

УДК 519.71; 51-76

О простых математических моделях роста культурных растений

В. Л. Чечулин

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
chchulinvl@mail.ru; 8-(342)-2-396-424

Описаны простые "интегральные" модели роста культурных однолетних растений, полученные по экспериментальным данным, представляющие собой выражения для типовых динамических звеньев первого порядка. Эти модели, пригодные для выражения параметров роста растения в "интегральной" форме, являются гораздо более простыми, нежели модели, применявшиеся для моделирования процессов роста с конца 1960-х гг. и построенные для исходных данных, выражаемых в "дифференциальной" форме. Простота описанных математических моделей роста растений упрощает интерпретацию их параметров применительно к влиянию генотипа и внешних условий на рост растения.

Ключевые слова: "интегральные" модели роста растений; типовые динамические звенья первого порядка; аperiodическое звено; интегрирующее звено; звено запаздывания; интерпретация модели роста растений; функции роста урожая и прочей биомассы.

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-1-46-50

Предисловие

Необходимость математического моделирования роста растений связана с земледелием двояко: с одной стороны – для обеспечения текущих потребностей агротехнологии выращивания культурных растений (продуктов питания), с другой стороны – для селекционной работы по выведению новых, более продуктивных и более приспособленных к внешним условиям сортов растений. Понятно, что широта (в отличие от узкоспециализированности) применения математических моделей обеспечивается их простотой и простотой интерпретации их параметров. Ниже описаны достаточно простые модели роста однолетних растений, использующие аппарат классической теории автоматического управления.

1. "Дифференциальный" подход к моделям

Исторически сложилось так, что математические модели роста растений рассматривались как модели скорости роста биомассы, например: "для свободно растущего рас-

тения две функции возраста $A_j(t)$ – количество средств существования j -го типа и $V(t)$ – скорость роста биомассы свободно растущего растения возраста t " [1, с. 715]¹, где $V(t)$ может быть вектором, учитывающим рост биомассы отдельных органов растения (корней, листьев, стеблей, плодов и т. п.). В такой "дифференциальной" форме модель представляла собой систему дифференциальных уравнений, и если в модель вводилось управление (для получения максимальных урожаев), то оно, соответственно принципу максимума Понтрягина, давало решение на границах допустимой области управлений: максимум допустимой освещенности, максимум допустимого полива, максимум допустимых доз минеральных удобрений² и т. п. Однако не всеми параметрами можно управлять, особенно это касается климатических параметров, и задача селекции – получение сортов, продуктивных как раз в неоптимальных условиях роста растения (эта общая

¹ См. также [7], [2].

² С этим связано целое направление селекционной работы – получение сортов, максимально отзывчивых на удобрения [3].

задача практически неизменна за всю историю селекции [15]).

Проблемы получения математических моделей роста растений отмечались как в 1980–1990-е гг.: "В настоящее время <1990-е гг.> одним из главных препятствий на пути целенаправленного создания агрохимически эффективных сортов является отсутствие моделей как концептуального уровня, так и основанных на экспериментальных данных" [3, с. 302], – так и в недавнем прошлом: "необходимо отметить заметный скепсис ученых-физиологов по поводу возможностей современных математических дисциплин при моделировании продукционных, в том числе и ростовых процессов" [6, с. 103].

Одним из препятствий построения математических моделей роста растений является как раз "дифференциальная" форма модели, затрудняющая интерпретацию и идентификацию параметров модели. "Эмпирические параметры <дифференциальных> уравнений также несут на себе отпечаток случайности и не могут с большой степенью достоверности использоваться для прогнозирования темпов роста растений и формирования урожая" [6, с. 103].

Пример одной из "дифференциальных" моделей роста растений, многократно проверенный на экспериментальных данных приведен ниже.

2. Пример модели и данных

Информационная структура математической модели роста картофеля [11] показана на рис. 1.

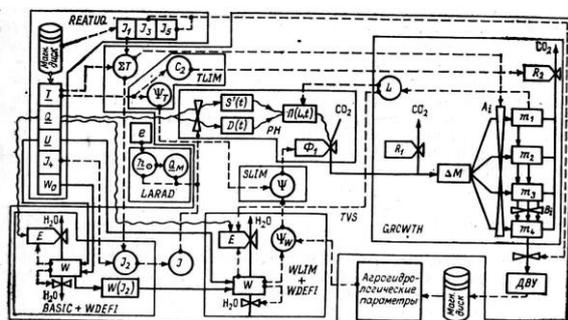


Рис. 1. Структура модели роста картофеля, по [11, с. 86]

Однако ключевым для модели является представление данных в этой модели, пример эмпирических данных и модельного приближения приведен на рис. 2 в виде относитель-

ной биомассы органов растения, приведенной в каждый момент роста к 1, показывающей в "дифференциальном" виде скорость роста отдельных органов растения.³

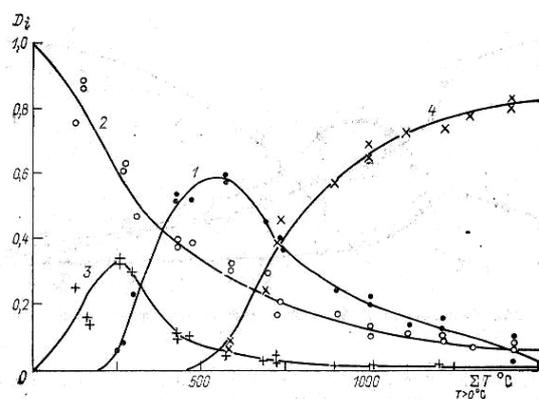


Рис. 2. Данные и результат моделирования для картофеля сорта Белорусский ранний, относительные биомассы: 1 – листья, 2 – стебли, 3 – корни, 4 – клубни, по [11, с. 86] (по горизонтали – сумма средних температур за день, больших 0°C)

Значительная нелинейность функций роста, представленных на рис. 2, затрудняет их сопоставление с действительными процессами роста растения. Если же данные рис. 2 проинтегрировать и привести к виду перенормированному к 1 относительно накопленной к концу роста (сбору урожая) биомассе, то получается простая картина (см. рис. 3, 4).

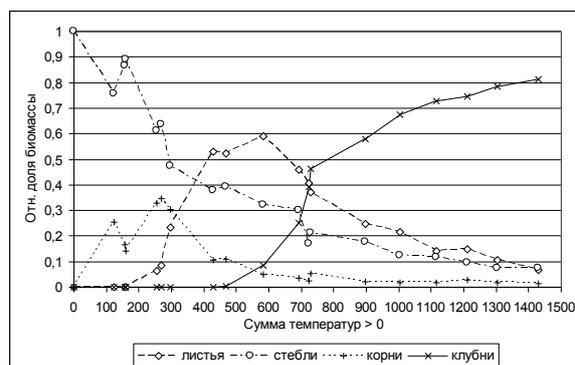


Рис. 3. Экспериментальные данные из рис. 2, [11, с. 86], "дифференциальная" форма

³ О функциях роста в аналогичной форме см. также [12, с. 67].

Более современные модели, хотя и отображали результаты в "интегральной" форме [8, с. 330, рис. 7.4], но для моделей использовали функции роста в дифференциальной форме [8, с. 299–300], см. также п. 2.

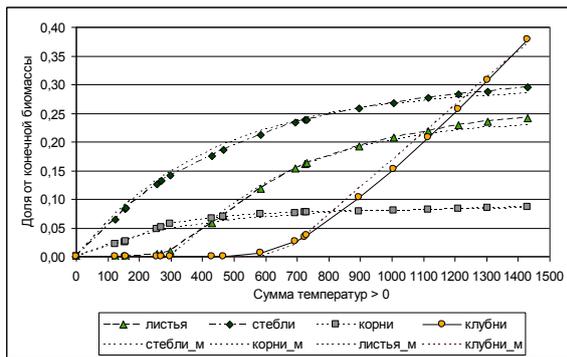


Рис. 4. Проинтегрированные данные из рис. 2, 3, "интегральная" форма, относительно конечной биомассы, принятой за 1

Кривые на рис. 4 содержательно понятны относительно предметной области (накопления органами растением биомассы), и, кроме того, по теории автоматического управления кривые на рис. 4 хорошо приближаемы функциями реакции на единичное воздействие типовых динамических звеньев (1–2-го порядка) и их комбинаций. О том, почему содержательно допустимо такое приближение, сказано ниже.

4. Модель растения как конечная система

Хотя в фундаментальном смысле геномом (и вообще наследственностью) не определяются полностью свойства живого организма (в частности свойство быть живым)⁴, для прикладных целей, в том плане, что имеется дело с живыми организмами в благоприятной для них среде, с определенным набором протекающих в них и между ними и окружающей средой процессов, в первом приближении модель растения выглядит как конечная система, описываемая приближенно некоторой совокупностью линейных звеньев порядка не выше 2. В этой модели генотип и окружающая среда рассматриваются неразрывно, соответственно высказанным еще в середине XX в., и многократно проверенным к нач. XXI положением биологической науки⁵. Таким образом, взгляд на рост растения

⁴ [14, с. 62–63, §42 "Ограничения биологических моделей"]

⁵ Еще в середине XX в. советскими биологами указывалось, что "Организм и необходимые для его жизни условия представляют единство. <...> Наследственность есть свойство живого тела требовать определенных условий жизни для своей жиз-

как на определенный и генотипом и средой некий переходный процесс от начального до конечного состояния (с перенормировкой по конечному состоянию) позволяет усматривать в этом процессе некие достаточно простые закономерности.

5. Модель роста как конечный набор звеньев

В простой модели роста растения его рост рассматривается как реакция на единичное воздействие (функцию $1(t)$), соответствующее моменту времени t_0 – посеву семени в почву (при благоприятных для роста внешних условиях). Тогда рост органов растения как реакция на это воздействие есть комбинация функций типовых звеньев: запаздывающего звена, апериодического звена, интегрирующего звена (см. [9], [4]). Тогда для "интегральных" данных приведенных на рис. 4 функции модели роста картофеля (см. рис. 2–4) таковы, как указано в таблице: листья – апериодическое звено с запаздыванием; стебли – апериодическое звено; корни – апериодическое звено; клубни – интегрирующее звено с запаздыванием. (На рис. 2–4 физическое время заменено на "биологическое" – сумму температур, что не меняет вида закономерностей; условное время обозначено за t).

Кроме того, имеется общий коэффициент модели k_0 , переводящий относительные величины рис. 4 и таблицы (h_1 – h_4) в конечную (на сбор урожая) биомассу в ц/га.

По рис. 4 и таблице легко видеть, что запаздывание роста клубней примерно равно двойному запаздыванию роста листьев, относительно начала роста, $\tau_4 \approx 2\tau_1$. Постоянные

ни, своего развития и определенно реагировать на те или иные условия" [5]. К концу XX – нач. XXI в. единство в жизни растения генотипа и условий среды было опытно подтверждено, вплоть до влияния среды на генотип, а именно была "показана способность растений пшеницы (а может быть и всего класса эукариот) к переопределению генетических формул сорта под влиянием обеспеченности элементами питания и другими факторами среды, как <...> механизм неспецифической природы" [3, с. 296], необходимый для сохранения вида. И, ближе к современности, установлено, что "изменение определенных условий окружающей среды приводит к изменению локализации <в геноме> QTL (хозяйственно-ценных признаков), вовлеченных в реализацию некоторых признаков <у яровой мягкой пшеницы>" [13, с. 65].

времени (T_1-T_3) роста служебных органов (не урожая) приближенно равны.

Функции модели
для отдельных органов

Орган	Формула реакции на $l(t)$	Параметры*
Листья	$h_1(t) = 1(\tau_1) \cdot k_1(1 - \exp(-t/\tau_1)/T_1)$	$k_1=0,229; T_1=370;$ $\tau_1=320$
Стебли	$h_2(t) = 1(0) \cdot k_2(1 - \exp(-t/T_2))$	$k_2=0,284; T_2=420$
Корни	$h_3(t) = 1(0) \cdot k_3(1 - \exp(-t/T_3))$	$k_3=0,084; T_3=370$
Клубни	$h_4(t) = 1(\tau_4) \cdot k_4(t - \tau_4)/T_4$	$k_4=0,371;$ $T_4=2100; \tau_4=650$

* k_i – безразмерны, T_i, τ_i – в условных единицах биологического времени, для данных рис. 2–4 – сумма дневных температур, больших 0

Какие параметры столбца 3 таблицы, и в какой мере определяются генотипом и условиями роста – подлежит отдельному опытному определению для конкретных сортов растений⁶.

Модель позволяет определить особенности роста урожая, в отличие от роста других органов: *рост урожая описывается интегральным звеном с запаздыванием.*

6. Примеры приложения модели

Примеры интерпретации модели приведены по оцифрованным интегрированным с перенормировкой данным. Для ячменя получается следующая картина (рис. 5): – "дифференциальные" данные (из [10]), понимание затруднено; рис. 6 – проинтегрированные данные, интерпретация аналогична таковой в п. 5.

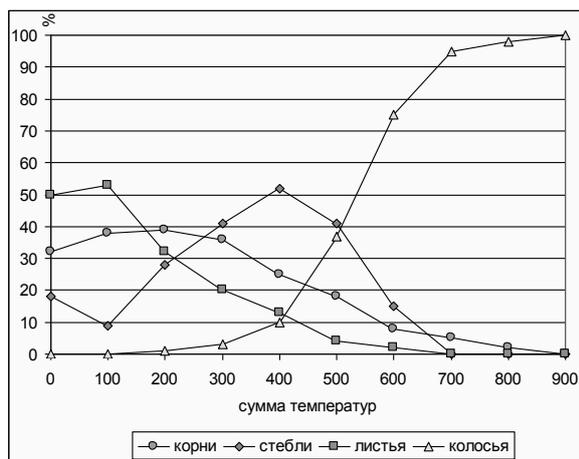


Рис. 5. Функции текущей приведенной к 1 биомассы для ячменя, по [10]

⁶ Параметры, связанные со временем, определяются преимущественно генотипом, а с амплитудой – условиями роста.

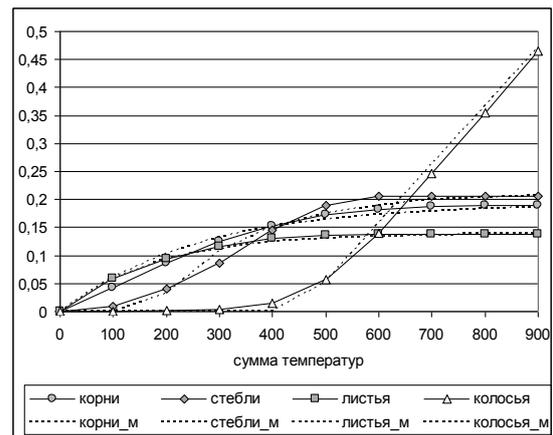


Рис. 6. Функции модели для ячменя, по рис. 5, см. п. 5

Для ячменя, как и для картофеля, по модели (рис. 6) легко различимы функции роста служебных органов и урожая (колосьев); для пшеницы получается несколько иной результат, – к функции роста урожая относится не только рост колосьев, но и стеблей (т. е. пшеница, кроме зерна, на урожай, как на результат интегрального роста биомассы, дает и солому), см. рис. 7.

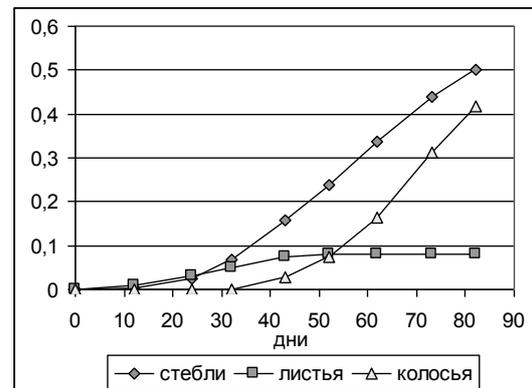


Рис. 6. Приближенные функции роста для пшеницы, к итоговой биомассе, по проинтегрированными и перенормированным данным из [10]

Заключение

Таким образом, с использованием интегральных данных, приведенных к общей биомассе растения на конец роста, посредством стандартных средств теории автоматического управления (функций реакций основных передаточных звеньев на единичное воздействие), построены простые модели роста культурных растений, допускающие ясную качественную интерпретацию, и требующие дальнейшего определения количественных параметров.

Список литературы

1. *Галицкий В.В., Комаров А.С.* О моделировании роста растений // Известия Академии наук СССР. Серия биологическая. 1979. № 5. С. 714–723.
2. *Галицкий В. В.* Моделирование сообщества растений: индивидуально-ориентированный подход. I. Модель растения // Известия Российской академии наук. Серия биологическая. 1999. № 5. С. 539–546.
3. *Гамзикова О.И.* Генетическая отзывчивость пшеницы на условия минерального питания // Гамзикова О.И. Этюды по физиологии, агрохимии и генетике минерального питания растений / ред. акад. РАСХН Г.П. Гамзиков. РАСХН Сиб. отд. Новосибирск: ИПФ "Агрос", 2008. С. 277–304.
4. *Лукас В.А.* Теория автоматического управления. М.: Недра, 1990. 416 с.
5. *Лысенко Т.Д.* О положении в биологической науке. Доклад на сессии Академии сельскохозяйственных наук им. В.И. Ленина // Агробиология. 1948. № 5. С. 7–43.
6. *Михайленко И.М.* Математическое моделирование роста растений на основе экспериментальных данных // Сельскохозяйственная биология. 2007. № 1. С. 103–111.
7. *Моделирование* роста и продуктивности сельскохозяйственных культур / ред. Ф.В.Т. Пеннинг, де Фриз, Х.Х. ван Лар. Л.: Гидрометеиздат, 1986.
8. *Полуэктов Р.А., Смоляр Э.И., Терлеев В.В., Топаж А.Г.* Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. СПб.: Изд-во С-Петербур. ун-та, 2006. 396 с.
9. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1989. 304 с.
10. *Самохвалова Е.В.* Биологические функции и моделирование продукционного процесса зерновых культур в условиях Самарской области // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2011. Т. 13, № 1. С. 241–246.
11. *Септ Ю.В., Тооминг Х.Г.* Ресурсы продуктивности картофеля. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 262 с.
12. *Тооминг Х.Г.* Экологические принципы максимальной продуктивности посевов. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 264 с.
13. *Чесноков Ю.В., Мирская Г.В., Канаиш Е.В. и др.* Картирование QTL у яровой мягкой пшеницы (*Triticum aestivum* L.) в контролируемых условиях агроэкобиополигона // Физиология растений. 2017. Т. 64, № 1. С. 55–68.
14. *Чечулин В.Л.* Теория множеств с самопринадлежностью (основания и некоторые приложения): монография. Изд. 2-е, испр. и доп. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012. 126 с.
15. *Чечулин В.Л., Никитская Н.И.* К вопросу о периодизации развития селекции в сельском хозяйстве // Агротехнологии XXI века: матер. Всерос. науч.-практ. конф. ФГБОУ ВО Перм. гос. аграр.-технол. ун-т им. акад. Д.Н. Прянишникова. Пермь, 2017. С. 54–58.

On simple mathematical models of cultivated plants growth

V. L. Chechulin

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
 chechulinvl@mail.ru; 8 (342) 2-396-424

The paper describes simple "integrated" models of growth of cultivated annual plants received due to experimental data, representing expressions for standard dynamic links of the first order. These models, suitable for the expression of plant growth parameters in an "integrated form", are much simpler than the models applied to modeling of growth processes since the end of the 1960s and developed for the initial data expressed in a "differential" form. The simplicity of the described math models of plant growth simplifies the interpretation of their parameters in relation to the influence of the genotype and external conditions on the plant growth.

Keywords: *"integrated" models of plant growth; standard dynamic links of the first order; aperiodic link; integrating link; delay link; interpretation of plant growth model; functions of harvest and other biomass growth.*