УДК 681.32

Анализ рекурсивного алгоритма решения задачи о Ханойской башне на основе подстановок

С. Ф. Тюрин
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Комсомольский пр., 29
tyurinsergfeo@yandex.ru; +7-952-32-02-510
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

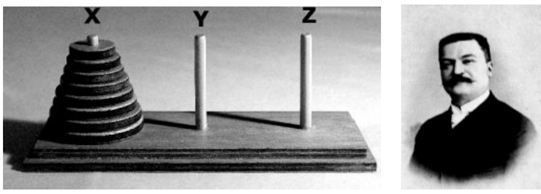
Анализируется система подстановок, описывающая рекурсивный алгоритм решения задачи о Ханойской башне. Показывается, что для трех стержней формируются 6 возможных подстановок переменных, обозначающих стержни и их глобальный и локальный смысл. Приводятся примеры подстановок в задаче для одного, двух и трех дисков.

Ключевые слова: *Ханойская башня; рекурсия; подстановки.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-1-56-61

Введение

Задача о Ханойской башне представляет собой игру, придуманную французским математиком Франсуа Эдуардом Анатолем Люка (1842–1891) [1–3] (рис. 1).



а) б)

Рис. 1. *Задача о Ханойской башне:*
а) игрушка с восемью дисками;
б) ее автор Франсуа Эдуард Анатоль Люка

Азиатская тематика данной задачи, на наш взгляд, связана с тем, что в то время Вьетнам был французской колонией. Ханойская башня – задача оптимального (за кратчайшее число ходов) и своего рода безопасного (*бОльший диск не может лежать на меньшем,* в этом ограничении безопасность и заключается!) перемещения ("перемещения упорядоченности") с одного стержня – объекта X на другой Z с дополнительным вспомогательным объектом Y (между прочим, есть задачи и не с одним Y).

Принцип разной частоты "переноса" дисков разного "диаметра" применяется в системах резервного копирования информации [4], в которых "диаметр" диска как бы соответствует периодичности копирования.

В [1] описано интересное решение задачи на соответствующем графе. Так, для двух дисков получают граф, изображенный на рис. 2.

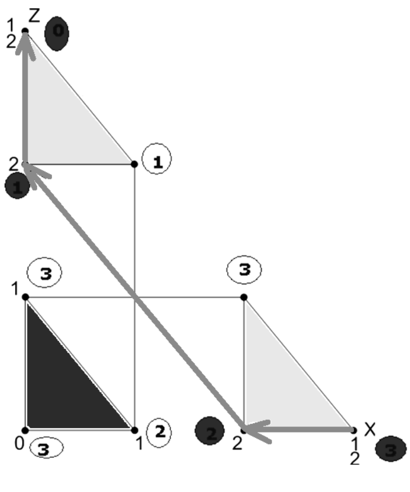


Рис. 2. *Решение задачи о Ханойской башне для* n=2 *на графе*

Имеется много подходов к алгоритмическому решению задачи [5–7]. Так, при четном числе дисков в графе всегда надо двигаться "налево", при нечетном – "направо". Можно стержни расположить в виде треугольника, тогда в нем можно двигаться по и против часовой стрелки, что использует соответствующий алгоритм.

Особый интерес представляет рекурсивный алгоритм [8]. На математических форумах пишут: "Рекурсивное решение напоминает волшебный фокус – не зная решения, а зная только некоторую закономерность задачи, получаем само решение. Фактически указывается не сама последовательность перемещений дисков, а алгоритм сведения задачи к более простому случаю" [3]. Вызывает интерес исследование деталей этого "фокуса" с методической целью, при использовании интерпретации вызовов рекурсивной процедуры в виде соответствующих подстановок.

1. Представление рекурсии системой подстановок

Рекурсивная процедура, например, может иметь вид [8]:

CARRY(n,x,z,y) – перенос дисков с x на z, используя y.

Разбиваем CARRY(n,x,z,y) на две основных подзадачи:

1. CARRY(n-1,x,y,z) башню n-1 (без самого большого диска) перенести с x на y, используя z;

2. CARRY(1,x,z,_) перенести один нижний диск с x на z;

3. CARRY(n-1,y,z,x) перенести башню n-1 перенести с y на z, пользуясь x.

Перенос одного диска выполним как нерекурсивную процедуру ONEDISC(x,z). Получаем схему алгоритма (рис. 3).

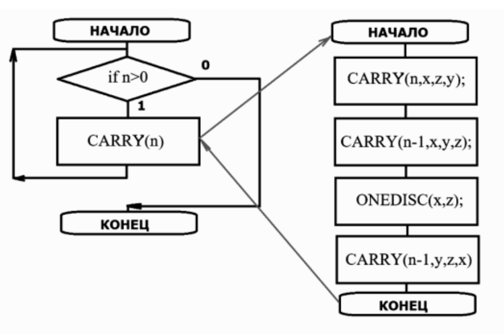


Рис. 3. *Схема алгоритма решения задачи о Ханойской башне*

Представим программу системой подстановок следующим образом:

$$\left\{\begin{matrix} \left(n,\dfrac{x}{x},\dfrac{z}{z},\dfrac{y}{y}\right); \\ n-1,\dfrac{x}{x},\dfrac{y}{y},\dfrac{z}{z}; \\ \dfrac{x}{x},\dfrac{z}{z}; \\ n-1,\dfrac{y}{y},\dfrac{z}{z},\dfrac{x}{x} \end{matrix}\right\}. \qquad (1)$$

В выражение (1) подстановка $\left(n,\dfrac{x}{x},\dfrac{z}{z},\dfrac{y}{y}\right)$ – это CARRY(n,x,z,y: integer); с указанием изменяющегося "смысла" переменных. В числителе – как бы глобальный смысл, в знаменателе – локальный, т. е. на данном этапе. В начале – x "откуда" – исходный стержень=x, z – "куда" – целевой = z, y – "дополнительный" = y.

$n-1,\dfrac{x}{x},\dfrac{y}{y},\dfrac{z}{z}$ – это CARRY(n-1,x,y,z); – перенос подбашни n-1 с исходного на дополнительный стержень, т. е. здесь дополнительный в качестве целевого, а целевой – в качестве дополнительного.

$\dfrac{x}{x},\dfrac{z}{z}$ – ONEDISC(x,z); – перенос большого диска с исходного на целевой стержень.

$n-1,\dfrac{y}{y},\dfrac{z}{z},\dfrac{x}{x}$ – это CARRY(n-1,y,z,x), перенос подбашни n-1 с дополнительного стержня (он теперь в качестве исходного) на целевой стержень (он в качестве дополнительного), а исходный стержень – в качестве целевого.

Таким образом, при вызовах процедуры осуществляется подстановка переменных:

$$\left\{\begin{matrix} \left(n,\dfrac{x}{x},\dfrac{z}{z},\dfrac{y}{y}\right); \\ n-1,\dfrac{x}{x},\dfrac{y}{y},\dfrac{z}{z}; \\ \dfrac{x}{x},\dfrac{z}{z}; \\ n-1,\dfrac{y}{y},\dfrac{z}{z},\dfrac{x}{x}; \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \left(n-1,\dfrac{x}{x},\dfrac{z}{y},\dfrac{y}{z}\right); \\ n-2,\dfrac{x}{x},\dfrac{y}{z},\dfrac{z}{y}; \\ \dfrac{x}{x},\dfrac{z}{y}; \\ n-2,\dfrac{y}{z},\dfrac{z}{y},\dfrac{x}{x}; \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \left(n-2,\dfrac{x}{x},\dfrac{z}{z},\dfrac{y}{y}\right); \\ n-3,\dfrac{x}{x},\dfrac{y}{y},\dfrac{z}{z}; \\ \dfrac{x}{x},\dfrac{z}{z}; \\ n-3,\dfrac{y}{y},\dfrac{z}{z},\dfrac{x}{x}; \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ldots. \qquad (2)$$

Так, во второй "скобке" (2) $\left(n-1,\frac{x}{x},\frac{z}{y},\frac{y}{z}\right)$ получается, поскольку при очередном вызове берется $n-1,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z}$ из первой "скобки".

Получаем $\frac{x}{x},\frac{z}{z};\ \frac{x}{x},\frac{z}{y};\ \frac{x}{x},\frac{z}{z};\ \frac{x}{x},\frac{z}{y};\ldots$

Это первый шаг, зависящий от четности *n*.

Нечетное – $\frac{x}{x},\frac{z}{z}$; четное – $\frac{x}{x},\frac{z}{y}$.

Получаем первые две подстановки:

1) x,z,y,

2) x,y,z и, соответственно, переносы дисков xz и xy.

Обратим еще раз внимание на чередование подстановок на этом первом проходе:

$$\left\{\left(n,\frac{x}{x},\frac{z}{z},\frac{y}{y}\right);\right\}\Rightarrow\left\{\left(n-1,\frac{x}{x},\frac{z}{y},\frac{y}{z}\right);\right\}\Rightarrow\left\{\left(n-2,\frac{x}{x},\frac{z}{z},\frac{y}{y}\right);\right\}\Rightarrow\ldots. \tag{3}$$

Соответственно:

$$\left\{n-1,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z};\right\}\Rightarrow\left\{n-2,\frac{x}{x},\frac{y}{z},\frac{z}{y};\right\}\Rightarrow\left\{n-3,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z};\right\}\Rightarrow\ldots. \tag{4}$$

$$\left\{n-1,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x};\right\}\Rightarrow\left\{n-2,\frac{y}{z},\frac{z}{y},\frac{x}{x};\right\}\Rightarrow\left\{n-3,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x};\right\}\Rightarrow\ldots. \tag{5}$$

Далее от них (после них) идет "переломная" команда либо $\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x}$, либо $\frac{y}{z},\frac{z}{y},\frac{x}{x}$.

Проверим после $\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x}$:

$$\left\{\begin{array}{c}\left(n-i,\frac{x}{y},\frac{z}{z},\frac{y}{x}\right);\\ n-i-1,\frac{x}{y},\frac{y}{x},\frac{z}{z};\\ \frac{x}{y},\frac{z}{z};\\ n-i-1,\frac{y}{x},\frac{z}{z},\frac{x}{y};\end{array}\right\}. \tag{6}$$

Получаем третью подстановку 3) y,z,x и перенос yz.

Проверим после $\frac{y}{z},\frac{z}{y},\frac{x}{x}$:

$$\left\{\begin{array}{c}\left(n-j,\frac{x}{z},\frac{z}{y},\frac{y}{x}\right);\\ n-j-1,\frac{x}{z},\frac{y}{x},\frac{z}{y};\\ \frac{x}{z},\frac{z}{y};\\ n-j-1,\frac{y}{x},\frac{z}{y},\frac{x}{z};\end{array}\right\}. \tag{7}$$

Получаем четвертую подстановку: 4) z,y,x и перенос zy. Подстановки x,y,z, получаемые из $\frac{y}{x},\frac{z}{y},\frac{x}{z}$ и x,z,y из $\frac{y}{x},\frac{z}{z},\frac{x}{y}$ уже были выше. Но получаются еще вот такие: $\frac{x}{z},\frac{y}{x},\frac{z}{y}$ и $\frac{x}{y},\frac{y}{x},\frac{z}{z}$, их еще не было.

Подставляем $\frac{x}{z},\frac{y}{x},\frac{z}{y}$:

$$\left\{\begin{array}{c}\left(n-k,\frac{x}{z},\frac{z}{x},\frac{y}{y}\right);\\ n-k-1,\frac{x}{z},\frac{y}{y},\frac{z}{x};\\ \frac{x}{z},\frac{z}{x};\\ n-k-1,\frac{y}{y},\frac{z}{x},\frac{x}{z};\end{array}\right\}. \tag{8}$$

Таким образом, имеем пятую подстановку 5) z,x,y и перенос zx.

Подставляем $\frac{x}{y},\frac{y}{x},\frac{z}{z}$:

$$\left\{\begin{array}{c}\left(n-l,\frac{x}{y},\frac{z}{x},\frac{y}{z}\right);\\ n-l-1,\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x};\\ \frac{x}{y},\frac{z}{x};\\ n-l-1,\frac{y}{z},\frac{z}{x},\frac{x}{y};\end{array}\right\} \tag{9}$$

Таким образом, получаем подстановку 6) y,x,z и перенос yx. Получаем все 6=3! вариантов перестановок xyz и 6 возможных переносов с одного стержня на другой.

2. Анализ подстановок переменных в рекурсивном алгоритме решения задачи о Ханойской башне при n=1

Проанализируем изменение порядка переменных для n=1. Первый вызов:

$$\left\{\begin{array}{l}\left(1,\frac{x}{x},\frac{z}{z},\frac{y}{y}\right);\\ 0,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z};\\ \frac{x}{x},\frac{z}{z};\\ 0,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x}\end{array}\right\}. \tag{10}$$

Далее $0,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z};$ вызывает снова процедуру с другими значениями переменных:

$$0,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z};\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(0,\frac{x}{x},\frac{z}{y},\frac{y}{z}\right);\\ -1,\frac{x}{x},\frac{y}{z},\frac{z}{y};\\ \frac{x}{x},\frac{z}{y};\\ -1,\frac{y}{z},\frac{z}{y},\frac{x}{x}\end{array}\right\}. \tag{11}$$

Поскольку получаем -1, то этот вызов заканчивается. Перестановки переменных при этом выглядят следующим образом (рис. 4):

$$0,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z};\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(0,\frac{x}{x},\frac{z}{y},\frac{y}{z}\right);\\ -1,\frac{x}{x},\frac{y}{z},\frac{z}{y};\\ \frac{x}{x},\frac{z}{y};\\ -1,\frac{y}{z},\frac{z}{y},\frac{x}{x}\end{array}\right\}.$$

Рис. 4. *Изменение порядка переменных при n=1 и вызове* $0,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z}.$

Далее выполняется единственный перенос (10): $x,z:\ \frac{x}{x},\frac{z}{z}.$

Затем идет вызов $0,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x}:$

$$0,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(0,\frac{x}{y},\frac{z}{z},\frac{y}{x}\right);\\ -1,\frac{x}{y},\frac{y}{x},\frac{z}{z};\\ \frac{x}{y},\frac{z}{z};\\ -1,\frac{y}{x},\frac{z}{z},\frac{x}{y}\end{array}\right\}. \tag{12}$$

Перестановки переменных при этом выглядят следующим образом (рис. 5):

$$0,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(0,\frac{x}{y},\frac{z}{z},\frac{y}{x}\right);\\ -1,\frac{x}{y},\frac{y}{x},\frac{z}{z};\\ \frac{x}{y},\frac{z}{z};\\ -1,\frac{y}{x},\frac{z}{z},\frac{x}{y}\end{array}\right\}.$$

Рис. 5. *Изменение порядка переменных при n=1 и вызове* $0,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x}.$

Поскольку и здесь получаем -1, то и этот вызов заканчивается. Конец процедуры.

Таким образом, осуществляется единственный перенос: $x,z:\ \frac{x}{x},\frac{z}{z}.$

Здесь алгоритм не доходит до переноса "подбашни", так как ее нет, переносится только самый большой диск (а у нас всего один диск, он и есть самый большой!). Всего одна (исходная) подстановка значений переменных. Дерево решения для n=1 имеет вид на рис. 6.

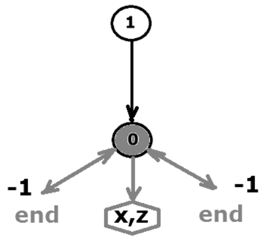


Рис. 6. *Дерево решения для n=1*

3. Анализ подстановок переменных в рекурсивном алгоритме решения задачи о Ханойской башне при n=2, n=3

В случае n=2 "первый проход" имеет вид:

$$\left\{\begin{matrix}\left(2,\frac{x}{x},\frac{z}{z},\frac{y}{y}\right);\\ 1,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z};\\ \frac{x}{x},\frac{z}{z};\\ 1,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x};\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\left(1,\frac{x}{x},\frac{z}{y},\frac{y}{z}\right);\\ 0,\frac{x}{x},\frac{y}{z},\frac{z}{y};\\ \frac{x}{x},\frac{z}{y};\\ 0,\frac{y}{z},\frac{z}{y},\frac{x}{x};\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\left(0,\frac{x}{x},\frac{z}{z},\frac{y}{y}\right);\\ -1,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z};\\ \frac{x}{x},\frac{z}{z};\\ -1,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x};\end{matrix}\right\}. \tag{13}$$

Далее, рассуждая аналогично вышеописанному, получаем 2-1-0 (перенос 1)-1 (перенос 2)-1(перенос 3 после "перелома"). Дерево решения для n=2 изображено на рис. 7.

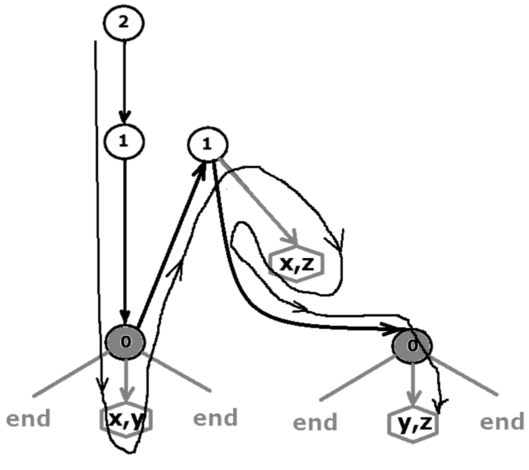


Рис. 7. *Дерево решения для n=2*

В случае n=3 получим (рис. 8):

$$\left\{\begin{matrix}\left(3,\frac{x}{x},\frac{z}{z},\frac{y}{y}\right);\\ 2,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z};\\ \frac{x}{x},\frac{z}{z};\\ 2,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x};\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\left(2,\frac{x}{x},\frac{z}{y},\frac{y}{z}\right);\\ 1,\frac{x}{x},\frac{y}{z},\frac{z}{y};\\ \frac{x}{x},\frac{z}{y};\\ 1,\frac{y}{z},\frac{z}{y},\frac{x}{x};\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\left(1,\frac{x}{x},\frac{z}{z},\frac{y}{y}\right);\\ 0,\frac{x}{x},\frac{y}{y},\frac{z}{z};\\ \frac{x}{x},\frac{z}{z};\\ 0,\frac{y}{y},\frac{z}{z},\frac{x}{x};\end{matrix}\right\}. \tag{14}$$

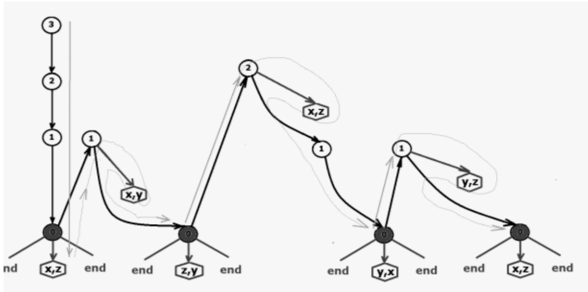


Рис. 8. *Дерево решения для n=3*

Выводы

Таким образом, использование формализации в виде подстановок, позволяет проанализировать изменение значений переменный при рекурсивных вызовах. Этот подход объясняет принцип выбора переноса диска в алгоритме решения задачи о Ханойской башне, что можно использовать в методических целях при проведении занятий по дисциплине "Алгоритмы и анализ сложности".

Список литературы

1. *Коршунов Ю.М.* Математические основы кибернетики: учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1987. 496 с.
2. *Ханойские* башни и Эдуард Люка. URL: http://ipuzzles.ru/tower-of-hanoi/eduard-luka-tower-of-hanoi/ (дата обращения: 10.01.2018).
3. *Окулов С.М., Лялин А.В.* Ханойские башни. URL: http://files.lbz.ru/pdf/cC2810-9-ch.pdf (дата обращения: 10.01.2018).
4. *Схема* резервного копирования "Ханойская башня". URL: http://www.acronis.com/ru-ru/support/documentation/ABR10/index.html #1432.html (дата обращения: 11.12.2017).
5. *Задача* о ханойской башне. URL: http://math-info.hse.ru/f/2011-12/ling/ lecture1.pdf (дата обращения: 12.01.2018).
6. *Савин А.* Ханойская башня. URL: http://ipuzzles.ru/tower-of-hanoi/savin-tower-of-hanoi/ (дата обращения: 17.01.2018).
7. *Тюрин С.Ф.* Задача о Ханойской башне // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. 2016. №2(18). С. 85–97.
8. *Миков А.И., Лапина О.Н.* Вычислимость и сложность алгоритмов: учеб. пособие. Краснодар: Кубан. гос. ун-т, 2013. 79 с.

A study of the recursive algorithm for solving the Tower of Hanoi problem on the basis of permutations

S. F. Tyurin
Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
tyurinsergfeo@yandex.ru; +7 952-320-02-510

The paper analyzes a system of permutations describing the recursive algorithm for solving the problem of the Tower of Hanoi. It is shown that for the three rods there are 6 possible permutations of the variables denoting the rods and their global and local meaning. Examples of permutations in the problem for one, two and three disks are given.

Keywords: *Tower of Hanoi; recursion; permutations.*