ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2018 Математика. Механика. Информатика Вып. 1(40)

УДК 530.12:531.551

Нестационарная космологическая модель с метрикой типа Геделя в теории Эйнштейна–Картана

В. Н. Павелкин

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

pnvin@yandex.ru, 89641875538

В рамках теории Эйнштейна–Картана построена нестационарная космологическая модель с вращением, ускорением и сдвигом с метрикой типа Геделя. Источниками гравитации модели являются анизотропная жидкость Вейсенхоффа, чистое излучение и тепловой поток. Вычислены кинематические и материальные параметры модели.

Ключевые слова: *теория Эйнштейна–Картана; космологическая модель; тензор спина; кручение; вращение; расширение; жидкость Вейсенхоффа.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-1-27-31

При обсуждении моделей с вращением представляется разумным учитывать наличие спина (внутреннего углового момента) космологической материи. Ее элементами в современную эпоху можно считать галактики (или кластеры галактик), а в ранние космологические эпохи – элементарные частицы. Описание такой материи и соответствующей динамики гравитационного поля дает калибровочная теория для групп Пуанкаре [1, 2].

Простейшей моделью такой теории является теория Эйнштейна–Картана (естественное обобщение ОТО). Эта теория принимает в расчет спиновые частицы материи и описывает их влияние на геометрическую структуру пространства-времени, которое характеризуется нетривиальными кривизной и кручением. Отметим, что впервые в работах Д.Д. Иваненко, В.А. Короткого, Ю.Н. Обухова [3, 4] в квадратичной пуанкаре-калибровочной теории гравитации с кручением построены нестационарные, несингулярные, всюду причинные космологические модели вращающейся Вселенной, заполненной спинирующей материей.

В работе [5] Ю.Н. Обуховым и В.А. Коротким при построении вариационной теории жидкости Вейсенхоффа в пространстве-времени Римана–Картана показано, что уравнения Эйнштейна–Картана могут быть сведены к эффективным уравнениям Эйнштейна:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \aleph T_{\alpha\beta}^{эфф(ж.В.)} \tag{1}$$

и к уравнению для кручения:

$$Q_{\beta\gamma}^{\alpha} = \aleph S_{\beta\gamma} u^{\alpha}. \tag{2}$$

В уравнении (1) все компоненты, связанные с кручением, перенесены в правую часть, в результате для нейтральной спиновой жидкости Вейсенхоффа

$$T_{\alpha\beta}^{эфф(ж.В.)} = -p_{эфф} g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta (p_{эфф} + \varepsilon_{эфф}) - \\ -2(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu)\nabla_\mu [u_{(\alpha} S_{\beta)\nu}], \tag{3}$$

где

$$p_{эфф} = p - \aleph S_c^2, \quad \varepsilon_{эфф} = \varepsilon - \aleph S_c^2. \tag{4}$$

В [5] $S_{\alpha\beta}$ – тензор плотности спина – подчиняется уравнению

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = u^\alpha u_\mu \dot{S}^{\mu\beta} - u^\beta u_\mu \dot{S}^{\mu\alpha}, \tag{5}$$

где $\dot{S}^{\alpha\beta} = \nabla_\mu \; u^\mu S^{\alpha\beta}$, u_μ – 4-скорость жидкости, скалярная плотность спина

$$S_c^2 = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}. \tag{6}$$

Представляет интерес в теории Эйнштейна–Картана построение космологических моделей с вращением, заполненных не только жидкостью Вейсенхоффа, но также и другими источниками (в этом случае в правой части (1) к $T_{\alpha\beta}^{эфф(ж.В.)}$ нужно прибавить ТЭИ этих источников). Например, в качестве такого дополнительного источника можно взять анизотропную жидкость с ТЭИ:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + \pi) u_\alpha u_\beta + (\sigma - \pi) \chi_\alpha \chi_\beta - \pi g_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

где $u_\nu u^\nu = 1,\ \chi_\nu \chi^\nu = -1,\ \chi^\mu u_\mu = 0,\ \rho > 0,\ \sigma > \pi$ (анизотропная жидкость в космологии с вращением использовалась в [6–8] и других работах). Однако мы вместо двух жидкостей (спинирующей жидкости и анизотропной жидкости) введем одну – анизотропную жидкость Вейсенхоффа, постулируя следующий эффективный ТЭИ анизотропной жидкости Вейсенхоффа:

$$T_{\alpha\beta}^{эфф(а.ж.В.)} = u_\alpha u_\beta (\pi_{эфф} + \varepsilon_{эфф}) + (\sigma_{эфф} - \pi_{эфф}) \chi_\alpha \chi_\beta - \pi_{эфф} g_{\alpha\beta} - 2(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu) \nabla_\mu [u_{(\alpha} S_{\beta)\nu}], \quad (8)$$

где

$$\pi_{эфф} = \pi - \aleph S_c^2, \ \ \varepsilon_{эфф} = \varepsilon - \aleph S_c^2, \ \sigma_{эфф} = \sigma - \aleph S_c^2, \quad (9)$$

ε, σ, π – соответственно плотность энергии и компоненты анизотропного давления анизотропной жидкости Вейсенхоффа,

$$\varepsilon > 0,\ \sigma > \pi, \quad (10)$$

$S_{\alpha\beta}$ – тензор плотности спина, подчиняющийся уравнению (5); S_c – скалярная плотность спина (6); χ_α – вектор анизотропии,

$$\chi_\nu \chi^\nu = -1,\ \chi^\mu u_\mu = 0.$$

Итак, в данной статье мы найдем нестационарное космологическое решение типа Геделя в теории Эйнштейна–Картана, когда источниками являются: анизотропная жидкость Вейсенхоффа (с эффективным ТЭИ (8)), чистое излучение и тепловой поток.

ТЭИ чистого излучения имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{ч.и.} = w k_\alpha k_\beta,$$

причем k_α – вектор чистого излучения удовлетворяет уравнению

$$k_\alpha k^\alpha = 0. \quad (11)$$

ТЭИ теплового потока

$$T_{\alpha\beta}^{т.п.} = q_\alpha u_\beta + q_\beta u_\alpha,$$

где q_α – вектор теплового потока,

$$q_\alpha u^\alpha = 0. \quad (12)$$

(В силу (12) в сопутствующей системе отсчета $q_0 = 0$).

Уравнение теплопроводности запишем в следующем виде:

$$q_\alpha = k(\delta_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta)\ T_{,\beta} - T a_\beta \ , \quad (13)$$

где k – коэффициент теплопроводности; T – температура; a_β – ускорение жидкости ($a_\beta = u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta$).

Для наших источников эффективные уравнения Эйнштейна (по аналогии с (1)) будут иметь следующий вид:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = \aleph \ T_{\alpha\beta}^{эфф(а.ж.В.)} + T_{\alpha\beta}^{ч.и.} + T_{\alpha\beta}^{т.п.} \ , \quad (14)$$

а уравнения для кручения сохраняют вид (2). Нестационарное решение уравнений (14) будем искать для метрики типа Геделя вида

$$ds^2 = dt^2 - 2\varphi R e^{mx} dy dt - R^2 dx^2 - R^2 dz^2, \quad (15)$$

где $R = R(t) > 0, \quad \varphi = \varphi(t).$

Мы считаем, что у нас система отсчета сопутствующая, т.е. $u^\alpha = \delta_0^\alpha$. Тогда тензор вращения для нашей модели имеет вид

$$\omega_{\alpha\beta} = -m\varphi R(t) e^{mx} \delta_{[\alpha}^1 \delta_{\beta]}^2,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}} = \frac{|m|}{2R}. \quad (16)$$

Тензор сдвига имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = -\frac{1}{3} R^2 \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}, \quad \sigma_{22} = \frac{2}{3} e^{2mx} R^2 \dot{\varphi} \varphi,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \right|. \quad (17)$$

Расширение

$$\theta = \frac{3\dot{R}}{R} + \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}. \quad (18)$$

Вектор ускорения

$$a_\alpha = -(\dot{\varphi} R + \dot{R} \varphi) e^{mx} \delta_\alpha^2.$$

Считая, что спин жидкости направлен вдоль оси z, запишем тензор плотности спина в виде

$$S_{\alpha\beta} = 2S \delta_{[\alpha}^1 \delta_{\beta]}^2.$$

Тогда $\qquad S = S_{12} = -S_{21}.$

Решение уравнения (1) дает

$$S = S_{12} = \frac{S_0(x)}{R}. \quad (19)$$

Для расчета различных геометрических величин и записи эффективных уравнений Эйнштейна удобно использовать тетрадный формализм. Выберем ортонормированную тетраду в виде

$$h_0^{\hat{0}} = 1,\ h_2^{\hat{0}} = -\varphi e^{mx} R,\ h_1^{\hat{1}} = h_3^{\hat{3}} = R,\ h_2^{\hat{2}} = \varphi e^{mx} R. \tag{20}$$

Остальные компоненты тетрады равны нулю. Локально – лоренцевы тетрадные индексы здесь отмечены "шляпкой" (в дальнейшем это обозначение в полевых уравнениях мы опустим). Большими буквами будем обозначать тетрадные индексы различных величин.

Аналогично [5] тензор плотности спина жидкости можно определить в виде

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \rho h_\alpha^A h_\beta^B \mu_{AB}, \tag{21}$$

где μ_{AB} – спиновая плотность в частице жидкости ($\mu_{AB} = 2\mu\delta^1_{[A}\delta^2_{B]}$); ρ – плотность частиц анизотропной жидкости Вейсенхоффа.

Плотность частиц жидкости ρ удовлетворяет уравнению непрерывности [5]:

$$\nabla_\alpha \ \rho u^\alpha \ = 0.$$

Решение этого уравнения в нашем случае есть

$$\rho = \frac{\rho_0}{R^3 \varphi}, \tag{22}$$

где $\rho_0 = const$.

На основании (21) и (22) получим

$$S = S_{12} = \frac{1}{2} \frac{e^{mx} \rho_0 \mu_{\hat{1}\hat{2}}}{R} = \frac{e^{mx} \rho_0 \mu}{2R}. \tag{23}$$

Если в (19) считать $S_0 / e^{mx} = const$, то с учетом (23) получим $\mu = const$ (что аналогично с [5] соответствует постоянству плотности спина в каждой частице жидкости).

Вычисление скалярной плотности спина S_C дает

$$S_C = \frac{|\mu\rho_0|}{2R^3|\varphi|} = \frac{|Q_0|}{R^3|\varphi|}, \tag{24}$$

где

$$Q_0 = \frac{\mu\rho_0}{2}. \tag{25}$$

В сопутствующей системе отсчета $u_A = \delta_A^0,\ u^A = \delta_0^A$; пусть вектор анизотропии жидкости направлен по оси x-ов: $\chi_A = -\delta_A^1$.

С учетом этих замечаний эффективные уравнения Эйнштейна с космологическим членом (14) для метрики (15) в тетрадном базисе (20) запишутся следующим образом:

$$\Lambda - 2\varphi\dot{F} - \frac{m^2}{4R^2} - \frac{2\aleph m Q_0}{\varphi R^4} = \aleph\left(\varepsilon_{эфф} + wk_0{}^2\right),$$

$$\frac{1}{R^3\varphi^3}\left(B - C\varphi^2\right) = wk_0k_1 + q_1,$$

$$-\frac{2\varphi}{\aleph}\dot{F} = wk_0k_2 + q_2, \quad \frac{m^2}{4R^2} - \frac{\aleph m Q_0}{\varphi R^4} - \Lambda = \aleph\left(\pi_{эфф} + wk_1{}^2\right), \tag{26}$$

$$\frac{1}{R^3\varphi^3}\left(B + C\varphi^2\right) = wk_1k_2, \quad -2\varphi\dot{F} + \frac{m^2}{4R^2} - \frac{\aleph m Q_0}{\varphi R^4} - \Lambda =$$
$$= \aleph\left(\pi_{эфф} + wk_2{}^2\right),$$

$$\frac{3m^2}{4R^2} - \Lambda = \aleph\left(\sigma_{эфф} + wk_3{}^2\right),$$

$$wk_0k_3 + q_3 = 0, \quad wk_2k_3 = wk_1k_3 = 0.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$F = \frac{\dot{R}}{R\varphi}, \quad B = \frac{m}{2\aleph}\varphi^3\left(R^2\right), \quad C = Q_0\frac{\dot{\varphi}}{\varphi}, \tag{27}$$

$Q_0 = const$ определено выражением (25); дифференцирование в (27) производится по переменной t;

$$\pi_{эфф} = \pi - \aleph S_c^2,\ \ \varepsilon_{эфф} = \varepsilon - \aleph S_c^2,\ \ \sigma_{эфф} = \sigma - \aleph S_c^2.$$

К системе (26) добавляется уравнение (11)

$$k^A k_A = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим случай, когда

$$k_1 = k_2 = 0,$$

а также

$$q_1 = pq_3,\ p = const > 0. \tag{29}$$

Тогда из (26) получим

$$B + C\varphi^2 = 0.$$

Решением этого уравнения с учетом (27) будет

$$R^2 = \frac{2\aleph Q_0}{m\varphi}. \tag{30}$$

Далее из (28) следует, что $k_0 = \pm k_3$.

Пусть $k_0 = -k_3 = \tilde{k}$.

Тогда из системы (26) и (29) имеем

$$w\tilde{k}^2 = \frac{1}{pR^3\varphi^3}\ \ B - C\varphi^2\ . \tag{31}$$

Из (31) и (26) с учетом (30) можно получить уравнение для φ:

$$a\left(\frac{1}{\varphi}\right)' - b\frac{1}{\sqrt{\varphi}} = -m^2\tau, \tag{32}$$

где

$$a = \frac{2\aleph Q_0}{m},\ b = \frac{2\sqrt{2\aleph Q_0 m}}{p},\ \tau = t + q,$$

$q = const > 0,\ Q_0 m > 0,$ дифференцирование в (32) по τ. Уравнение (32) имеет решение

$$\varphi = \frac{8\aleph Q_0 p^2}{h^2 m^3 \tau^2}, \tag{33}$$

где

$$h = 1 \pm \sqrt{1 - 2p^2} = const, \quad 0 < p \le \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{34}$$

Тогда из (30) найдем:

$$R = \frac{h|m|\tau}{2p}. \tag{35}$$

Для данных R и φ вычислим материальные параметры модели: S_C ((из (24)), ε, π, σ (из (26)), $wk_0{}^2 = wk_3{}^2$ (из (31)), q_1, q_2, q_3 (из (26) и (29)). В результате будем иметь

$$S_C = \frac{p}{\aleph h\tau},$$

$$wk_0^2 = wk_3^2 = \frac{4}{\aleph h\tau^2},$$

$$\aleph\varepsilon = \Lambda - \frac{8}{h\tau^2},$$

$$\aleph\pi = -\Lambda - \frac{2}{h\tau^2},$$

$$\aleph\sigma = -\Lambda,$$

$$q_1 = pq_3 = \frac{4p * sign(m)}{\aleph h\tau^2},$$

$$q_2 = -\frac{2}{\aleph\tau^2}.$$

Неравенства (10) будут выполняться, если

$$\Lambda - \frac{8}{hq^2} > 0.$$

(Заметим: отсюда следует, что $\Lambda > 0$). Уравнение для кручения (2) в тетрадной форме можно переписать в виде [5]

$$Q^A_{BC} = \aleph u^A S_{BC}.$$

На основании (23), (25) ненулевые тетрадные компоненты кручения для нашей модели будут

$$Q^{\hat{0}}_{\hat{1}\hat{2}} = -Q^{\hat{0}}_{\hat{2}\hat{1}} = \aleph S_{\hat{1}\hat{2}} = \aleph h^1_{\hat{1}} h^2_{\hat{2}} S_{12} = \frac{\aleph S}{R^2 e^{mx}\varphi} = \frac{\aleph Q_0}{R^3\varphi}.$$

В итоге ненулевые тетрадные компоненты тензора кручения:

$$Q^{\hat{0}}_{\hat{1}\hat{2}} = -Q^{\hat{0}}_{\hat{2}\hat{1}} = \frac{p * sign(m)}{h\tau}$$

Уравнение теплопроводности (13) для решения (33) и (35) дает

$$kT_{,x} = \frac{2|m|}{\aleph\tau},\ k\left(T\frac{\aleph}{\tau}\right)_{,\tau} = -\frac{2}{\tau^3},\ kT_{,z} = \frac{2|m|}{\aleph p\tau}.$$

Решение этой системы дает для температуры

$$T = \frac{G}{\tau^\alpha} e^{\beta x + \frac{\beta}{p} z} > 0. \tag{36}$$

Коэффициент теплопроводности

$$k = H\tau^{\alpha-1} e^{-\beta x - \frac{\beta}{p} z} > 0. \tag{37}$$

В (36) и (37) G, H, β, α – постоянные, $G > 0$,

$$H = \frac{2|m|}{\aleph\beta G} > 0,\ \beta = (\alpha + 1)|m| > 0,\ \alpha > 0.$$

Здесь мы также феноменологически предполагаем, что тепло выделяется в нашей модели в ходе некоторых экзотермических процессов.

Рассмотрим динамические параметры нашей космологической модели. Из (16), (17) и (18) найдем вращение, сдвиг и расширение:

$$\omega = \frac{p}{h\tau}, \tag{38}$$

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\tau}, \tag{39}$$

$$\theta = \frac{1}{\tau}. \tag{40}$$

Отсюда видно, что с ростом времени ($\tau = t + q$) вращение, сдвиг и расширение затухают (тоже затухает и "квадрат 4-ускорения" a^2). Из (38), (34) следует, что за счет подбора константы p можно согласовать скорость вращения нашей космологической модели со скоростью вращения Вселенной, полученной из наблюдений. Эволюция нашей модели начинается с момента времени $t = 0$ и при этом найденное космологическое решение будет несингулярным (при $t \ge 0$).

Отметим, что оно будет и причинным. Это легко показать, если применить рассуждения, изложенные в конце предыдущего параграфа, к метрике (15).

Отметим здесь, что А.М. Галиахметов в [9] также получил в рамках теории Эйнштейна–Картана точное частное решение для вращающихся вселенных, заполненных анизотропной жидкостью и неминимально связанным скалярным полем.

Список литературы

1. *Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н.* Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М.: Энергоатомиздат, 1985. 168 с.
2. *Короткий В.А., Обухов Ю.Н.* Модель расширяющейся и вращающейся Вселенной // Тез. докл. VII Совет. гравит. конф. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1988. С. 432–433.
3. *Иваненко Д.Д., Короткий В.А., Обухов Ю.Н.* Космологический сценарий вращающейся Вселенной // Астрон. цирк. АН СССР. 1986. № 1473. С. 1–3.
4. *Иваненко Д.Д., Короткий В.А., Обухов Ю.Н.* О вращении Вселенной // Астрон. цирк. АН СССР. 1986. № 1458. С. 1–3.
5 *Obukhov Yu.N., Korotky V.A.* The Weyssenhoff fluid in Einstein–Cartan theory // Class. and Quantum Grav. 1987. Vol. 4, № 6. P. 1633–1657.
6. *Кречет В.Г., Панов В.Ф.* Нестационарные космологические модели с вращением / Ред. журн. Изв. вузов. Физика. Томск, 1987. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 11.01.88, № 81–В81.
7. *Кречет В.Г., Панов В.Ф.* Нестационарные космологические модели с вращением // Астрофизика. 1988. Т. 28, вып. 3. С. 670–678.
8. *Панов В.Ф.* Космологические модели с расширением и вращением / Ред. журн. Изв. вузов. Физика. Томск, 1987. 13 с. Деп. в ВИНИИ 12.11.87, № 8000–В87.
9. *Galiakhmetov A.M.* Exact rotating and expanding cosmologies in Einstein–Cartan theory // Gravitation & Cosmology. 2009. V. 15. P. 250–255.

Non-stationary cosmological model with Gödel type metrics in Einstein–Cartan's theory

V. N. Pavelkin
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
pnvin@yandex.ru; 89641875538

Within Einstein–Cartan's theory, a non-stationary cosmological model with rotation, acceleration, and shift with Gödel type metrics is constructed. Anisotropic Veysenkhoff fluid, net radiation and a thermal stream are the sources of the model's gravitation. Kinematic and material parameters of the model are calculated.

Keywords: *Einstein–Cartan's theory; cosmological model; spin tensor; torsion; rotation; expansion; Veysenkhoff fluid.*