

ИСТОРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 514.8; 530.1

Из истории развития концепции математических бильярдов (генезис, динамическое многообразие, приложения)

Н. Н. Макеев

Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Рассматривается исторический аспект развития бильярдной модели динамических систем, типы этой модели, а также некоторые ее приложения.

Ключевые слова: математический бильярд; теория динамических систем; эргодичность; интегрируемость; история математики.

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-88-97

Исторические корни математического бильярда¹



В связи с бильярдной игрой ... возникают динамические задачи, решение которых содержится в этом произведении. Люди, знающие теоретическую механику, ..., с интересом познакомятся с объяснениями всех оригинальных явлений, которые можно наблюдать во время движения бильярдных шаров.

Гюстав Гаспар де Кориолис.
Математическая теория явлений бильярдной игры

Бильярд как настольная игра появился в Европе в XVI в. и вскоре стал популярным видом развлечения. В России он вошел в обиход при Петре Великом, а с 1850 г. распространился по многим городам [1].

Со временем появилось множество видов бильярдной игры, среди которых следует выделить *французский бильярд*. Он отличается от традиционного бильярда тем, что бильярдный стол не содержит луз. При этом цель игры состоит в том, чтобы попасть в заданный шар после нескольких столкновений посылаемого шара с другими шарами.

Впоследствии возникает потребность формализованного описания динамики бильярдной игры на основе математического аппарата и законов классической механики. История возникновения этой формализации восходит к трудам *Гюстава Гаспара де Кориолиса* (1792–1843). В исторических записках упоминается о том, как он часто наблюдал за игрой знаменитого в то время парижского бильярдиста-виртуоза Франсуа Менго. Результаты своих наблюдений Кориолис описал языком уравнений механики и в 1835 г. в Париже издал труд [2], переизданный впоследствии на русском языке [3].

© Макеев Н. Н., 2018

¹ В статье употребляется термин *бильярд* (вместо *бильярд*) в соответствии с этимологией этого слова, произошедшего от французского *billiard*.

Кориолис в своем труде использовал элементы теории вероятностей, теории пределов, математического анализа. Он первым поставил вопрос о создании математического базиса, описывающего бильярдную игру.

В 1882–1883 годах математическое обоснование теории бильярдной игры было продолжено *Анри Резалем* (1828–1896) в работах [4–6]. Работа [6] впоследствии была переведена на русский язык [7]. В ней Резаль указал на неточности, содержащиеся в некоторых выводах Кориолиса, приведенных в труде [2], и предложил свое решение, полученное с учетом действия геометрических связей, имеющих между шарами и бильярдным столом.

Игровой бильярд – прообраз математической модели динамических систем



С развитием теории динамических систем, различных отраслей математики, физики, технических наук была установлена общая закономерность, выражающая качественную идентичность определенных черт процессов и явлений, относящихся к описаниям явлений, трактованных данными науками. Это, в свою очередь, вызвало потребность в создании адекватной математической модели, охватывающей данные явления, и удобной для их формализованного описания.

Оказалось, что такого рода удобной моделью может являться *схема бильярдной игры*, носящей роль прообраза данной модели. Такому наглядному представлению модели способствовало развитие *молекулярно-кинетической теории идеальных газов*, разработанной Р. Клаузиусом, Дж. Максвеллом, Д. Джоулем и Л. Больцманом. Согласно этой теории динамическое взаимодействие отдельных молекул газа в выделенной системе происходит в виде их упругих соударений подобно соударениям шаров в бильярде.

Помимо задач теории газов бильярдная схема динамического взаимодействия аппроксимирует и другие задачи классической физики, в частности, задачи оптики, механики

идеальной жидкости, акустики [8, с. 93].

Следует также отметить исследования *Г. Дарбу* (1842–1917) по динамике бильярда, приведенные в его фундаментальном трактате [9] и опубликованные в русском переводе в 2010 г. [10]. В этой работе получены динамические уравнения движения для общего случая неупругого соударения твердых тел при наличии трения.

К более поздним годам относятся работы ряда авторов: *Г. Хемминга* (1899) [11], *П. Анпеля* (1911) [12], *Р. Петти* (1996) [13]. К этому же направлению исследований относятся и монография [14] (1991), в которой к исследованию различных бильярдных задач применены качественные методы. В этой же работе представлены результаты о неинтегрируемости задачи о традиционном бильярде.

Возникновение математического бильярда

Бильярд как математическая модель (*математический бильярд*) впервые была введена *Дж. Д. Биркгофом* (1884–1944) [15]. Им была поставлена задача, названная впоследствии его именем (*задача Биркгофа*) [16], положившая начало развитию бильярдной модели и расширению представлений о свойствах математического бильярда [17].

Понятие о математическом бильярде как о математической модели динамической системы в основе сводится к следующему.

Пусть Q – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой непроницаемой абсолютно твердой границей Γ , расположенная на евклидовой плоскости R^2 или на стандартном торе T^2 .

Классическим математическим бильярдом (далее – просто *бильярдом*) называется консервативная динамическая система, порожденная прямолинейным равномерным движением (движением по инерции) материальной точки (*бильярдной точки*) внутри плоской области Q (*бильярдной области*) с ее последующими абсолютно упругими отражениями от твердой границы Γ [8].

Согласно *закону упругого отражения* угол падения точки равен углу ее отражения. В силу этого величина тангенциальной компоненты скорости точки при ее ударе сохраняется, а нормальная компонента мгновенно изменяет знак. При этом если граница Γ криволинейна, то указанный угол измеряется от касательной к кривой, проведенной в точке

удара [18].

Иначе, бильярд – аппроксимирующая модель, представленная движением материальной точки в плоской области Q без трения² с ее упругими отражениями от твердой недеформируемой границы Γ или, что тоже самое, отражением лучей света в области Q с зеркальной границей Γ при полном зеркальном отражении (с альбедо $a = 1$) [18].

Этот закон отражения бильярдной точки применим, в том числе, к областям в многомерном пространстве и, в общем случае, к другим геометриям, а не только к евклидовой. При этом предполагается, что отражение бильярдной точки происходит в гладкой окрестности точки границы Γ .

Свойства бильярда исследовались для различных форм плоской области Q ("бильярдного стола"): эллиптической (в частности, круговой), произвольной овальной, полигональной (в виде многоугольников правильных и произвольных), специальной ("стадион", гриб Бунимовича, торическая фигура) [18] (рис. 1).

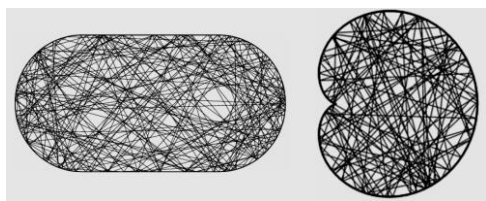


Рис. 1. Стадион и улитка – формы области Q

Бильярды, как модели, обладают всем комплексом эффектов, характерных для многомерных динамических систем, к которым относятся, в частности, интегрируемость, хаос и ряд других. По характеру и свойствам различают бильярды *классический* и *динамический*. Последний отличается от классического тем, что в нем бильярдная точка движется в заданном поле сил, тогда как в классическом бильярде эта точка движется по инерции.

Математический бильярд – универсальная модель динамической системы

Динамические системы – обширная область современной математики с развитыми методами исследования и областью приложе-

ний. Бильярд является эффективной моделью динамической системы, проявляющей свойства, характерные для ряда разнообразных задач в различных отраслях науки.

Как было отмечено ранее, эта модель впервые была введена Дж. Биркгофом в его исследованиях, выполненных до 1927 г. По результатам этих изысканий им в этом же году была издана монография, которая в русском переводе опубликована в 1941 г. [16]. Это издание в дальнейшем стало библиографической редкостью и в 1999 г. книга Биркгофа была переиздана на русском языке [19].

Основополагающая работа [19] в разделе "Некоторые проблемы динамики" (с. 311) содержит следующие бильярдные задачи:

- бильярдный шар на эллиптическом столе (с. 319);
- частица на гладкой замкнутой выпуклой поверхности (с. 320);
- частица на гладкой замкнутой поверхности отрицательной кривизны (с. 321).

После выхода этой фундаментальной монографии динамические системы как новое научное направление стало отдельной интенсивно развивающейся областью математики. Своим трудом Дж. Биркгоф заложил основы общей теории динамических систем.

Свойства бильярдов функционально зависят от свойств его границы, в зависимости от которых устанавливаются их классы. Каждый класс бильярдов обладает своими характерными эргодическими свойствами, существенно отличными от свойств бильярдов других классов.

Динамические системы бильярдного типа (даже при наличии у них различных свойств) по характеру *разрывны*: в точках отражения бильярдного шара от границы Γ области Q происходит скачкообразное изменение его скорости. При этом свойства неустойчивости движения для разных бильярдных траекторий существенно неодинаковы.

Бильярды и эргодичность³. Бильярды представляют собой эффективную модель для исследования свойства *эргодичности*, изучаемой ранее Л. Больцманом (1844–1906). Эргодическая гипотеза Больцмана утверждает, что фазовый поток, соответствующий движению одинаковых абсолютно упругих шаров в бильярде с *упругими стен-*

² Это относится только к *классическому бильярду*, аппроксимирующему консервативные динамические системы, в отличие от обобщенного бильярда, в котором может быть учтено трение.

³ *Эргодичность* – свойство динамической системы, у которой ее фазовые средние характеристики совпадают с временными.

ками (границами бильярдной области) эргодичен на связных множествах уровня энергии [20]. Следует уточнить, что эргодичность означает свойство, при котором почти каждая фазовая траектория проводит в каждой измеримой части множества уровня время, пропорциональное мере этой части [21, с. 277].

Исследования Биркгофа, Колмогорова и других авторов показали, что имеют место системы, для которых определяющую роль в их поведении играет лишь интеграл энергии. Такие системы и являются *эргодическими*.

Бильярды и энтропия. Бильярдные задачи содержались в исследованиях *А.Н. Колмогорова* (1903–1987). В своих записях от 22 сентября 1958 г. он определил темы работ, которые планировались им распределить между своими учениками [8, с. 94].

Возможность математически строгого подхода к бильярдным задачам появилась после публикации в 1958 г. работы Колмогорова [22]. В этой работе он ввел в эргодическую теорию фундаментальные понятия *энтропии* данной системы и понятие *K-системы* (динамической системы с "хорошими" статистическими свойствами) [8].

Рассмотрим отдельные виды бильярдov, классифицируемых в зависимости от их структурных свойств.

Рассеивающие бильярды. Во второй половине XX в. появилась эргодическая теория *рассеивающих* (или *гиперболических*) *бильярдov* (*Я.Г. Синай* [20]). К ним относятся бильярды, у которых граница составлена из конечного числа C^3 -гладких компонентов, строго вогнутых внутрь области Q . В таких бильярдах имеет место гиперболический характер движения бильярдной точки, а показатели Ляпунова – ненулевые, почти всюду в фазовом пространстве [8, с. 93]. Для такого рода бильярдov граница Γ , взятая в качестве зеркала, рассеивает (делает расходящимся) узкий пучок параллельных лучей света, падающий на нее из области Q . Такие бильярдные системы теряют свойства гладкости (и даже непрерывности) в некоторых точках фазового пространства.

Примером такой системы является сферическая молекула, движущаяся на торе или на квадрате, при упругих отражениях от других закрепленных сферических молекул. *В.И. Арнольд* (1937–2010) принадлежит наглядное представление аналогии между данными бильярдами и геодезическими потоками в про-

странствах отрицательной кривизны. Рассеивающую функцию отрицательной кривизны в такого рода системах выполняет край (граница Γ) бильярдной области Q , выпуклый внутрь нее.

Арнольд рассматривает задачу о движении бильярдной точки по *торическому бильярду* с круглой стенкой, находящейся в середине данной области, от которой бильярдная точка упруго отражается. Движение на этом бильярде можно рассматривать как определенный случай *геодезического потока* на гладкой поверхности. Эту поверхность можно образовать гипотетически, рассматривая тор с отверстием как двустороннюю поверхность, которой следует придать определенную толщину, сгладив ее острое ребро. В результате образуется поверхность с топологией сферы, имеющей две ручки. При "раздувании" этого тора с отверстием возникает поверхность отрицательной кривизны. Таким образом, движение в *торическом бильярде* можно представить как *предельный случай* движения бильярдной точки по геодезическим на поверхности отрицательной кривизны [21, с. 278].

В 1970 г. появилась работа *Я.Г. Синай* [20] (рис. 2), ставшая основополагающей в исследованиях свойств бильярдov [8, с. 95]. Она содержала первое доказательство основной теоремы, относящейся к рассеивающим бильярдам. В этой работе рассматриваются динамические системы, порожденные движением бильярдной точки в областях со строго выпуклым внутрь краем – в таких, что оператор

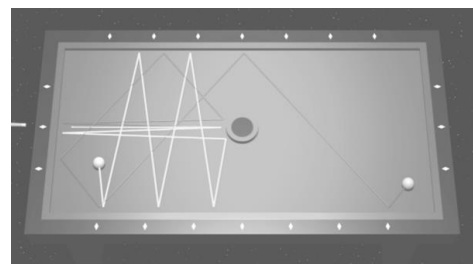


Рис. 2. Пример бильярда Синай

второй квадратичной формы в каждой точке границы области отрицательно определенный, если считать ее край оснащенным полем внутренних нормалей. Было установлено, что такие динамические системы *эргодичны*.

Синаем было установлено, что для рассеивающего бильярда имеет место экспоненциальная неустойчивость бильярдных траекторий: движение бильярдного шара с

течением времени приобретает хаотический характер. Этим было строго опровергнуто принятое ранее утверждение о существовании признаков хаотического движения механических систем лишь при наличии у них большого числа степеней свободы [8].

Данный вид билиардов является *дискретным аналогом* гладких гиперболических систем, определенным в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Интегрируемые билиарды. Как известно, системы уравнений динамики разде-

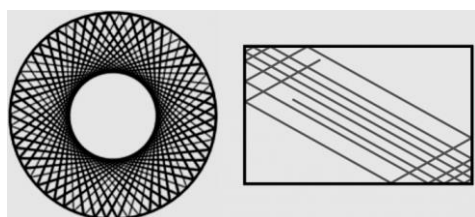


Рис. 3. Траектории движения шара в интегрируемом билиарде

ляются на интегрируемые и неинтегрируемые. Интегрируемые динамические системы обладают достаточным числом независимых первых интегралов. Например, согласно классической теореме Буря–Лиувилля, для интегрируемости гамильтоновой системы с n степенями свободы в квадратурах достаточно знать n первых интегралов, попарно находящихся в инволюции [21, с. 235]. В силу этого можно выделить *интегрируемые билиардные системы*, обладающие полным набором независимых интегралов. На рис. 3 изображен пример траекторий в интегрируемом билиарде, а на рис. 4 — его аналог.

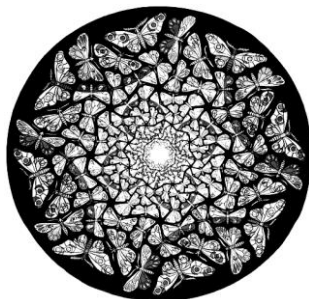


Рис. 4. Картина Эшера — аналог интегрируемого билиарда

Одним из простейших интегрируемых билиардов является *билиард Понселе* [23]. Согласно теореме Ж.В. Понселе (1788–1867), если билиардная точка движется в области с эллиптической границей, а ее прямолинейная траектория касается другого эллипса, то эта траектория замкнута, а сам билиард априори

обладает полным квадратичным интегралом (рис. 5).

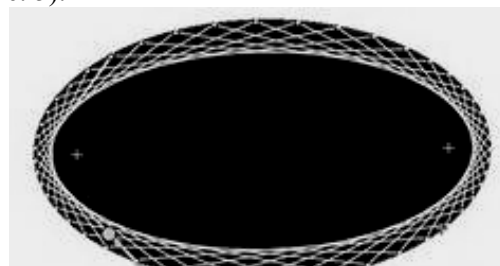


Рис. 5. Траектории эллиптического билиарда

В 2010 г. вышла книга [23], посвященная классической теореме Понселе, обобщениям и применениям положений концепции математических билиардов. В ней рассматриваются задачи об интегрируемых билиардах в области, находящейся на стыке проективной, алгебраической геометрий, теории эллиптических функций и гиперэллиптических кривых. Приведено описание множества интегрируемых билиардов, в том числе и многомерных.

Здесь же во взаимосвязи с динамикой математических билиардов приводятся различные конструкции дифференциальной геометрии, относящиеся к исследованиям Кейли, Понселе, Дарбу. Представлены новые интегрируемые возмущения билиардов.

Авторами указаны взаимосвязи между интегрируемыми билиардами и задачами из других областей физики и математики — с квантовым уравнением Янга-Бакстера, моделью Гейзенберга, а также геометрией пучков квадратик и гиперэллиптических якобианов. В частности, приводится описание решения проблемы аналитического представления траекторий периодических билиардов в квадратах. Рассмотрены поризмы Понселе, теорема Понселе и примеры интегрируемых билиардов [15, с. 449–450].

Существует и другое определение интегрируемости билиарда. Билиард называется *интегрируемым по Биркгофу*, если для него имеется $n - 1$ полиномиальных по скорости интегралов, находящихся попарно в инволюции и почти всюду независимых [19].

Как было отмечено, традиционный билиард не является интегрируемым [14]. Интегрируемые билиардные системы — редкое исключение среди всего возможного множества билиардов вследствие сложного характера поведения фазовых траекторий типичных билиардов. В общем случае эти траектории

не умещаются на поверхности уровня интегралов, независимых от интеграла энергии.

Можно привести ряд примеров интегрируемых бильярдных систем: геодезические потоки на гладких поверхностях вращения; геодезический поток на трехосном эллипсоиде; бильярд внутри эллипса; система трех точечных вихрей двумерной гидродинамики идеальной жидкости; бильярды в аффинных камерах Вейля. В частности, было показано, что интеграл бильярда с границей Γ является интегралом геодезического потока на Γ . Справедливо и обратное утверждение.

В последнее время были найдены новые примеры интегрируемых бильярдных систем: гармонический осциллятор, находящийся внутри эллипса; бильярды на поверхностях постоянной кривизны. Много новых примеров было открыто путем применения *метода обратной задачи теории рассеяния* [24].

Бильярд Биркгофа. Образцом типичного (по [14]) бильярда является *бильярд Биркгофа*, для которого сформулирована задача Биркгофа о *выпуклом бильярде*. Для этого бильярда граница Γ – замкнутая выпуклая кривая, заданная на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Биркгоф доказал [19], что у гладкого выпуклого бильярда существуют периодические траектории любой наперед заданной длины, а также хаотические движения.

Биркгофу принадлежит интерпретация бильярда как диффеоморфизма кольца на себя. Он рассматривал бильярды как предел задачи о геодезических кривых выпуклой поверхности, непрерывно деформирующейся в плоскую область.

Впоследствии было построено *трехмерное обобщение* бильярда Биркгофа, которое выглядит следующим образом. Пусть Q – заданная односвязная область трехмерного пространства и гладкая поверхность Γ – ее граница, являющаяся изнутри зеркальной. Траектория луча света внутри области Q подчиняется закону идеально зеркального отражения. Полученная таким образом динамическая система и является указанным обобщением.

Аналогичным образом можно определить обобщенные бильярды и более высокой размерности как в евклидовом, так и в неевклидовых пространствах.

Бильярды и статистические законы. Появление бильярдных моделей создало новые предпосылки к пересмотру исторически

старой фундаментальной проблемы – возникновению *статистических законов* для консервативных динамических систем, следующих из законов классической динамики. Дж. Лейбовиц, О. Пенроуз, Дж. Форд освещали результаты исследований по бильярдным системам, получившим впоследствии известность среди физиков и биологов [8].

В работах *П.С. Лапласа* (1749–1827) была выдвинута гипотеза о том, что динамические системы классической механики не обладают статистическими свойствами. Эта гипотеза была основана на положении о том, что движения таких систем однозначно определены в силу априорного характера задания начальных условий [20]. Однако для всякой динамической системы реальное значение имеет движение ячейки фазового пространства, в которой точки перемещаются согласно заданным уравнениям движения. Законы движения таких ячеек могут иметь характер, отличный от характера движения их отдельных точек [8].

Примечательно, что даже в простых консервативных системах ячейки фазового пространства, имевшие первоначально правильную форму, впоследствии деформируются и размещаются сложным образом. Это явление может рассматриваться как свойство необратимости динамических систем классической механики. Идея о такой необратимости была впервые предложена *Н.С. Крыловым* (1917–1947) в 40-х годах прошлого века [25].

Отмечается, что необратимость подобного рода имеет место даже у систем с небольшим числом степеней свободы, а не только у многостепенных систем, как считалось ранее [20].

Характер движения отдельной ячейки фазового пространства, соответствующей динамической системе, связан со свойством устойчивости, а деформация самой ячейки обусловлена неустойчивостью. В силу необратимости и соответствующие статистические свойства системы связаны также с неустойчивостью движения. Это характерное явление отмечалось в 1963 г. *М. Борном* (1882–1970) [26], а также в книге Крылова [25]. Однако, как утверждает в статье [27], подход Крылова приемлем на физическом уровне логической строгости, но он не вполне убедителен с точки зрения математики.

Двойственные бильярды. В конце 1950-х годов *Дж. фон Нейманом* (1903–1957) в концепцию математического бильярда бы-

ло введено понятие *двойственного* (или *внешнего*) *бильярда*. Впоследствии этот вид бильярда стал популяризовать Юрген Курт Мозер (1928–1999).

Существование периодических траекторий для двойственного бильярда в многоугольной бильiardной области было доказано в 2007 г. С.Л. Табачниковым в работе [28]. Эта работа содержит изложение доказательства, ранее полученного К. Калтером. Другая задача для данного бильярда содержит доказательство полиномиальности [29]. Помимо этого было доказано, что двойственное бильiardное отображение является симплектическим [18, с. 163].

Построена наглядная интерпретационная модель двойственной бильiardной системы как механической системы – *одномерного импульсного осциллятора*. Эта механическая система изоморфна двойственному бильiardу относительно некоторой заданной замкнутой выпуклой кривой, параметризованной характерным углом. Этот угол образован касательной к данной кривой в ее текущей точке [18, 30]. Данная интерпретация сходна с известной моделью, построенной на аналогии между движением точки по заданной окружности и движением ее проекции на фиксированную прямую, расположенную вне окружности.

Было установлено, что орбиты двойственного бильiardа относительно полукруга уходят в бесконечность [31].

В 2009 г. вышла книга Р. Шварца [32], посвященная подробному анализу двойственного бильiardа относительно четырехугольников, диагональ которых является осью симметрии. Для таких бильiardов также имеют место орбиты, уходящие в бесконечность, однако характер их ухода гораздо сложнее, чем для полукруга.

Статья Шварца [33] содержит анализ двойственного бильiardа относительно октагональной бильiardной области. Полученные им результаты по характеру свойств аналогичны результатам, найденным ранее для пентагональной области Табачниковым [18].

Бильiardы внутри квадратичных поверхностей. Серия работ, опубликованных В. Драговичем и М. Раднович за 1998–2006 гг., посвящена бильiardам внутри квадратичных поверхностей и геодезическим на этих поверхностях [34–37]. Содержание данных работ отражено в книге [23].

Эти авторы получили условия, при которых бильiardные траектории замкнуты. Ранее такие условия в случаях выполнения

теоремы Понселе были найдены А. Кэли (1821–1895). Результаты исследований по этой же теме представлены в работах Б. Хесина и Табачникова [18, 38, 39].

В работе [40] (2010) обсуждается полная интегрируемость бильiardной системы на контактных многообразиях. При этом в статье [38] предлагается вариант теоремы Понселе для светоподобных геодезических на эллипсоиде, находящемся в пространстве Г. Минковского (1864–1909).

Хаотические бильiardы. В классическом бильiardе движение бильiardной точки подчинено законам геометрической оптики. Однако в композитных оптических средах лучи света, проходя через внутренние границы раздела оптически разнородных сред, на их границах отражаются и преломляются [41]. Эти особенности порождают механизмы хаотизации в бильiardных системах, названных *композитными бильiardами* [42].

В таких системах при расщеплении лучей света на границе раздела оптических сред с разными показателями преломления возникает неоднозначность в образовании направлений бильiardных траекторий. В результате проявляются детерминированные периодические, квазипериодические или хаотические законы движения световых лучей.

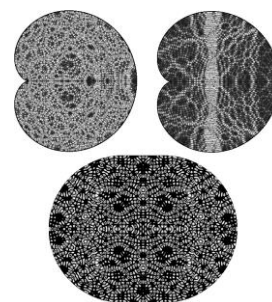


Рис. 6

Таких хаотических законов движения существует *континуум*. При этом траектории бильiardов хаотически переходят с одного листа многолистного фазового пространства на другой его лист. Такая хаотичность изначально заложена в любом бильiardе с расщеплением лучей [42]. На рис. 6 изображены траектории *хаотического квантового бильiardа* в областях – стадион и улитка Паскаля.

Примером такого рода хаотического бильiardа является асимметричный кольцевой бильiard, образованный двумя эксцентрическими кругами (границами Γ_1 , Γ_2 круго-

вой бильiardной области Q) с разными показателями преломления световых лучей (внешним и внутренним). При этом один из кругов находится целиком внутри другого.

В работе [41] рассмотрена динамика световых лучей в таком композитном (*хаотическом*) бильiardе. Эта бильiardная схема является асимметричным обобщением плоской схемы симметричного кольцевого бильiardа с концентрическими стенками-кругами, рассмотренными в статье [42].

Обобщенные бильiardы. Бильiardная модель, непрерывно развиваясь, принимает более абстрактные формы, соответствующие возникающим более общим задачам математики и смежных с ней наук. Обобщаются основные понятия и базовые элементы бильiardной модели. Так, было введено понятие *обобщенной бильiardной области* [43].

Простейшей элементарной (или составной элементарной) плоской областью Q называется двумерное связное компактное плоское гладкое риманово многообразие с кусочно-гладким краем, имеющее (или не имеющее) изометричное вложение в плоскость.

На основе этого определения получен ряд оригинальных результатов изысканий.

В настоящее время интенсивно проводятся исследования свойств бильiardов с медленно изменяющимися параметрами. Рассматривается динамика в медленно вращающихся прямоугольном и эллиптическом бильiardах с медленно изменяющимися границами. Эти системы близки к интегрируемым и для их исследования могут применяться методы теории возмущений. В данных системах имеют место резонансные явления – захват в резонанс и рассеяние на резонансе. При исследовании этих явлений используются методы, разработанные в теории гладких гамильтоновых систем с быстрыми и медленными переменными.

Применение обобщенных бильiardов в динамике твердого тела. В 2015 г. вышла статья [44], посвященная *обобщенному бильiardу*, движение при котором происходит на локально плоской поверхности. В ней показано, что известные интегрируемые случаи системы уравнений динамики твердого тела и гиростата в задаче о движении вокруг неподвижного полюса, а также при движении в неограниченной идеальной жидкости, при определенном выборе значений их параметров моделируются *обобщенными локально*

плоскими интегрируемыми бильiardами. Это относится к соответствующим уровням интегралов.

В работе отмечены случаи интегрируемости, являющиеся по Лиувиллю эквивалентными обобщенным бильiardам с областями, ограниченными дугами софокусных квадрик. Этими случаями являются случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина – для классического твердого тела и случаи Сретенского, Ковалевской-Яхьи, Клебша и Соколова – для гиростата и для твердого тела, движущегося в жидкости.

Другим примером применения бильiardной модели к динамическим задачам твердого тела является задача о динамике связки двух тел, движущейся на орбите [45].

Заключение

В настоящее время концепция математических бильiardов является неотъемлемой частью бурно и динамично развивающихся областей математического знания и, в частности, теории динамических систем, возможности развития которой непрерывно расширяются. Ее развитие обусловлено естественным общим развитием многих современных разделов математических и смежных с ними наук.

Методы исследования свойств математических бильiardов, с одной стороны, примыкают к классической геометрии, а с другой – находятся на стыке отраслей современной математики и механики: теории чисел, топологии, эргодической теории и теоретической механики. Это – многократно апробированная эффективная модель для исследования эргодичности и эффекта перемешивания в гамильтоновых системах. Вместе с тем, исследование свойств бильiardных систем актуально как для самой математики, так и для смежных с ней отраслей знания и их приложений.

Настоящий обзор представляет в кратком виде ретроспективный взгляд на отдельные моменты исторического развития концепции математических бильiardов и не претендует на полноту изложения ввиду обширности данной темы.

Список литературы

1. Брокгауз Ф.А., Ефрон И.А. (издатели). Энциклопедический словарь. В 86 т. СПб.: Семеновская Типолитография 1890–1907. Т. III А (6). 1892. С. 864–865.

2. Coriolis G. Theorie mathematique des effets du jeu de billiard. Paris, 1835.
3. Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. М.: Гостехиздат, 1956. 235 с.
4. Resal H. Sur un point de la theorie mathematique des effets du jeu de billard // Comp-tes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences. 1882. Т. 94. P. 1548–1551.
5. Resal H. Du choc de deux billes posees sur un tapis de billard // Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences. 1882. Т. 95. P. 655–659.
6. Resal H. Commentaire a la theorie mathematique du jeu de billard // Journal des mathematiques pures et appliques. 1883. Т.9. P. 65–98.
7. Резаль А. Комментарии к математической теории явлений бильярдной игры // ИВУЗ. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 2. С. 415–438.
8. Мухин Р.Р. Из истории гамильтонова хаоса: бильярды // ИВУЗ. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 86–98.
9. Darboux G. Cours de mecanique. Paris, 1884. Т. 2. P. 547–581.
10. Дарбу Г. Геометрическое исследование ударов и столкновений тел // ИВУЗ. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 2. С. 387–413.
11. Hemming G.W. Billiards mathematically treated / ed. McMillan, Londres, Grande-Bretange. 1899. 45 p.
12. Appell P. Sur le mouvement d'une bille de billard avec frottement de roulement // Journal des mathematiques pures et appliques. Ser. 6. 1911. Т. 7. P. 85–96.
13. Petit R. Billiard: theorie du jeu / ed. Chiron. Paris, 1996.
14. Козлов В.В., Трещев Д.В. Бильярды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
15. Обзор. Проблемы теории удара. Бильярды // ИВУЗ. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 2. С. 371–372.
16. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 406 с.
17. Болотин С.В. Интегрируемые бильярды Биркгофа // Вестник Московского ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 1990. № 2. С. 33–36.
18. Табачников С.Л. Геометрия и бильярды. М.; Ижевск: НИЦ Ин-т компьютерных исследований, 2011. 182 с.
19. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. Ижевск: Издательский дом "Удмурдский ун-т", 1999. 408 с.
20. Синай Я.Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдных // Успехи математических наук. 1970. Т. 25, вып. 2 (152). С. 141–192.
21. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
22. Колмогоров А.Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // Доклады Академии наук СССР. 1958. Т. 119, № 5. С. 861–864.
23. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадратики и многомерные поризмы Понселе. М.; Ижевск: НИЦ Ин-т компьютерных исследований. 2010. 338 с.
24. Теория солитонов. Метод обратной задачи: сб. статей. М.: Наука, 1980. 319 с.
25. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1950. 208 с.
26. Борн М. Физика в жизни моего поколения. М.: Изд-во иностранной лит., 1963. 536 с.
27. Синай Я.Г. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // Доклады Академии наук СССР. 1963. Т. 153, № 6. С. 1261–1264.
28. Tabachnikov S. A proof of Culter's theorem on the existence of periodic orbits in polygonal outer billiards // Geometry Dedicata. 2007. Vol. 129. P. 83–87.
29. Tabachnikov S. Complexity of piecewise convex transformations in two dimensions, with applications to polygonal billiards // Moscow Mathematical Journal. 2006. Vol. 6. P. 673–701.
30. Табачников С. Внешние бильярды // Успехи математических наук. 1993. Т. 48, вып. 6 (294).
31. Dolgopyat D., Fayad B. Unbounded orbits for semicircular outer billiard // Annals Henri Poincare. 2009. Vol. 10. P. 357–375.
32. Schwartz R. Outer billiards on kites. Annals of Mathematics Studies / Princeton University Press. Princeton, 2009.

33. Schwartz R. Outer billiards, arithmetic graphs, and the octagon. Preprint arxiv: 1006.2782.
34. Dragovic V., Radnovic M. Conditions of Cayley's type for ellipsoidal billiard // Journal Mathematical and Physical. 1998. Vol. 39. P. 355–362.
35. Dragovic V., Radnovic M. On periodical trajectories of the billiard systems within an ellipsoid in $\mathbf{R}^d$ and generalized Cayley's condition // Journal Mathematical. 1998. Vol. 39. P. 5866–5869.
36. Dragovic V., Radnovic M. Cayley-type conditions for billiards within k quadrics in $\mathbf{R}^d$ // Journal Physical. 2004. Vol. 37. P. 1269–1276.
37. Dragovic V., Radnovic M. Geometry of integrable billiards and pencils of quadrics // Journal Mathematical Pures and Appliques. 2006. Vol. 85. № 9. P. 758–790.
38. Genin D., Khesin B., Tabachnikov S. Geodesics on an ellipsoid in Minkowski space // Enseign. Mathematical. 2007. Vol. 53. P. 307–331.
39. Khesin B., Tabachnikov S. Pseudo-Riemannian geodesics and billiards // Adv. Mathematical. 2009. Vol. 221. P. 1364–1396.
40. Khesin B., Tabachnikov S. Contact complete integrability // Regular Chaotic Dynamics. 2010. № 15. P. 504–520.
41. Яновский В.В. и др. Хаотические режимы асимметричного кольцевого бильярда с отражением и преломлением лучей // ИВУЗ. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 1. С. 42–60.
42. Барьяхтар В.Г. и др. Хаос в композитных бильярдах // ЖЭТФ. 2006. Т. 130, № 2(8). С. 335.
43. Фокичева В.В. Топологическая классификация интегрируемых бильярд: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МГУ. 2016.
44. Фокичева В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465, № 2. С. 150–153.
45. Белецкий В.В., Панкова Д.В. Связка двух тел на орбите как динамический бильярд: препринт // Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 1995. № 7. 32 с.

From the history of the development of the conception of mathematical billiards (genesis, dynamic manifold, applications)

N. N. Makeyev

Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences
24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

The historical aspect of the development of the billiard model of dynamic systems, the types of his model, as well as some of its applications are considered.

Keywords: *Mathematical billiards; the theory of dynamical systems; ergodicity; integrability; history of mathematics.*