткая история развития основных идей, законов и методов механики твердых деформируемых тел до XX века.

Ключевые слова: законы механики; упругость; напряжения; деформации; Л. Эйлер; О. Коши; С.Д. Пуассон; А. Навье.

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-98-102

На протяжении всей истории Человечества люди понимали, что различные тела могут обладать различными свойствами. Так, глиняная заготовка на гончарном круге для изготовления посуды может менять свою форму (деформироваться), а камень или кирпич из обожженной глины при давлении или ударе не деформируется, а разрушается. Расширение практики строительства (жилищ, дорог, мостов, оборонительных, культовых сооружений), развитие различных отраслей техники с неизбежностью привели к необходимости изучения свойств разнообразных (природных, искусственно созданных) материалов и конструкций. Естественно, первые выводы о свойствах тел делались на основе теоретических гипотез и практического опыта строительства (вспомним древние пирамиды, храмы, мосты, Вавилонскую башню, Александрийский маяк), использования инструментов, орудий и машин.

Первые попытки не рассуждений о свойствах тел, как это делали **И. Неморарий** (XII–XIII в.), **Л. да Винчи** (1452–1519) и их предшественники, а точного математического описания деформаций тел обычно связывают с именем **Г. Галилея** (1564–1642). В его знаменитом трактате "Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и

местному движению" (1638) излагаются основы сопротивления материалов и строительной механики. В частности, в первых двух диалогах-беседах он рассуждает о способности сплошных и полых балок сопротивляться их изгибу. Описывая свойства бруса, лежащего на двух опорах, автор утверждает, что его изгибная прочность пропорциональна площади поперечного сечения бруса и не зависит от его длины. Изучая сопротивление изгибу консольной балки, он ошибочно считает, что сопротивление должно равномерно распределяться по ее поперечному сечению.

Следующий важный шаг в открытии законов деформаций тел сделал **Роберт Гук** (1635–1703). В его знаменитом труде "О восстановительной способности или об упругости, объясняющей силу упругих тел" (1678), был сформулирован вывод о пропорциональности удлинений упругих тел (пружин, струн, стержней) приложенным к ним силам ("закон Гука"). Позднее этот закон подтвердил **Эдм Мариотт** (1620–1684).

В XVII–XVIII вв. большинство задач из области сопротивления материалов решались с использованием закона Гука и некоторых дополнительных гипотез.

В 1713 г. **Антуан Паран** (1666–1716) установил закон распределения напряжений по сечению изогнутой балки и сформулировал гипотезу о возможности замены фрагмента висящей, закрепленной на двух опорах нити (типа моста), двумя силами натяжения, при-

ложенными к оставшейся части. Эта гипотеза позволила **Якобу Бернулли** (1654–1705) в 1691–1704 гг. найти уравнение изогнутой оси бруса ("цепной линии", линии изгиба). К задаче о "цепной линии" также обращались **Г.В. Лейбниц** (1646–1717), **И. Бернулли** (1667–1748), **П. Вариньон** (1654–1722), **А. Паран**, **Д. Бернулли** (1700–1782) и **Л. Эйлер** (1707–1783). В приложении к работе "Метод нахождения кривых линий" (1744) Эйлер решил ряд задач, связанных с нахождением линий изгиба брусьев. В частности, он решал задачи о продольном изгибе колонны под действием осевой сжимающей силы, о колебаниях стержней и струн. Аналогичные задачи (в этот же период 40-х гг. XVIII в.) были рассмотрены Д. Бернулли и **Ж.Л. Даламбером** (1717–1783).

Особую ценность представляют работы о малых колебаниях натянутой однородной струны. Дифференциальное уравнение в частных производных этой задачи первым записал Даламбер. Он же в 1747 г. получил решение в виде суммы двух произвольных функций, определяемых по начальной форме струны и начальному распределению скоростей ее точек. Эйлер, развивая метод Даламбера (метод характеристик), показал в 1748 г. свой графический способ построения формы струны в любой момент времени по начальным условиям. А Д. Бернулли в 1753 г. представил решение уравнения (колебания струны) в виде тригонометрического ряда (в виде суммы бесконечного числа главных синусоидальных колебаний – "принцип суперпозиции").

Это были первые шаги в создании математической физики как теории (постановки, классификации) и решения задач уравнений в частных производных. Далее (после 1760 г.) последовали более сложные задачи о колебаниях мембран, пластин, воздуха в трубах и другие. В последней трети XVIII в. к их постановке и решению подключился и **Ж.Л. Лагранж** (1736–1813). Экспериментальные исследования свойств материалов проводились **Р. Реомюром** (1683–1757), **П. Мушенбруком** (1692–1761), **Б.Ф. Белидором** (1697–1761), **Ж.Л. Бюффоном** (1707–1788), **Ш. Кулоном** (1736–1806), **П. Жираром** (1765–1836), **А. Навье** (1785–1836).

Важнейшие первые шаги по созданию математической теории упругости были сделаны членами Парижской академии наук **С.Д. Пуассоном** (1781–1840), **Л.А.А. Навье** (1785–1836) и **О.Л. Коши** (1789–1857) в 1920–30-х гг.

XIX в. В 1819 г. **С.Д. Пуассон** – ученик и последователь Лагранжа, – получил решение одномерной задачи теории упругости (решения для двумерного и трехмерного случаев были опубликованы в 1829–1831 гг.). Но отсчет истории механики твердых деформируемых тел принято вести от мемуара Анри Навье "Мемуар о законах равновесия и движения упругих твердых тел", представленного им 14 мая 1821 г. Парижской академии наук.

Пользуясь гипотезой Лапласа о молекулярном строении тел, Навье вывел первые уравнения равновесия и движения деформируемого тела как совокупности молекул, между которыми действуют силы притяжения (гравитации) и отталкивания (по причине теплового взаимодействия). Упругость тел обосновывалась свойствами притяжения и отталкивания молекул.

Молекулярная модель лежала и в основе построения волновой теории света (**Т. Юнг** (1773–1829), **О.Ж. Френель** (1788–1827), **Д.Ф.Ж Араго** (1786–1853)). Общность первых теорий упругости и оптики вполне объяснима. Френель рассматривал световой эфир как твердое тело.

В сентябре 1822 г. Парижской академии наук был представлен мемуар Огюстена Коши "Исследование равновесия и внутреннего движения твердых тел и жидкостей, упругих и неупругих" (опубликован в 1823 г.), в котором предлагался континуальный подход к механике сплошной среды. Автор ввел понятие напряжения на площадке, представил его через три составляющие по осям координат и рассмотрел напряженное состояние в точке упругого тела. Изучая силы, действующие на элементарный объем, он получил уравнения равновесия сплошной среды в напряжениях, ввел главные деформации, эллипсоид деформаций, при этом утверждал, что направления главных деформаций и напряжений совпадают, а их величины связаны пропорциональной зависимостью.

В 1828 г. Коши опубликовал еще две статьи той же тематики. В первой он ввел шесть компонент будущего тензора деформаций (ранее они встречались в гидромеханике Эйлера и Лагранжа). Их он выражал через производные от трех проекций вектора смещения для произвольной деформируемой среды. Здесь же получены выражения для удлинения любого линейного элемента и вводятся главные удлинения по трем взаимно перпен-

дикулярным направлениям главных осей деформации. Во второй из статей Коши изучает будущий тензор напряжений, используя молекулярную модель упругого тела. Следует иметь в виду, что терминов "вектор" и "тензор" тогда еще не было, но очевидно, что их будущее появление было подготовлено использованием новых понятий, введенных Коши.

В 1829 г. Пуассон привел 36 коэффициентов, определяющих зависимость шести компонентов напряжения от шести компонентов деформации. Через 10 лет (в 1839 г.) **Дж. Грин** (G. Green; 1793–1841), на основе принципов Даламбера и виртуальных скоростей, почерпнутых им из "Аналитической механики" Лагранжа, и введя понятие упругого потенциала, получил зависимости между деформациями и напряжениями для упругого анизотропного тела. В его уравнениях, полученных из условия существования полного дифференциала упругого потенциала (как следствия невозможности "перпетуум мобиле"), число независимых модулей упругости в общем случае равнялось 21 (в случае изотропного упругого тела остаются только два независимых модуля упругости и получаются уравнения, приведенные в первом мемуаре Коши).

В 1845 г. свой вывод уравнений теории упругости, используя континуальный подход (Эйлера–Коши) и гипотезу о линейной зависимости компонент напряжений от компонент деформаций, дал **Дж. Г. Стокс** (1819–1903). Для изотропного тела он получил две упругие постоянные. Далее вопрос о количестве этих констант обсуждался в работах самого Пуассона, **Г. Ламе** (1795–1870; "Лекции по математической теории упругости твердых тел", 1852), **У. Томсона** (лорд Кельвин; 1824–1907), **А.Ж.К. Сен-Венана** (1797–1886). В публикации 1858 г. **Г.Р. Кирхгоф** (1824–1887) рассматривал проблему существования и единственности решения задач теории упругости.

Параллельно с формированием теоретических основ теории упругости создавались и методы решения практических задач. Задачи о растяжении бесконечной призмы, кручении бесконечного кругового цилиндра, равновесии шара под действием взаимного притяжения его частиц, равновесии полого круглого цилиндра и шара под действием внутреннего и внешнего давления были рассмотрены в "Мемуаре о внутреннем равновесии одно-

родных твердых тел" (1831) **Габриеля Ламе** (Gabriel Lamé; 1795–1870) и **Эмиля Клапейрона** (Benoît Paul Émile Clapeyron; 1799–1864) в период их пребывания в Петербурге. Далее к задачам исследования упругого шара и цилиндра (сплошного, полого), к методам разложения решения по сферическим и цилиндрическим функциям обращались и многие другие авторы.

Исследованию влияния неравномерности нагревания тела на его напряженное состояние были посвящены публикации **Жана-Мари Дюамеля** (Duhamel, 1797–1872) "Мемуар о расчете молекулярных действий, развиваемых изменениями температуры в твердых телах" (1738) и "Второй мемуар о термомеханических феноменах" (1837). С этих работ начались исследования по термоупругости тел.

В 1828–1829 гг. Коши и Пуассон заложили основы теории изгиба тонких стержней. Коши получил приближенные формулы для кручения тонких прямоугольных стержней, создав предпосылки для построения Сен-Венаном в 1840–1850-х гг. общей теории изгиба и кручения призматических стержней. Работы Сен-Венана были продолжены его учеником **Ж. Буссинеском** (J.V. Boussinesq; 1842–1929) – автором большого трактата "Использование потенциалов в изучении равновесия и движения упругих тел" (1885), в котором рассмотрен целый ряд задач для бесконечных тел, на поверхности или внутри малой области которых заданы силы или смещения.

Первые публикации по плоским задачам теории упругости появились во второй половине XIX в. Одними из первых были: трактат **А. Клебша** (R. F. A. Clebsch; 1833–1872) "Теория упругости твердых тел" (1862), в 1883 г. переведенный Сен-Венаном на французский язык, публикации **Х.С. Головина** (1844–1904), **Дж. Эри** (G.V. Airy; 1801–1892), **Дж. Максвелла** (J.C. Maxwell; 1831–1879), **Дж. Мичелла** (A.G.M. Michell; 1863–1940), **Г.Р. Герца** (1857–1894). Однако наибольший прогресс в этом направлении исследований был получен только в XX в. с использованием теории аналитических функций.

Внимание многих ученых XIX в. привлекли задачи колебаний струн, стержней, пластин, оболочек, распространения колебаний в упругой среде. Интерес к этим задачам был связан не только с потребностями сугубо инженерных расчетов, но и с попытками построения механической теории эфира, кото-

рый по гипотезам той эпохи ассоциировался с упругим телом. В 1828 г. Пуассон показал, что в упругой среде возмущение распространяется посредством волн двух видов: поперечных и продольных. В поперечных волнах плотность среды остается постоянной, и происходит только смещение одних частей среды относительно других, а в продольных распространяется волна сжатия – разрежения среды. Среди важнейших работ этого направления можно назвать статьи английских ученых Дж. Грина, **Дж. Стрэтта** (лорд Рэлей, J. Strutt; 1842–1919), Ж.М. Дюамеля, Дж. Стокса, **Г.Л.Ф. Гельмгольца** (1821–1894), Г. Кихгофа, **О.Э.Х. Лява** (1863–1940), Э. Матье. Многие достижения теории колебаний, теории упругости твердых деформируемых тел были отражены в первом томе "Теории звука" лорда Рэля, изданной в Лондоне в 1877 г. (второе издание – 1894 г.).

Наряду с задачами колебаний тел внимание многих ученых привлекли и задачи, связанные с исследованием удара твердых тел. Одна из первых публикаций в этом направлении появилась в 1807 г. ("Курс лекций по натуральной философии и механических искусств"). Ее автором был Т. Юнг. Далее исследования действия ударной нагрузки занимались Стокс, Сен-Венан (поперечный и продольный удар стержней, 1883 г.), Буссинеск (продольный удар тяжелого тела по стержню), **П.А. Югонио** (Гюгоньо, Pierre-Henri Hugo-piot; 1851–1887), и Г. Герц. Рассматривая соударение двух упругих шаров, Герц вычислил продолжительность удара и возникающие напряжения.

Важным направлением исследований стало использование энергетических и вариационных принципов. Понятие энергетического потенциала, формировавшееся в работах **Я. Риккати** (1750), А. Навье (1821), Дж. Грина (1837), У. Томсона (1855), и теорема Э. Клапейрона (о равенстве работы внешних сил на смещениях удвоенной энергии упругой деформации тела), высказанная в начале 1930-х гг. (опубликована в 1852 г. в "Лекциях по математической теории упругости твердых тел" Г. Ламе), оказались основой новой ветви теории упругости и удобным инструментом решения некоторых новых задач, в частности, строительной механики, статически неопределимых систем (работы Э. Клапейрона, **О. Мора**, **Ж.А. Бресса**, **А. Клебша**, **К. Кульмана**, **Л. Кремоны**).

В XIX в. сформировались представления о двух различных процессах разрушения: хрупкого и сдвигового (пластического). Изучение пластического разрушения привело к появлению модели твердого тела с неидеальной упругостью. Для последующего развития механики деформируемых тел были важны публикации Дж. Стокса, Дж. Максвелла, У. Томсона, В. Фойхта, В. Вольтерра, А. Треска, ставшие основой для разработки Сен-Венаном основ математической теории пластичности, созданных на гипотезах:

- 1) несжимаемости материала,
- 2) совпадения направлений максимальной скорости скольжения и наибольшего касательного напряжения,
- 3) постоянства максимального касательного напряжения.

Важным событием XIX в. стало возникновение нового математического аппарата и соответствующей символики. В современной механике сейчас широко используются математические понятия вектора и тензора, появление которых было неразрывно связано с развитием теоретической механики и механики сплошных сред. Такие понятия как скорость, ускорение, сила, момент силы характеризуются не только численной величиной (числом), точкой приложения, но и направлением. Использование для их описания векторов (отрезков прямой, имеющих точку приложения и направление) представляется абсолютно естественным. Возникнув в недрах механики, понятие вектора далее стало полноценным математическим объектом векторного анализа, созданного трудами **У. Гамильтона** (1805–1865; в 1845 г. он ввел термины "вектор", "скаляр", скалярное произведение", "векторное произведение", изображал векторы направленными отрезками – стрелками), **Г.Г. Грассмана** (1809–1877), **Дж. У. Гиббса** (1839–1903), **О. Хевисайда** (1850–1925; в 1891–1892 гг. ввел термины "орт", "набла", обозначал векторы жирным шрифтом), **У.К. Клиффорда** (1845–1879, в 1878 г. ввел термины "дивергенция", "ротор").

Вторым важнейшим математическим понятием, ставшим неотъемлемой частью современной механики, является понятие тензора. Гамильтон использовал термин "тензор" для выражения длины вектора. Однако к началу XX в. этот термин по инициативе немецкого физика и механика **Вольдемара Фойхта** (1850–1919) приобрел совершенно иной смысл.

В 1898–1903 гг. Фойгт использовал термин "тензор" (от латинского *tensus* – напряженный, растягиваемый) для описания механических напряжений.

Понятие тензора возникло как адаптация применительно к задачам механики понятия "матрицы", введенного Дж. Сильвестром в 1850 г. для обозначения некоторой прямоугольной таблицы элементов. Развитие теории матриц, создававшейся для исследования систем линейных алгебраических уравнений, а также "систем с индексами" (алгебраических квадратичных форм, дифференциальных квадратичных форм в геометрии) началось еще в середине XVIII в. Примерами "систем с индексами" стали и теоретические работы XIX в. по гидромеханике и механике твердого деформируемого тела.

Значительный вклад в создание теории матриц внесли Г. Крамер (1704–1752, теория определителей), К.Ф. Гаусс, О. Коши, У.Р. Гамильтон, А. Кэли (1821–1895), Дж. Сильвестр (1814–1897), К. Вейерштрасс (1815 – 1897), Г.Ф.Б. Риман (1826–1866), Ф.Г. Фробениус (1849–1917), М.Э.К. Жордан (1838–1922). В 1886–1901 гг. итальянец Г. Риччи–Курбастро (1853–1925) создал новый математический аппарат, названный им "абсолютным дифференциальным исчислением".

Дальнейшее развитие этого исчисления в работах Т. Леви-Чивиты (1873–1941), Э.Б. Кристоффеля (1829–1900), Фойгта (одним из первых дал матричное представление координат тензоров второго и четвертого рангов, за-

дающих физические свойства различных типов кристаллов) привело к появлению тензорного исчисления.

Новое исчисление, в котором векторы и тензоры имеют не только математические свойства, но и определенный физический смысл, нашло применение во многих разделах физико-математических наук (в теории относительности, теории римановых пространств, кристаллофизике, электродинамике, дифференциальной геометрии, аналитической механике и механике сплошной среды).

Но, как и в случае с МЖГ, еще более важные результаты МТДТ были получены в XX в. Это было откликом на появление новых задач, новых материалов и новых методов экспериментального и математического исследования.

Список литературы

1. Михайлов Г.К. Механика сплошной среды (XIX в.) // История механики с конца XVIII века до середины века XX. М.: Наука, 1972. 414 с.
2. Работнов Ю.Н.. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 711 с.
3. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 288 с.
4. Трусделл К. Очерки по истории механики. Москва–Ижевск: ИКИ, 2002. 316 с.
5. Яковлев В.И. Начала механики. Москва–Ижевск: РХД, 2005. 352 с.

On the origins of mechanics of deformable solids

V. I. Yakovlev

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
iakovlev@psu.ru; (342) 239 62 98

The paper provides a brief history of the development of the basic ideas, laws and methods of mechanics of solid deformable bodies up to the 20th century.

Keywords: *laws of mechanics; elasticity; stresses; deformations; L. Euler; A.L. Cauchy; S.D. Poisson; A. Navier.*