

ИСТОРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 51(09)

Комментарии Ибн ал-Хайсама к общему определению отношения Евклида

И. О. Лютер

Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН

Россия, 125315, г. Москва, ул. Балтийская, 14

bastet_13@list.ru; +7 909 1528777

Исследуются проблемы, обусловленные комментариями Ибн ал-Хайсама к общему определению отношения Евклида. В частности: предполагается и обосновывается связь приведенного ал-Хайсамом определения отношения "древних" с антифайретической теорией отношений, предшествующей теории отношений Евдокса–Евклида; прослеживается, главным образом, по арабским редакциям "Начал", сложившаяся к XIII в. в средневековой арабской математике аргументированная традиция относить род отношения не к категории соотнесенного, как у Евклида, а к категории количества; отмечается, что именно осмысление отношения как количества позволило, в конечном счете, расширить понятие числа на отношения непрерывных величин.

Ключевые слова: *определение отношения; количество; средневековая арабская геометрия; Ибн ал-Хайсам; антифайретическая теория отношений.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-1-62-68

Одно из первых понятий теории отношений Евклида – это понятие отношения двух величин. Общее определение отношения как "некоторой зависимости двух однородных величин по количеству", данное Евклидом в пятой книге "Начал" [1, с. 142], представляет собой утверждение по существу метафизическое: род отношения оказывается в категории соотнесенного, как следствие, математически от такого определения ничего не зависит и ничего из него не выводится. Неудивительно, что на протяжении всей средневековой "арабской" истории "Начал" оно подвергалось различным интерпретациям и пересмотру.

В этой связи обратимся к трактату "Комментарий к введениям [к книгам "Начал"] Евклида" ("Шарх мусадарат Уклидис") выдающегося средневекового философа и математика Абу 'Али ал-Хасана ибн ал-

Хасана ибн ал-Хайсама (965–1040) и рассмотрим два фрагмента его комментария к пятой книге "Начал" Евклида.

В первом фрагменте утверждается: "Итак, отношение (нисба) – это некоторое соотнесение (идафа). Если есть некоторое соотнесение, то оно определяется только двумя вещами.

Этот термин, т. е. "отношение", может быть применен [и] к величинам и к невеличинам, поскольку соотнесение многих вещей, которые соотносятся [л. 193] друг с другом, называется отношением. Подобно родственным отношениям (ансаб), поскольку говорят о некоторых родственных отношениях, что он – араб и, следовательно, относится к арабам, если будет их потомком, и говорят, что он – иракец и, следовательно, относится к иракцам, если будет их родственником. И это соотнесение называется отношением. Существует много примеров этого соотнесения.

Что касается отношения, которое [имеет место] между величинами, то это – соотнесение (идафа) одной из них с другой по их количеству (каммийа) [2, лл.192 об.–193].

Сделаем небольшое терминологическое отступление. В арабском языке для математического отношения и философской категории отношения (соотнесенного), в отличие от русского языка, применяются различные термины – "нисба" и "идафа" соответственно. Английский язык, например, также позволяет различать эти понятия: *ratio* и *relation*. Бытовые значения арабского слова "идафа" – "присоединение", "добавление", но в определенных предложных словосочетаниях оно может переводиться как "по сравнению", "по отношению". Это позволяет переводить слово "идафа" в других контекстах не только как "соотнесение", но и более философски нейтрально, как "соотношение", "связь". Арабское слово "нисба" – многозначное, это и "отношение" (не только математическое), и "связь", и "родство", и "происхождение", что и отмечает ал-Хайсам, говоря о его применении "и к величинам и к невеличинам", которые как-то соотносятся друг с другом. Это в определенном смысле отражено в данном ал-Хайсамом примере такого применения в случаях родства.

В приведенном фрагменте дается собственно евклидово определение отношения величин как соотнесенного. Далее, однако, ал-Хайсам отмечает существование определения отношения как количества:

"Определение отношения, которое имеется во всех видах непрерывного количества, [определение,] которое охватывает все их отношения [и] которым определили его древние, [следующее]: "Отношение – это сущность меры (айиййату кадри) одной из двух [однородных] величин относительно другой". Толкование этого утверждения: отношение – это [именно то] понятие, [к которому] обращаются с вопросом о мере (каммийа, также "о количестве". – *И.Л.*) величин.

Последующие (букв. "позднейшие, современные" – *И.Л.*) авторы определили отношение словами, отличными от этих слов. Вот их высказывание: "Отношение – это [л. 195] некоторое соотнесение (идафа) одной из двух однородных величин с другой по мере (фи'лмикдари, также "по величине". – *И.Л.*)".

Евклид привел определение отношения во введении к пятой книге своего сочинения. В некоторых рукописях [это определение] встречается в первой формулировке, в других – во второй формулировке. Каждая из двух формулировок – это определение верное...

Можно было бы определить отношение словами, в большей степени излагающими суть, чем формулировки этих двух определений: отношение одной из двух [однородных] величин к другой – это сравнительное измерение (кийас) количества (каммийа) одной из двух [однородных] величин относительно количества другой величины" [2, лл.194 об.–195].

Итак, Ибн ал-Хайсам приводит две различные формулировки определения отношения, а также трактует сущность отношения двух однородных величин как сравнительное измерение двух однородных величин.

Примечательно, что в более ранней, согласно его атрибуции, формулировке определения отношения "древних" род отношения относится к категории количества: "отношение – это сущность меры одной из двух однородных величин относительно другой". Тогда как в более поздней формулировке "последующих авторов" – "отношение – это некоторое соотнесение одной из двух однородных величин с другой по мере" – род отношения относится к категории соотнесенного, и само определение, по сути, совпадает с определением отношения Евклида.

В таком случае можно предположить, что определение отношения "древних" представляет собой доевклидово, точнее, доевдоксово определение отношения.

Известно, что общая теория отношений, изложенная Евклидом в пятой книге "Начал", принадлежит Евдоксу Книдскому (ок. 390 до н.э. – ок. 337 до н.э.). Более ранней, чем теория отношений Евдокса–Евклида считается так называемая антифайретическая теория отношений, созданная, согласно Б.Л. Ван дер Вардену, Теэтетом (ок. 417–369 г. до н. э.) [3, с. 239–243]. В основе этой теории лежит алгоритм Евклида – метод нахождения наибольшего общего делителя или наибольшей общей меры двух величин, для натуральных чисел изложенный в предложении VII.2 "Начал", а для величин – в предложении X.3, что равносильно в современной терминологии разложению дроби в непрерывную дробь.

Тот факт, что греческие математики применяли до Евдокса антифайретическую теорию, доказывал О. Беккер [4]. Реконструкцию этой теории представил Д. Фуллер [5]. В 2002 г. Б. Витрак высказал и аргументировано изложил свою позицию, что недостаточное число известных к настоящему времени античных свидетельств не доказывает существование такой теории в греческой математике [6]. Я. Хогендайк, не соглашаясь с мнением Б. Витрака и рассмотрев один из самых ранних сохранившихся арабских текстов, посвященных антифайретической теории – "Трактат о трудности в деле об отношении" ("Рисала фил-мушкил мин амр ан-нисба") Абу 'Абдуллаха Мухаммада ал-Махани (IX в.), выдвинул "предварительное" предположение, что ал-Махани почерпнул свои доказательства из греческого источника, не дошедшего до нас, а если это так, то антифайретическая теория существовала в греческой математике [7].

Согласно ал-Махани: "Отношение двух однородных величин или отношение двух чисел есть положение (хала) одной/одного из них, когда она/оно измеряется другой/другим, или наоборот. Следует различать три случая: [1.] меньшее полностью исчерпывает большее, так что от него не остается остатка; [2.] меньшее не исчерпывает большего полностью, но от большего остается что-то, меньшее, чем меньшее; когда меньшее измеряется этим остатком, то он [остаток] исчерпывает его полностью или остается что-то, меньшее, чем первый остаток; если теперь первый остаток измерить этим вторым остатком, то он исчерпывает его полностью или остается остаток; если измеряется второй [остаток] этим [третьим остатком] и если делать это постоянно, то получится остаток, полностью исчерпывающий предшествующий остаток, или [3] не получится остатка, который исчерпывал бы полностью предшествующий. Первые два случая относятся к случаям сравнительного измерения, имеющим место, как для чисел, так и для величин, третий имеет место для величин" [8, с. 50].

Общее определение отношения, данное ал-Махани в контексте антифайретической теории, отличается от определения Евклида и от определения "древних", приведенного ал-Хайсамом. Несмотря на это и принимая во внимание то, что в основе этой теории – метод нахождения наибольшей общей меры двух величин, все-таки можно предполагать, что определение "древних" представляет со-

бой один из первых элементов или антифайретической теории отношений или некоторой теории, переходной между этой теорией и теорией отношения Евклида–Евдокса, возможность существования которой также заключил О. Беккер.

Чтобы в некоторой мере обосновать это предположение, обратимся ко второй части "Комментария к трудностям во введениях книги Евклида" ("Шарх ма ашквал мин мусадарат китаб Уклидис") 'Умара ал-Хайями (Омар Хайям, 1048–1131), в которой он развивает антифайретическую теорию отношений. В самом начале этой части он приводит общее определение отношения, аналогичное именно определению "древних" ал-Хайсама, приписывая, однако, такую формулировку "автору "Начал"": "отношение – это сущность меры (айийийату кадри) одной из двух однородных величин относительно другой" [9, с. 340–341]. По мнению ал-Хайями, такое "определение или описание близко к истине", но это нуждается в разъяснении. Он понимает под "сущностью меры" двух однородных величин соотношение (идафа), имеющее место между этими двумя величинами, но интерпретирует такое соотношение как величину, исходя из следующей цепочки рассуждений: когда имеются две однородные величины, то они или равны или не равны; одним из свойств количества является возможность рассматривать в нем равенство и неравенство; тогда отношение (нисба) собственно и есть такое рассмотрение соотношения (идафа) двух однородных величин, а также рассмотрение связанного с этим, а именно, величины (микдар) этого соотношения постольку, поскольку это отношение есть отношение между величинами [9, с. 340–341]. (Русский перевод определения отношения в трактате ал-Хайями: "отношение есть любая мера одной из двух однородных величин в другой" [10, с. 127]. Арабский термин "айийийа", т. е. "сущность, чтойность" (лат. quidditas), здесь некорректно переведен как однокоренное с ним прилагательное женского рода "аййа" – "любая". Скорее всего, такое ошибочное прочтение – следствие неразборчивости почерка или опски переписчика рукописи, с которой делался данный перевод).

Акцентированное нами определение отношения как "сущности меры" – определение "древних" по ал-Хайсаму – встречается не

только в "Комментарии" ал-Хайями, но и в редакции "Начал" Евклида Абу 'Али ибн Сины (Авиценна, ок. 980–1037), современника ал-Хайсама [11, с.153], также в обработке "Начал" Евклида ("Тахрир китаб Уклидис") Насир ад-Дина ат-Туси (1201–1274) (у ат-Туси, уточним, утверждается не "сущность меры одной из величин", а просто "сущность одной из величин") [12, с. 76].

Появление в средневековых арабских редакциях "Начал" Евклида и комментариях к ним определения отношения двух однородных величин как "сущности меры", а также трактовок этого определения было, по всей видимости, обусловлено тем, что антифайретическая теория отношений по сравнению с теорией отношений Евдокса-Евклида в большей степени соответствовала интересам некоторых арабоязычных математиков (ал-Махани, ан-Найризи, ал-Хайями и др.), развивающих эту теорию, поскольку выявляла сущность пропорции и отношения величин с измерительной точки зрения. Тем более что определение пропорции с помощью алгоритма Евклида позволяло получать рациональные приближения к иррациональным отношениям с любой степенью точности непосредственно. Именно так, с позиций измерения, и интерпретируют отношение ал-Хайсам в конце вышеприведенного фрагмента ("...отношение одной из двух однородных величин к другой – это сравнительное измерение количества одной из двух однородных величин относительно количества другой величины") и, например, Псевдо-Туси (см. далее).

Анализ сочинений средневековых арабоязычных геометров, касающихся различных аспектов теории отношений (см., например, [13; 14; 15]), позволяет заключить, что общее определение отношения Евклида как соотношенного ("зависимости" в русском переводе "Начал" Д.Д. Мордухай-Болтовского) в итоге было переосмыслено в определение отношения как количества.

Так, если в одном из первых переводов "Начал" на арабский язык, так называемой версии Исхака-Сабита (IX в.), отношение трактуется, как и надлежит переводу, в евклидовом смысле, то к XIII в. в арабской математике сложилась аргументированная традиция относить это понятие не к категории отношения, а к категории количества, нашедшая отражение в арабских редакциях "Начал" XIII

в., в частности в наиболее популярных на средневековом арабском Востоке обработках (редакциях) "Начал" Насир ад-Дина ат-Туси и Псевдо-Туси (арабский текст обработки Псевдо-Туси был издан в 1594 г. в Риме), а также в "Улучшении "Начал" Евклида" ал-Абхари.

Как уже отмечалось, Насир ад-Дин ат-Туси в своей редакции пятой книги "Начал" Евклида определяет отношение двух величин как "сущность [меры] одной из двух однородных величин относительно другой" [12, с. 76]. Во введении к своей редакции шестой книги "Начал" Евклида ат-Туси по существу распространяет аристотелевскую трактовку категории количества на понятие отношения двух количеств и утверждает: "Я говорю: как отношение из акциденций количества, так и композиция (та'лиф) [отношений] из акциденций отношения. Это означает, что иногда величина рассматривается как таковая – количество само по себе, а иногда – как количество при сравнении с другой величиной того же (букв. "ее". – *И.Л.*) рода. Тогда отношение – это соотношенное количество (камиййа ал-идафиййати, букв. количество соотношенности. – *И.Л.*)" [12, с. 88].

Напомним, Аристотель подразделяет количество на "количество само по себе" и "привходящее количество": "Из тех вещей, которые суть количество само по себе, одни таковы как сущности... другие суть свойства и состояния такого рода сущности... Точно так же большое и малое, большее и меньшее, если говорить о них самих по себе или в их отношении друг к другу, суть свойства количества сами по себе... Из того, что называется количеством как привходящее, одно называется так... поскольку то, чему оно присуще, есть некоторое количество; а другое есть количество в том же смысле, в каком движение и время суть количества; и они ведь называются некоторым количеством и непрерывным, поскольку делимо то, свойством чего оно есть" ("Метафизика", 1020a15–33) [16, т. 1, с. 165].

Обратимся еще к двум редакциям "Начал" Евклида XIII в. Псевдо-Туси и Асир ад-Дина ал-Абхари (ок.1200–1264/1265?) – современников ат-Туси, ассоциированных в разное время с возглавляемой им Марагинской обсерваторией.

Псевдо-Туси во введении к пятой книге своей обработки "Начал" приводит определе-

ние отношения почти по Евклиду как "соотнесения (идафа) двух однородных величин по мере (кадр, также "количество". – И.Л.)". При этом, как уже отмечалось, подобно ал-Хайсаму, он поясняет, что под отношением "подразумевается измерение (такдир) одной величины другой [величиной], однородной с ней" [17, с. 108]. Но далее, во введении к шестой книге своей редакции "Начал", он определяет отношение как "количество (каммиййа), получающееся в результате соотнесения (идафа) одного вида количества (камм) с тем, что того же вида" [17, с. 131].

Ал-Абхари в трактате "Улучшение "Начал" Евклида" ("Ислах ал-киتاب ал-Истикисат") [18] определяет отношение как "меру (кадр) одной из двух однородных величин относительно другой" [19, л. 30 об.]. Аналогичная формулировка двумя веками ранее была представлена в комментарии в защиту теории отношений Евклида андалузского математика и астронома Ибн Му'аза ал-Джаййани (XI в.), но о заимствовании говорить не приходится [8].

Что понималось под количеством отношения (это понятие Евклид не определял, но применил в определении составного отношения в шестой книге "Начал", которое считается поздней интерполяцией в текст этого сочинения) следует из рассуждений ат-Туси, также представленных во введении к шестой книге его обработки "Начал": если для измерения величин взять некоторую "единичную" однородную с ними величину, то количество (кадр) любого отношения – это величина (микдар), с которой эта "единичная" величина будет в этом отношении [12, с. 88]. Другими словами, если Е (единичная величина) измеряет некоторую величину С, такую что А относится к В, как Е к С, то количество отношения А к В есть С (или В к А).

Эти рассуждения ат-Туси получили знаковое завершение в первой книге его "Трактата о полном четырехстороннике" ("Китаб аш-шакл ал-катта"), который был составлен в 1260 г., позднее его обработки "Начал", завершенной в 1248 г. Первая книга содержит теорию составных отношений. В этом контексте, исходя из своей концепции количества отношения, ат-Туси утверждает, что любое из отношений может быть названо числом, измеряемым единицей, тем самым расширяя понятие числа на отношения непрерывных величин [14, с. 20–21].

Недостаточная обоснованность всех этих по существу тезисов ат-Туси объясняется не столько жанром первого сочинения (обработка) и основной целью второго (построение полной системы тригонометрии, и плоской, и сферической), сколько вполне вероятным знакомством ат-Туси с соответственными исследованиями его предшественников, прежде всего, с "Комментарием к трудностям во введениях книги Евклида" ал-Хайями. В этом трактате ал-Хайями предвосхищает многие относящиеся к теории отношений утверждения ат-Туси, сопровождая их объяснениями и доказательствами. В частности, он вводит понятие отвлеченной делимой единицы и подходит к обобщению понятия числа на любые положительные действительные числа.

В этой связи примечательно определение числа из "Всеобщей арифметики" И. Ньютона, ставшее новой вехой в развитии учения о числе: "Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов – целое, дробное и иррациональное. Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное – кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей [20, с. 8].

Западноевропейским ученым уже в XII в. были доступны несколько латинских версий "арабских" прочтений "Начал" Евклида. Прежде всего это латинский перевод Герарда Кремонского (1114–1187) неустановленной до сих пор арабской рукописи комментария Абу-л-'Аббаса ан-Найризи (ум. ок. 922) к "Началам" Евклида (сохранились две другие неполные рукописи комментария ан-Найризи, содержащие соответственно первые четыре и первые пять книг комментария). А также латинский перевод Аделарда Батского (ок. 1080 – ок. 1152) одного из первых арабских переводов "Начал" Евклида, осуществленного Абу Мухаммадом ал-Хаджаджем (786–833) (арабский перевод не сохранился).

Комментарий ан-Найризи к "Началам" Евклида также был составлен на основании перевода ал-Хаджаджа, но значительно переработан автором. Герард Кремонский перевел определение отношения Найризи–Евклида следующим образом: "И отношение (proportio) есть некоторое соотношение (relatio) количества, которое существует меж-

ду двумя [количествами] одного рода" (Et proportio est aliqua relatio quantitatis, que est inter duas unius generis) [21, с. 156]. Род отношения оказывается в категории соотносительного, поэтому, вероятно, ан-Найризи счел необходимым разъяснить, что "некоторое соотношение" Евклида означает, что и соотношение (relatio), и соотносительное (relatum) присущи всем категориям, но в случае "некоторого соотношения" двух однородных количеств речь идет о соотношении, причастном категории количества. (Et hoc, quod Euclides dixit "relatio aliqua", voluit intelligi, quod relatio est communis omnibus predicamentis, vel ideo dixit "relatio aliqua", quia relatum communicat predicamentis, et posuit ipsam in una categoria, scilicet quantitate [21, с. 156].)

Латинский перевод определения отношения Аделарда Батского очевидным образом демонстрирует трудности, обусловленные недостаточно разработанной в его время соответствующей терминологией (или даже ее отсутствием): "Отношение (proportio) есть точное соотношение (certitudo) двух каких бы то ни было количеств, [принадлежащих] одному роду, друг с другом [22, с. 145]). (Proportio est quantitatum duarum quantecumque fuerint eiusdem generis quantitatum unius ad alteram certitudo.) Как прокомментировал такую формулировку историк математики Е.А. Зайцев: слово "certitudo" не встречается в классической латыни; в средневековой латыни оно означает "уверенность, обоснованность", а также "гарантию"; в этом последнем смысле certitudo использовалось как синоним другого средневекового слова warandia; в контексте денежного обращения слово warandia имело смысл (гарантированного) сохранения денежной единицей точного значения в ходе ее оборота, что подразумевало периодическое официальное взвешивание соответствующей денежной единицы; иными словами, слово certitude в определении отношения, возможно, указывает на то, что речь идет о нахождении точного соотношения между количествами (например, взвешиванием); у Аделарда, наверное, еще не было специального термина relatio, поэтому он использовал бытовое certitudo.

Список литературы

1. *Евклид*. Начала Евклида. Кн. I–VI / пер. с греч. и ком. Д.Д. Мордухай–Болтовского

- при ред. участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. М.–Л.: ГТТИ, 1950.
2. *Ал-Хасан ибн ал-Хайсам*. Шарх мусадарат Уклидис / Рукопись Научной библиотеки им. Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета № 104 араб., лл. 151–222. (на арабском языке)
 3. *Ван дер Варден Б.Л.* Пробуждающаяся наука I. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. М.: ГИФМЛ, 1959.
 4. *Becker O.* Eudoxus-Studien: I: Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid // Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abd. B: Studien. Bd. 2 (1933). S. 311–330. (Reprinted in: Classics in the history of Greek Mathematics / Ed. by J. Christianidis. Boston Studies in the Philosophy of Science. Vol. 240. Dordrecht/Boston, 2004. P. 191–209).
 5. *Fowler D.* The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction. Oxford: Clarendon Press, 1987.
 6. *Vitrac B.* Umar al-Khayyam et l'anthyphayse: Étude du deuxième Livre de son commentaire "Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide" // 2002. Farhang. № 14. P. 137–192.
 7. *Hogendijk J.P.* Anthyphairtic Ratio Theory in Medieval Islamic Mathematics // From China to Paris. 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas / Ed. by Y. Dold-Samplonius, J.W. Dauben, M. Folkerts, B. van Dalen. Series: Boethius 46. Stuttgart: Steiner, 2002. P. 187–202.
 8. *Plooi E.B.* Euclid's conception of ratio and his definition of proportional magnitudes as criticized by Arabian commentators (including the text in facsimile with translation of the commentary on ratio of Abu 'Abd Allah Muhammad ibn Mu'adh al-Djajani). Rotterdam: Uitgeverij W.J. van Hengel, 1950.
 9. *Al-Khayyam*. Commentaire sur les difficultés de certaines postulats de l'ouvrage d'Euclide (texte et traduction) // Al-Khayyam mathématicien / Éd. par R. Rashed et B. Vahabzadeh. Paris: Éditions Albert Blanchard, 1999. P. 305–383.
 10. *Омар Хайям*. Комментарий к трудностям во введениях книги Евклида // Трактаты / пер. Б.А. Розенфельда. М., 1961. С. 113–146.
 11. *Ibn Sina*. al-Shifa'. Usul Al-Handasah (Mathématique, Géométrie) / Texte établi par A.H. Sabra, A.H. Lotfi, Revu et préfacé par

- I.Madkour*. Cairo: L'Organisation Egyptienne Gиййrale du Livre, 1977 (на арабском языке).
12. *Насир ад-Дин ат-Туси*. Тахрир китаб Ук-лидис. Стамбул: Дар ат-Тиба'а ли'л-Даула ал-Алийа ал-Усманийа, 1216 [1801/2] (на арабском языке).
 13. *Матвиевская Г.П.* Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. Ташкент: Фан, 1967.
 14. *Мухаммед Насирэддин Туси*. Трактат о полном четырехстороннике / пер. под ред. Г.Д. Мамедбейли и Б.А. Розенфельда. Баку: Изд-во АН АзССР, 1952.
 15. *Сабит ибн Корра*. Книга о составлении отношений // Математические трактаты / пер. Б.А. Розенфельда, Дж.ад-Даббаха и др. // Научное наследство. М., 1984. Т. 8. С. 77–101.
 16. *Аристотель*. Сочинения: в 4 т. М., 1976–1984.
 17. [*Псевдо-Туси*]: *Kitab tahrir al-usul li-Uqlidis li-sharih majhul (mansub khata' li Nasir al-Din al-Tusi)*. Anonymous commentary upon Euclid's *Elements* wrongly ascribed to Nasiraddin at-Tusi (Euclidis elementorum geometricorum Libri Tredecim. Ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini. Nunc primum Arabici impressi. Romae: Medicea, M.D.XCIV, 1594) // *Islamic Mathematics and Astronomy* / Ed. by F.Sezgin. Vol.20. Frankfurt am Main: Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science at the Johann Wolfgang Goethe University, 1997 (на арабском языке).
 18. *Лютер И.О.* Первые результаты исследования трактата ал-Абхари "Улучшение "Начал" Евклида" по его дублинской рукописи // Историко-математические исследования. Вып. 15(50). М.: Янус-К, 2014. С. 84–119.
 19. *Асир ад-Дин ал-Абхари*. Ислах ал-китаб ал-Истикисат / Chester Beatty Library (Dublin), Ms Ar 3424, fols.1v–126v (на арабском языке).
 20. *Ньютон И.* Всеобщая арифметика, или Книга об арифметических синтезе и анализе. М.: Издательство АН СССР, 1948.
 21. *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclides commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata* / Ed. M.Curtze // *Euclidis Opera Omnia: Supplementum* / Ed. I.L. Heiberg, H. Menge. Lipsiae: B.G. Teubneri, 1889.
 22. The first Latin translation of Euclid's *Elements* commonly ascribed to Adelard of Bath: books I–VIII and books X.36–XV.2. / Ed. by H.L.L.Busard. Toronto: Pontifical Institute of Medieval Studies, 1983.

Commentaries of Ibn al-Haytham on Euclid's definition of ratio

I. O. Lyuter

Vavilov Institute for the History of Science and Technology, Russian Academy of Sciences

14, Baltiyskaya st., Moscow, 125315, Russia

bastet_13@list.ru; +7 909 1528777

The research deals with the problems called forth by the commentaries of Ibn al-Haytham on Euclid's definition of ratio. In particular: a connection between the definition of ratio of the "ancients" given by al-Haytham and the anthyphairetic ratio theory, which preceded Eudoxus-Euclid theory of ratios, is surmised and substantiated; the tradition according to which the genus of a ratio relates to the category of quantity (according to Euclid, it relates to the category of relation) is traced mainly through the 13th century Arabic editions of Euclid's "Elements"; it is noted that the interpretation of ratio as quantity allowed medieval Arabic mathematicians to extend the concept of number to ratios of continuous quantities.

Keywords: *definition of ratio; quantity; medieval Arabic geometry; Ibn al-Haytham; anthyphairetic ratio theory.*