

где t – текущее время, p – фазовый вектор системы, v – вектор управляющих параметров.

Относительно функций $P_i : [t_0, T] \times R^{n+r} \rightarrow R^1, i = 1, \dots, n$ предполагается, что они непрерывны по совокупности своих аргументов и удовлетворяют локальным условиям Липшица по переменной $p \in R^n$. Предполагается также, что уравнения (1.1) могут быть разрешены относительно вектора управления $v \in R^r$, т. е. приведены к виду

$$\begin{aligned} v_1 &= V_1(t, p_1, \dots, p_n, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n), \\ &\dots\dots\dots \\ v_r &= V_r(t, p_1, \dots, p_n, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

На базовый закон движения объекта $p = \bar{p}(t), t \in [t_0, T]$ накладывается ряд формализованных требований, состоящих, в частности, из необходимости удовлетворить начальному и конечному положению, фазовым ограничениям и др. Базовый закон движения объекта подбирается непосредственно.

Базовое программное управление $v = \bar{v}(t), t \in [t_0, T]$, реализующее базовый закон движения, определяется путем подстановки последнего в уравнения (1.2).

Таким образом,

$$\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} V_1(t, \bar{p}_1(t), \dots, \bar{p}_n(t), \dot{\bar{p}}_1(t), \dots, \dot{\bar{p}}_n(t)) \\ \dots\dots\dots \\ V_r(t, \bar{p}_1(t), \dots, \bar{p}_n(t), \dot{\bar{p}}_1(t), \dots, \dot{\bar{p}}_n(t)) \end{pmatrix}, t \in [t_0, T]$$

2. Возмущенные законы движения и линеаризованная модель управляемой динамической системы

В случае, когда начальные условия $p(t_0) = p_0$ не удастся выдержать точно, кинематический закон движения $p = p(t, t_0, p_0 + \delta p_0, \bar{v}(\cdot)), t \in [t_0, T]$ динамического объекта, порожденный управлением $v = \bar{v}(t), t \in [t_0, T]$, не будет совпадать с базовым законом.

Определение 1. Кинематический закон $p = p(t, t_0, p_0 + \delta p_0, \bar{v}(\cdot)), t \in [t_0, T]$ будем называть возмущенным движением, а разность

$$\delta p(\cdot) = p(\cdot, t_0, p_0 + \delta p_0, \bar{v}(\cdot)) - \bar{p}(\cdot)$$

возмущением движения динамического объекта.

Для совпадения возмущенного и базового законов движения требуется обратить в ноль возмущения. Приближенное описание динамики возмущений дает система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in R^r, t \in [t_0, T], \quad (2.1)$$

где, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – аппроксимация возмущения

δp , а $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{pmatrix}$ – вектор дополнительных

управляющих параметров. Матрицы $A(t)$ и $B(t), t \in [t_0, T]$ вычисляются по формулам

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial P_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{pmatrix}_{\substack{p(t)=\bar{p}(t), \\ v(t)=\bar{v}(t)}},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial v_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial P_n}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial v_r} \end{pmatrix}_{\substack{p(t)=\bar{p}(t), \\ v(t)=\bar{v}(t)}}}.$$

3. Задачи оптимального управления

Система (2.1) является линеаризованной системой (1.1) в окрестности пары "базовое движение, базовое программное управление". Ее можно трактовать как дифференциальные уравнения движения линейного управляемого динамического объекта, для которого можно ставить и решать задачу наведения на некоторое целевое множество.

Задача 1. Определить программное управление $u^*(t), t \in [t_0, T]$, переводящее фазовый вектор линейного объекта из начального положения $x(t_0) = \delta p_0$ в начало координат.

Задача 1 дополняется требованием оптимальности программного управления, ре-

шающего эту задачу, по критериям "минимум энергии" и "минимум силы". Таким образом, приходим к следующим двум задачам теории оптимального управления.

Задача 2 ("минимум энергии"). Определить программное управление $u^{эн}(t), t \in [t_0, T]$, решающее задачу 1, и удовлетворяющее при этом условию

$$I^{эн} [u^{эн}(\cdot)] = \left[\int_{t_0}^T \langle u^{эн}(\tau), u^{эн}(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \min_{u(\cdot)} \left[\int_{t_0}^T \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Задача 3 ("минимум силы"). Определить программное управление $u^{кул}(t), t \in [t_0, T]$, решающее задачу 1, и удовлетворяющее при этом условию

$$I^{кул} [u^{кул}(\cdot)] = \text{vrai max}_{\tau \in [t_0, T]} \|u^{кул}(\tau)\| = \\ = \min_{u(\cdot)} \left[\text{vrai max}_{\tau \in [t_0, T]} \|u(\tau)\| \right].$$

Следуя монографии [1] и учебному пособию [5] изложим кратко алгоритмы решения задач 2 и 3, соответственно.

Пусть

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} x_{11}(t, \tau) & \dots & x_{1n}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t, \tau) & \dots & x_{nn}(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad t, \tau \in [t_0, T]$$

– фундаментальная матрица Коши для однородного векторного дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x$. Полагаем

$$H[T, t] = X[T, t]B(t) = \\ = \begin{pmatrix} h^{(1)}(t) \\ \dots \\ h^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)}(t) & \dots & h_r^{(1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^{(n)}(t) & \dots & h_r^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T].$$

Определение 2. Матрица $H[T, t], t \in [t_0, T]$ называется переходной матрицей линейного объекта.

Символом

$$h^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} h_1^{(i)}(t) & \dots & h_r^{(i)}(t) \end{pmatrix}$$

обозначим i -ю, $i = 1, \dots, n$ строку матрицы перехода.

Оптимальное управление $u^{эн}(t), t \in [t_0, T]$, решающее задачу 2, строится по формуле

$$u^{эн}(\cdot) = \sum_{i=1}^n v_i^0 \left(h^{(i)}(\cdot) \right)^T,$$

в которой числа v_1^0, \dots, v_n^0 являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_{t_0}^T \langle (h^{(i)}(\tau))^T, (h^{(j)}(\tau))^T \rangle d\tau, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = -X[T, t_0]x_0.$$

Оптимальное управление $u^{кул}(t), t \in [t_0, T]$, решающее задачу 3, строится по формуле

$$u^{кул}(\cdot) = \frac{1}{\rho^0} \cdot \frac{(h^0(\cdot))^T}{\sqrt{\langle (h^0(\cdot))^T, (h^0(\cdot))^T \rangle}},$$

где

$$(h^0(\cdot))^T = \sum_{i=1}^n l_i^0 (h^{(i)}(\cdot))^T(\cdot),$$

$$\rho^0 = \int_{t_0}^T \sqrt{\langle (h^0(\cdot))^T, (h^0(\cdot))^T \rangle} d\tau,$$

а числа l_1^0, \dots, l_n^0 – решение задачи математического программирования

$$\int_{t_0}^T \sum_{i,j=1}^n \sqrt{\langle (h^{(i)}(\cdot))^T, (h^{(j)}(\cdot))^T \rangle} l_i l_j d\tau \rightarrow \min, \\ \sum_{s=1}^n c_s l_s = 1.$$

4. Анализ решения задач оптимального управления

Пусть $u^*(t), t \in [t_0, T]$ – решение задачи 1. Эффективность полученного решения проверяется путем вычисления величины

$$K = \sqrt{\langle \bar{p}(T) - p^*(T), \bar{p}(T) - p^*(T) \rangle},$$

где $p^*(\cdot)$ – решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_1 = P_1(t, p_1, \dots, p_n, \bar{\epsilon}_1(t) + u_1^*(t), \dots, \bar{\epsilon}_r(t) + u_r^*(t)),$$

.....

$$\dot{p}_n = P_n(t, p_1, \dots, p_n, \bar{\epsilon}_1(t) + u_1^*(t), \dots, \bar{\epsilon}_r(t) + u_r^*(t)),$$

с начальными условиями

$$p(t_0) = p_0 + \delta p_0.$$

При этом, чем меньше величина K , тем более

эффективно построенное управление $u^*(t), t \in [t_0, T]$.

Иллюстрацией того факта, что управление $u^*(t), t \in [t_0, T]$, решающее задачу 1, может быть оптимально по разным критериям ("минимум энергии", "минимум силы") служит следующая таблица.

| Управления $u(\cdot)$ | Функционалы $I[u(\cdot)]$ | |
|--|--|---|
| | Минимум энергии | Минимум силы |
| | $I^{эн} [u(\cdot)] = \left[\int_{t_0}^T \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}}$ | $I^{сил} [u(\cdot)] = \left[\text{vrai max}_{\tau \in [t_0, T]} \ u(\tau)\ \right]$ |
| Минимум энергии $u^{эн}(t) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i^0 h^{(i)}(t)$ | $I^{эн} [u^{эн}(\cdot)]$ | $I^{сил} [u^{эн}(\cdot)]$ |
| Минимум силы $u^{сил}(t) = \frac{1}{\rho^0} \cdot \frac{h^0(t)}{\sqrt{\langle h^0(t), h^0(t) \rangle}}$ | $I^{эн} [u^{сил}(\cdot)]$ | $I^{сил} [u^{сил}(\cdot)]$ |

В этой таблице каждый диагональный элемент должен быть наименьшим в своем столбце. Кроме того, имеют место равенства

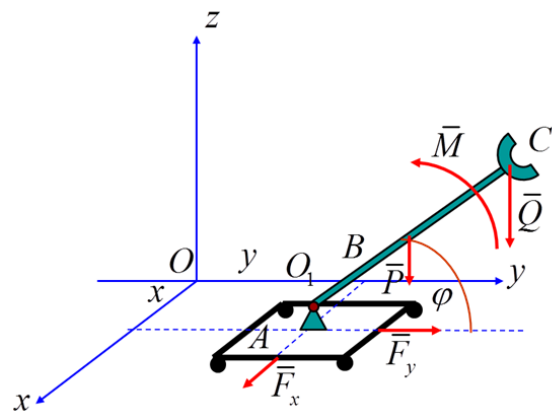
$$I^{сил} [u^{сил}(\cdot)] = \frac{1}{\rho^0},$$

$$I^{эн} [u^{сил}(\cdot)] = \sqrt{T - t_0} \cdot I^{сил} [u^{сил}(\cdot)],$$

а график функции $\|u^{сил}(\cdot)\|$ на промежутке $[t_0, T]$ не выходит за пределы полосы шириной $\text{vrai max}_{\tau \in [t_0, T]} \|u^{эн}(\tau)\|$.

Пример 1[1]. Платформа A массы m_A движется поступательно без трения вдоль горизонтальной плоскости (см. рис. 1).

На платформе установлен цилиндрический шарнир, который разрешает вращаться



однородному стержню B массы m_B и длиной $2l$ в плоскости, параллельной Oxy .

На конце стержня имеется точечный "схват" массы m_C .

Рис. 1

К платформе приложены управляющая сила

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

и управляющий момент

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обобщенные координаты x, y, φ механизма связаны с декартовыми координатами x_C, y_C, z_C "схвата" формулами

$$x_C = x, \quad y_C = y + 2l \cos \varphi, \quad z_C = 2l \sin \varphi.$$

$$f_1(F_x) = \frac{F_x}{m_A + m_B + m_C},$$

$$f_2(\varphi, \dot{\varphi}, F_y, M_x) = -\frac{3l(m_B + 2m_C)[-M_x + gl(m_B + 2m_C)\cos\varphi]\sin\varphi}{l^2[4(m_A + m_B + m_C)(m_B + 3m_C) - 3(m_B + 2m_C)^2\cos 2\varphi]} +$$

$$+ \frac{4l^2(m_B + 3m_C)[F_y + l(m_B + 2m_C)\cos\varphi\dot{\varphi}^2]}{l^2[4(m_A + m_B + m_C)(m_B + 3m_C) - 3(m_B + 2m_C)^2\cos 2\varphi]},$$

$$f_3(\varphi, \dot{\varphi}, F_y, M_x) = \frac{6M_x(m_A + m_B + m_C) - 6gl(m_A + m_B + m_C)(m_B + 2m_C)\cos\varphi}{l^2[5m_B^2 + 20m_Bm_C + 12m_C^2 + 8m_A(m_B + 3m_C) + 3(m_B + 2m_C)^2\cos 2\varphi]} +$$

$$+ \frac{6F_y l(m_B + 2m_C)\sin\varphi}{l^2[5m_B^2 + 20m_Bm_C + 12m_C^2 + 8m_A(m_B + 3m_C) + 3(m_B + 2m_C)^2\cos 2\varphi]} +$$

$$+ \frac{3l^2(m_B + 2m_C)\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2}{l^2[5m_B^2 + 20m_Bm_C + 12m_C^2 + 8m_A(m_B + 3m_C) + 3(m_B + 2m_C)^2\cos 2\varphi]}.$$

Дифференциальные уравнения (4.1) нормализуются заменой

$$p_1 = x, p_2 = y, p_3 = \varphi, p_4 = \dot{x},$$

$$p_5 = \dot{y}, p_6 = \dot{\varphi}, v_1 = F_x, v_2 = F_y, v_3 = M_x$$

и приводятся к виду

$$\dot{p}_1 = p_4, \quad \dot{p}_2 = p_5, \quad \dot{p}_3 = p_6, \quad \dot{p}_4 = f_1(v_1),$$

$$\dot{p}_5 = f_2(p_3, p_6, v_2, v_3), \quad \dot{p}_6 = f_3(p_3, p_6, v_2, v_3).$$

Подбирается базовый закон движения механизма

Уравнения Лагранжа, разрешенные относительно старших производных имеют вид

$$\ddot{x} = f_1(F_x),$$

$$\ddot{y} = f_2(\varphi, \dot{\varphi}, F_y, M_x),$$

$$\ddot{\varphi} = f_3(\varphi, \dot{\varphi}, F_y, M_x),$$
(4.1)

где

$$\mathbf{f}_1(t) = a_{3x}t^3 + a_{2x}t^2 + a_{1x}t + a_{0x},$$

$$\mathbf{f}_2(t) = a_{3y}t^3 + a_{2y}t^2 + a_{1y}t + a_{0y},$$

$$\mathbf{f}_3(t) = a_{3\varphi}t^3 + a_{2\varphi}t^2 + a_{1\varphi}t + a_{0\varphi},$$

$$\mathbf{f}_4(t) = 3a_{3x}t^2 + 2a_{2x}t + a_{1x},$$

$$\mathbf{f}_5(t) = 3a_{3y}t^2 + 2a_{2y}t + a_{1y},$$

$$\mathbf{f}_6(t) = 3a_{3\varphi}t^2 + 2a_{2\varphi}t + a_{1\varphi},$$

и вычисляется базовое программное управление, реализующее базовый закон движения:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1(t) &= (m_A + m_B + m_C) \dot{\epsilon}_4(t), \\ \dot{\epsilon}_2(t) &= -(l m_B + 2 m_C) \cos \epsilon_3(t) \dot{\epsilon}_6^2(t) - l(m_B + 2 m_C) \sin \epsilon_3(t) \dot{\epsilon}_6(t) + (m_A + m_B + m_C) \dot{\epsilon}_5(t), \\ \dot{\epsilon}_3(t) &= \frac{1}{3} l \left[4 l(m_B + 3 m_C) \dot{\epsilon}_6(t) - 3(m_B + 2 m_C) \sin \epsilon_3(t) \dot{\epsilon}_5(t) \right] + g l m_B \cos \epsilon_3(t) + 2 g l m_C \cos \epsilon_3(t). \end{aligned}$$

Строится линеаризованная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [t_0, T].$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in R^6, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in R^3,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial p_3} & 0 & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial p_6} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial p_3} & 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial p_6} \end{pmatrix}_{\substack{p=\epsilon(t), \\ v=\dot{\epsilon}(t)}},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} & \frac{\partial f_2}{\partial v_3} \\ 0 & \frac{\partial f_3}{\partial v_2} & \frac{\partial f_3}{\partial v_3} \end{pmatrix}_{\substack{p=\epsilon(t), \\ v=\dot{\epsilon}(t)}}, \quad t \in [t_0, T].$$

В примере приняты следующие числовые данные

$$m_A = 10 \text{ кг}, m_B = 4 \text{ кг}, m_C = 2 \text{ кг}, l = 1 \text{ м},$$

$$g = 9.8, \frac{M}{\text{сек}^2}, t_0 = 0 \text{ сек}, T = 1 \text{ сек},$$

$$x_C^0 = y_C^0 = z_C^0 = 0.5 \text{ м}, x_C^1 = y_C^1 = z_C^1 = 1 \text{ м},$$

$$\dot{x}_C^0 = 0, \dot{y}_C^0 = 0, \dot{z}_C^0 = 0 \frac{M}{\text{сек}},$$

$$x_{Cvoz}^0 = 0.55 \text{ м}, y_{Cvoz}^0 = 0.45 \text{ м}, z_{Cvoz}^0 = 0.45 \text{ м},$$

$$\dot{x}_{Cvoz}^0 = \dot{y}_{Cvoz}^0 = 0 = \dot{z}_{Cvoz}^0 = 0 \frac{M}{\text{сек}}.$$

В результате расчетов было получено:

$$K_{\text{эп}} = 0.00076, \quad K_{\text{кул}} = 0.00078,$$

$$I^{\text{эп}} [u^{\text{эп}}(\cdot)] = 4.43934, \quad I^{\text{эп}} [u^{\text{кул}}(\cdot)] = 5.09758,$$

$$I^{\text{кул}} [u^{\text{эп}}(\cdot)] = 7.52627, \quad I^{\text{кул}} [u^{\text{кул}}(\cdot)] = 5.09758$$

установлены равенства

$$I^{\text{кул}} [u^{\text{кул}}(\cdot)] = 5.09758 = \frac{1}{\rho^0},$$

$$I^{\text{эп}} [u^{\text{кул}}(\cdot)] = 5.09758 = \sqrt{T - t_0} \cdot I^{\text{кул}} [u^{\text{кул}}(\cdot)]$$

и построен совместный график функций $\|u^{\text{кул}}(\cdot)\|, \|u^{\text{эп}}(\tau)\|$ на промежутке $[t_0, T]$, (см. рис. 2, иллюстрирующий неравенство)

$$\|u^{\text{кул}}(t)\| \leq \text{vrai} \max_{\tau \in [t_0, T]} \|u^{\text{эп}}(\tau)\|, \quad t \in [t_0, T].$$

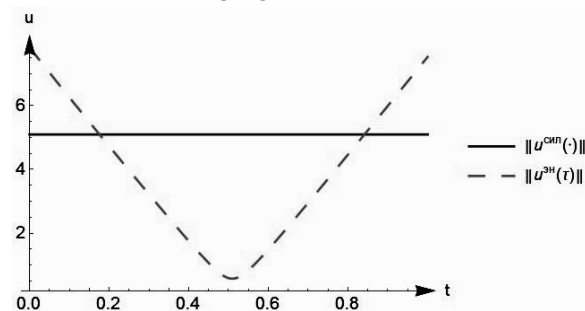


Рис. 2

Пример 2[4]. Абсолютно твердое тело вращается относительно неподвижной точки O (см. рис. 3). С телом связана подвижная система координат $Oxuz$, оси которой совпадают с главными осями инерции. Тензор инерции тела и вектор мгновенной угловой скорости в этой системе координат имеют вид

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

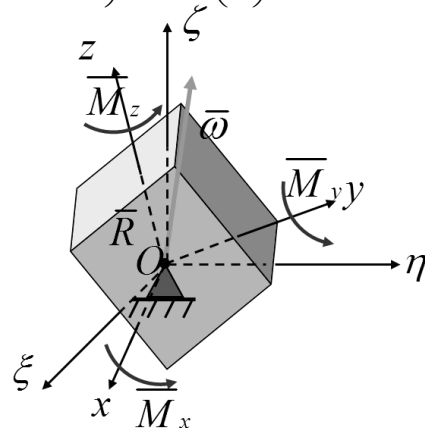


Рис. 3

К телу приложен управляющий момент

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}.$$

Положение тела относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ определяется углами Эйлера φ, ψ, θ , а скорость его вращения – проекциями вектора угловой скорости p, q, r на оси подвижной системы координат.

Дифференциальные уравнения движения тела, разрешенные относительно производных имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{p} &= P(q, r, M_{Ox}), \\ \dot{q} &= Q(p, r, M_{Oy}), \\ \dot{r} &= R(p, q, M_{Oz}), \\ \dot{\varphi} &= \Phi(p, q, \varphi, \theta), \\ \dot{\psi} &= \Psi(p, q, \varphi, \theta), \\ \dot{\theta} &= \Xi(p, q, \varphi), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$P(q, r, M_{Ox}) = -\frac{C-B}{A}qr + \frac{1}{A}M_{Ox},$$

$$Q(p, r, M_{Oy}) = -\frac{A-C}{B}rp + \frac{1}{B}M_{Oy},$$

$$R(p, q, M_{Oz}) = -\frac{B-A}{C}pq + \frac{1}{C}M_{Oz},$$

$$\Phi(p, q, \varphi, \theta) = -p \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta - q \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta + r,$$

$$\Psi(p, q, \varphi, \theta) = q \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} + p \frac{\sin \varphi}{\sin \theta},$$

$$\Xi(p, q, \varphi) = p \cos \varphi - q \sin \varphi$$

Дифференциальные уравнения (4.2) нормализуются заменой

$$p = p_1, q = p_2, r = p_3, \varphi = p_4, \psi = p_5,$$

$$\theta = p_6, M_{Ox} = v_1, M_{Oy} = v_2, M_{Oz} = v_3$$

и приводятся к виду

$$\dot{p}_1 = P(p_2, p_3, v_1),$$

$$\dot{p}_2 = Q(p_1, p_3, v_2),$$

$$\dot{p}_3 = R(p_1, p_2, v_3),$$

$$\dot{p}_4 = \Phi(p_1, p_2, p_4, p_6),$$

$$\dot{p}_5 = \Psi(p_1, p_2, p_4, p_6),$$

$$\dot{p}_6 = \Xi(p_1, p_2, p_4),$$

Подбирается базовый закон движения механизма

$$\mathfrak{f}_1(t) = \dot{\mathfrak{f}}_5 \sin \mathfrak{f}_6(t) \sin \mathfrak{f}_4(t) + \dot{\mathfrak{f}}_6(t) \cos \mathfrak{f}_4(t),$$

$$\mathfrak{f}_2(t) = \dot{\mathfrak{f}}_5 \sin \mathfrak{f}_6(t) \cos \mathfrak{f}_4(t) - \dot{\mathfrak{f}}_6(t) \sin \mathfrak{f}_4(t),$$

$$\mathfrak{f}_3(t) = \dot{\mathfrak{f}}_5 \cos \mathfrak{f}_6(t) + \mathfrak{f}_4(t).$$

$$\mathfrak{f}_4(t) = a_{3\varphi}t^3 + a_{2\varphi}t^2 + a_{1\varphi}t + a_{0\varphi},$$

$$\mathbf{f}_5(t) = a_{3\psi}t^3 + a_{2\psi}t^2 + a_{1\psi}t + a_{0\psi},$$

$$\mathbf{f}_6(t) = a_{3\theta}t^3 + a_{2\theta}t^2 + a_{1\theta}t + a_{0\theta}$$

и вычисляется базовое программное управление, реализующее базовый закон движения

$$\dot{\mathbf{f}}_1(t) = A\dot{\mathbf{f}}_1(t) + (C - B)\mathbf{f}_2(t)\mathbf{f}_3(t),$$

$$\dot{\mathbf{f}}_2(t) = B\dot{\mathbf{f}}_2(t) + (A - C)\mathbf{f}_3(t)\mathbf{f}_1(t),$$

$$\dot{\mathbf{f}}_3(t) = C\dot{\mathbf{f}}_3(t) + (B - A)\mathbf{f}_1(t)\mathbf{f}_2(t).$$

Строится линеаризованная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [t_0, T].$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in R^6, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in R^3,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial P}{\partial p_6} \\ \frac{\partial Q}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial Q}{\partial p_6} \\ \frac{\partial R}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial R}{\partial p_6} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \Phi}{\partial p_6} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \Psi}{\partial p_6} \\ \frac{\partial \Xi}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \Xi}{\partial p_6} \end{pmatrix}_{\substack{p=\mathbf{f}(t) \\ v=\mathbf{f}(t)}},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial v_1} & \frac{\partial P}{\partial v_2} & \frac{\partial P}{\partial v_3} \\ \frac{\partial Q}{\partial v_1} & \frac{\partial Q}{\partial v_2} & \frac{\partial Q}{\partial v_3} \\ \frac{\partial R}{\partial v_1} & \frac{\partial R}{\partial v_2} & \frac{\partial R}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial v_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \Xi}{\partial v_1} & \frac{\partial \Xi}{\partial v_2} & \frac{\partial \Xi}{\partial v_3} \end{pmatrix}_{\substack{p=\mathbf{f}(t) \\ v=\mathbf{f}(t)}}, \quad t \in [t_0, T].$$

В примере приняты следующие числовые данные:

$$A = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, B = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, C = 6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$\varphi_0 = 0.5 \text{ рад}, \psi_0 = 0.3 \text{ рад}, \theta_0 = 0.5 \text{ рад}, \dot{\varphi}_0 = 0.1 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\psi}_0 = 0.3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\theta}_0 = 0.2 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$\varphi_1 = 0.3 \text{ рад}, \psi_1 = 0.2 \text{ рад}, \theta_1 = 0.7 \text{ рад}, \dot{\varphi}_1 = 0.3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\psi}_1 = 0.2 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\theta}_1 = 0.3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$\varphi_{0\text{voz}} = \varphi_0 \cdot 1.08 \text{ рад}, \psi_{0\text{voz}} = \psi_0 \cdot 0.95 \text{ рад}, \theta_{0\text{voz}} = \theta_0 \cdot 1.03 \text{ рад},$$

$$\dot{\varphi}_{0\text{voz}} = \dot{\varphi}_0 \cdot 0.9 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\psi}_{0\text{voz}} = \dot{\psi}_0 \cdot 1.1 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\theta}_{0\text{voz}} = \dot{\theta}_0 \cdot 0.9 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$t_0 = 0 \text{ сек}, T = 1 \text{ сек}.$$

В результате расчетов было получено

$$K_{\text{эн}} = 0.00120399, K_{\text{сил}} = 0.00126597, I^{\text{эн}}[u^{\text{эн}}(\cdot)] = 0.798349, I^{\text{сил}}[u^{\text{сил}}(\cdot)] = 0.90713,$$

$$I^{\text{сил}}[u^{\text{эн}}(\cdot)] = 1.29334, I^{\text{эн}}[u^{\text{сил}}(\cdot)] = 0.90713,$$

установлены равенства

$$I^{\text{сил}}[u^{\text{сил}}(\cdot)] = 0.90713 = \frac{1}{\rho^0},$$

$$I^{\text{эн}}[u^{\text{сил}}(\cdot)] = 0.90713 = \sqrt{T - t_0} \cdot I^{\text{сил}}[u^{\text{сил}}(\cdot)]$$

и построен совместный график функций $\|u^{\text{сил}}(\cdot)\|, \|u^{\text{эн}}(\tau)\|$ на промежутке $[t_0, T]$ (см.

рис. 4), иллюстрирующий неравенство

$$\|u^{\text{сил}}(t)\| \leq \text{vrai} \max_{\tau \in [t_0, T]} \|u^{\text{эн}}(\tau)\|, \quad t \in [t_0, T].$$

Рис. 4

Заключение

1. В статье решена задача наведения фазового вектора линеаризованной системы на начало координат с дополнительными требованиями оптимальности по критериям "минимум энергии" и "минимум силы".

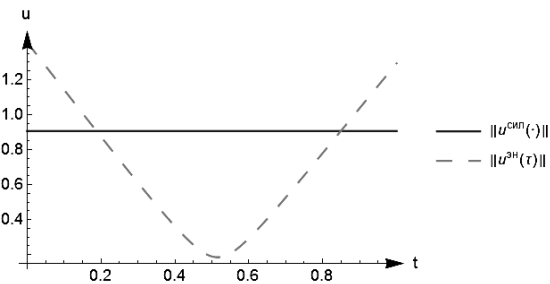
2. Проведен сравнительный анализ полученных решений по указанным критериям.

3. Результаты исследований проиллюстрированы на двух примерах управляемых динамических объектов с тремя степенями свободы.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Кучкова Т.Ю., Лутманов С.В. Задачи управления одной динамической системой с тремя степенями свободы // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 37–50.

3. Лутманов С.В. Об одной методике исследования управляемой динамической системы лиц // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. Пермь, 2017. Вып. 1(36). С. 12–20.
4. Лутманов С.В., Овчинников В.А. Оптимальная коррекция движения твердого тела, вращающегося относительно неподвижной точки // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2017. Вып. 49. С. 37–50.
5. Лутманов С.В. Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие / Перм. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.



Comparative analysis of the results of controlling

a dynamic system linearised around the basic motion, based on the "energy minimum" and "power minimum" criteria

S. V. Lutmanov, T. Yu. Kuchkova, V. A. Ovchinnikov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
mpu@psu.ru.; 8(342)239-63-09

The paper solves the problem of directing the basic vector of a linearised dynamic system to the reference point. As a result, programmed control is generated aligning turbulent motion of the dynamic object with its basic motion. Some additional optimality requirements on the basis of "minimum energy" and "minimum power" criteria are applied to the directing problem solution. A comparative analysis of the obtained solutions in accordance with the criteria above is done. The study results are illustrated by specific examples of controlled dynamic objects.

Keywords: *basic motion; turbulent motion; linearised model; optimal control; programmed control.*