ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2017 Математика. Механика. Информатика Вып. 4(39)

УДК 531.38

# Движение твердого тела с заданными интегралами

**Н. Н. Макеев**
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Рассматривается задача о нахождении приближенных аналитических характеристик движения абсолютно твердого тела, обладающего осевой кинетической симметрией, вокруг неподвижного полюса в однородном стационарном поле силы тяжести. Движение тела изначально задается инволютивной системой независимых первых алгебраических интегралов в открытой связной области фазового пространства. Найдены явные выражения для углов Эйлера, определена геометрия движения тела и получено условие существования его регулярной прецессии.

**Ключевые слова:** *абсолютно твердое тело; алгебраические первые интегралы; динамическая система; интегрирование в квадратурах.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-4-47-52

## Введение

В некоторых задачах динамики твердого тела, движущегося в силовых полях, задается система уравнений движения, интегрируемая по Буру–Лиувиллю, обладающая независимыми первыми алгебраическими интегралами. Эти интегралы определены в заданной открытой связной области фазового пространства.

Очевидно, что первые интегралы динамической системы являются следствием уравнений движения тела и как таковые они составляют *необходимые условия.* Однако как известно [1], возможны случаи, при которых система этих интегралов может составлять и *достаточные условия.*

В связи с этим представляет интерес подход, при котором в постановке задачи о движении твердого тела его движение задается объединенной системой независимых первых алгебраических интегралов и присоединенными к ней *замыкающими уравнениями движения.* Число присоединенных уравнений движения тела должно быть таково, чтобы общее число заданных интегралов и замыкающих уравнений обеспечивало бы аналитическую замкнутость объединенной системы интегралов и уравнений относительно содержащихся в ней переменных.

В настоящей статье заданное интегральное многообразие динамической системы твердого тела, обладающего осевой кинетической симметрией, представлено объединенной системой четырех независимых первых алгебраических интегралов и присоединенного к ним замыкающего дифференциального уравнения движения. Предполагается, что заданное в конечной области фазового пространства интегральное многообразие составлено из интегралов некоторой многопараметрической автономной динамической системы, характеризующей движение тела.

## 1. Основные предпосылки

Абсолютно твердое тело движется вокруг неподвижного полюса $O$ в постоянном однородном поле силы тяжести.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе $O$: неподвижный базис $Z$ ($Oz_1z_2z_3$), неизменно связанный с инерциальным пространством, и подвижный базис $X$ ($Ox_1x_2x_3$), оси которого направлены по главным в полюсе $O$ направлениям тензора инерции тела (*главный координатный базис*).

Пусть $\mathbf{s}$ ($s_1$, $s_2$, $s_3$) − опорный орт, неизменно связанный с координатным базисом $Z$, и устанавливающий ориентацию базиса $X$ относительно базиса $Z$.

Обозначим: $A_1, A_2, A_3$ – главные в полюсе $O$ осевые моменты инерции тела; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты абсолютной угловой скорости тела; $x^c{}_1$, $x^c{}_2$, $x^c{}_3$ – координаты центра масс тела. Здесь и всюду далее координаты всех указанных векторов и элементы матрицы тензора инерции тела отнесены к координатным осям базиса $X$.

Предполагается, что тело обладает осью кинетической симметрии, несущей его центр масс, согласно условиям

$$A_1 = A_2 = A, \qquad x_1^c = x_2^c = 0, \quad x_3^c \neq 0. \quad (1)$$

Следуя принятому подходу, зададим движение тела системой соотношений [2]

$$V_1 \equiv A(\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2) + A_3 \omega_3 s_3 = h_1,$$
$$V_2 \equiv A_3 \omega_3 - B(\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2) = h_2,$$
$$V_3 \equiv (\omega^2 + \Omega^2) f^2(s_3) = h_3^2, \quad f(s_3) = A + B s_3, \quad (2)$$

определенных для значений $t \in [0, +\infty) \equiv T$.

В равенствах (2) обозначено: $B$ – приведенный (эффективный) осевой момент инерции тела, зависящий от величины его массы и заданного характерного линейного размера $\ell$:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2, \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad (3)$$

$g$ − ускорение силы тяжести, $h_i$ ($i$ = 1, 2, 3) − постоянные интегрирования ($h_3 > 0$).

Равенства (2) (с учетом условий (1)) трактуются как система независимых первых алгебраических интегралов динамической системы твердого тела, к которой следует присоединить тривиальный интеграл

$$V_4 \equiv |\mathbf{s}|^2 = 1. \quad (4)$$

В этой системе параметр $B$ пропорционален постоянной $\ell$, а величина $\Omega$, определяемая равенством (3), соответствует частоте колебаний гипотетического математического маятника, находящегося в однородном стационарном поле силы тяжести.

Соотношение $V_1$ (2) является интегралом проекции кинетического момента тела на ось с направляющим ортом $\mathbf{s}$ и представляет собой интеграл Э. Нетер [3], порожденный группой симметрий.

Равенство $V_2$ (2) представляет собой обобщение соответствующего первого интеграла в классической задаче Лагранжа для твёрдого тела и переходит в него в частном случае, при котором $B = 0$ ($\ell = 0$). Этот интеграл выражает свойство кинетической симметрии тела, обусловленное условиями (1).

Выражение $V_3$ (2) − обобщенный интеграл энергии, являющийся модификацией такового, содержащегося в классической задаче Лагранжа и переходящий в него в пределе при $\ell \to 0$ [2].

Интеграл $V_4$ (4) выражает свойство инвариантности относительно действия группы поворотов по отношению к силовым линиям поля силы тяжести. Векторное поле этой группы порождается ортом $\mathbf{s}$.

Первые интегралы (2), (4) составляют *поле интегралов* задачи, сформулированной далее, и образуют в нем детерминированную инволютивную систему. К системе интегралов (2), (4) следует присоединить замыкающее уравнение, заданное в виде [2]

$$\dot{s} = \mp [f(s)]^{-1} \sqrt{P_4(s)} \qquad (-1 < s < 1), \quad (5)$$

где обозначено: $P_4$ − полином четвертой степени (*гироскопическая функция*), $s = s_3$,

$$P_4(s) = [H - \Omega^2 f^2(s)](1 - s^2) - \Phi^2(s), \quad (6)$$
$$H = h_3^2 - D^2,$$
$$D = A_3^{-1}(A h_2 + B h_1),$$
$$\Phi(s) = h_1 - h_2 s.$$

Таким образом, согласно соотношениям (1), (2), данный случай движения твердого тела является *обобщением классического случая Лагранжа*, при котором $B\ell \neq 0$.

## 2. Постановка задачи

Введем открытую связную область $\mathbf{D}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s})$ фазового пространства $W^5 = R^5_{\boldsymbol{\omega}} \times U_{\mathbf{s}}$, определенного в $R^6$. Область $\mathbf{D}$ содержит многообразие возможных значений $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s})$ данных вектор-функций. В этой области однозначно определен каждый из заданных независимых первых интегралов (2), (4) динамической системы твердого тела.

***Ставится задача:*** на основе заданных независимых интегралов системы (2), (4) и присоединенного к ним замыкающего уравнения (5) найти *аналитические оценки* для вектор-функций $\boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{s}(t),$ характеризующих с определенной степенью точности движение твердого тела для значений $t \in T$. □

Аналогичная задача для твердого тела в точной постановке рассмотрена в работе [2], где приведён лишь качественный анализ его движения.

### 3. Оценки характера движения тела

Нахождение оценочных характеристик движения тела сводится к интегрированию определяющего уравнения (5) для значений $t \in T$; однако его точное интегрирование в конечном виде приводит к сложным и громоздким аналитическим выражениям. При этом для решения поставленной задачи достаточно ввести ограничение $B << A$, в силу чего

$$f(s) = A(1+\varepsilon s), \tag{7}$$

где $\varepsilon = B/A$ – малый параметр $(0<\varepsilon<<1)$.

Условие (7) в определенном смысле характеризует степень "отклонения" геометрии распределения массы тела от его соответствующего распределения в классической задаче Лагранжа, в которой приняты условия (1).

Представим полином (6) в виде стандартного полинома Клебша [4, с. 10]

$$P_4(s) = a_0 s^4 + 4a_1 s^3 + 6a_2 s^2 + 4a_3 s + a_4, \tag{8}$$

с коэффициентами

$$a_0 = (B\Omega)^2,\ 2a_1 = AB\Omega^2,$$
$$6a_2 = -[(B^2 - A^2)\Omega^2 + h_2^2 + H],$$
$$2a_3 = h_1 h_2 - AB\Omega^2,\ a_4 = H - (A\Omega)^2 - h_1^2.$$

Предполагается, что все корни полинома (8) – простые и $s = s_*$ – один из них. В силу этого для уравнения (5) с учетом условия (7) согласно [5, с. 322] получаем

$$s(t) = \left[G + \frac{6P_*'}{24\wp(t;\, g_2, g_3) - P_*''}\right][1+\mathrm{O}(\varepsilon)], \tag{9}$$

где $P_* = P_4(s_*)$; штрих обозначает производную по переменной $s$; $G$ – постоянная такая, что $s(0) = s^0$ ($s^0$ – заданное значение); $\wp$ – символ эллиптической функции Вейерштрасса второго порядка с инвариантами [4]

$$g_2 = a_0 a_4 + 3a_2^2 - 4a_1 a_3,$$

$$g_3 = \det\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix},$$

причем $a_r\ (r = 0,\dots,4)$ − коэффициенты полинома (8). Здесь и всюду далее нулевой индекс относится к значениям величин при $t = 0$.

Используя зависимость (9), можно выразить величины, характеризующие движение тела, в функции $t$. Для этого предварительно получим выражения данных величин в функции $s$ с учетом условия (7).

Из соотношения (2) для интеграла $V_3$ получаем

$$\omega^2 = A^{-2}h_3(1-2\varepsilon s) - \Omega^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^2),$$

а из равенств для $V_1, V_2$ при $D \neq 0$ находим

$$\omega_3 = D f^{-1}(s), \tag{10}$$

откуда в силу условия (7) следует

$$\omega_3 = k(1-\varepsilon s) + \mathrm{O}(\varepsilon^2) \qquad (k = A^{-1}D).$$

Сопоставим орту $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$ вектор углов Эйлера $\boldsymbol{\Psi}\ (\theta, \psi, \varphi)$ так, что [6, 7]

$$(s_1, s_2, s) = (\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$$
$$(0<\theta<\pi). \tag{11}$$

Согласно кинематическим уравнениям Эйлера, отнесенным к базису $X$, для любых значений $t \in T$ имеем тождество [6]

$$\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2 = \dot\psi(1-s^2), \tag{12}$$

а, исключая величину $A_3\omega_3$ из равенств (2) для $V_1, V_2$, имеем [7]

$$\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2 = \Phi(s) f^{-1}(s). \tag{13}$$

Из соотношений (12), (13) следует

$$\dot\psi = \Phi(s)[f(s)(1-s^2)]^{-1}. \tag{14}$$

Согласно зависимостям (9), (11) получаем

$$\dot\theta = \frac{P_*'\dot Q(t)}{4[Q(t)-Q_*]^2\sqrt{1-s^2}}\left[1+\mathrm{O}(\varepsilon)\right], \tag{15}$$

где обозначено $Q(t) = \wp(t;\, g_2, g_3)$.

Равенство (15) имеет место при условии

$$Q(t) \neq \frac{1}{24}P_*'' = Q_*.$$

В силу представления (9) и кинематического уравнения Эйлера относительно *X*, выражающего величину $\omega_3$, находим

$$\dot{\varphi} = k(1 - \varepsilon s) - K(s)s + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \qquad (16)$$

где $K(s)$ обозначает правую часть равенства (14). Из соотношения (16) следует

$$\varphi(t) = \varphi^0 + kt - \int_0^t K(s)s\,d\vartheta - \varepsilon F(t) + \mathrm{O}(\varepsilon^2), \qquad (17)$$

где обозначено

$$F(t) = k\int_0^t s\,d\vartheta. \qquad (18)$$

Применяя формулу интегрирования [8, с. 130]

$$\int \frac{dt}{Q(t) - Q(t_*)} = [\dot{Q}(t_*)]^{-1}\left[2t\zeta(t_*) + \ln\frac{\sigma(t - t_*)}{\sigma(t + t_*)}\right] \qquad (19)$$

и соотношение (9), в результате получаем выражение величины $F(t)$ (18) через $\zeta$ – и $\sigma$ – функции Вейерштрасса [4, 8]. Здесь $t = t_*$ – момент времени, отвечающий значению $Q(t_*) = Q_*$.

Линейная по $\varepsilon$, $t$ часть равенства (17) в силу соотношения (19) принимает вид

$$\varphi(t) \approx \varphi^0 + \left[1 - 2\varepsilon\frac{\zeta(t_*)}{\dot{Q}(t_*)}\right]kt.$$

Квадратуры, получаемые из равенств (14)–(16) в силу зависимости (9), полностью определяют с точностью до $\varepsilon$ ориентацию твердого тела относительно координатного базиса *Z*. Это обусловливает принципиальную возможность установить на основе кинематических уравнений Эйлера, отнесенных к координатному базису *X*, скоростной режим движения твердого тела в осях этого базиса, а также явные зависимости вида $s_1(t)$, $s_2(t)$ для любых значений $t \in T$.

## 4. Геометрия движения

Согласно равенствам (2), (10), интеграл энергии при условии $D\Omega \neq 0$ представляется в виде

$$D^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - H\omega_3^2 + (D\Omega)^2 = 0. \qquad (20)$$

Равенство (20) является уравнением несущей годографической поверхности *S*, находящейся в пространстве $\omega_j$ – координат (**ω** – пространстве), на которой расположена **ω**-кривая – *подвижный годограф вектора* **ω** твердого тела [9].

Эта поверхность является невырожденной центральной при $HD \neq 0$. Область поверхности *S*, содержащая годографическую кривую, при $A \neq B$ ограничивается условием

$$\omega^2(t) \le \omega_m^2,$$

где обозначено

$$\omega_m^2 = (A - B)^{-2}h_3^2 - \Omega^2.$$

Рассмотрим случаи, для которых поверхность *S* является действительной геометрической фигурой. Пусть выполняется условие

$$|Ah_2 + Bh_1| < A_3\,|h_3|.$$

Тогда $H > 0$ и поверхность (20) является двуполостным гиперболоидом с действительной полуосью длиной $|D|\Omega$ и мнимыми полуосями с длинами $\Omega$.

Случай, при котором $H \le 0$, для действительной несущей поверхности не имеет места; при этом случай распадения данной поверхности здесь не рассматривается.

Характерные функции $f(s), \Phi(s)$ устанавливают характер режима движения оси кинетической симметрии тела. Функция $\Phi(s)$, содержащаяся в соотношениях (6), (13), (14), определяет режим движения фиксированной точки (апекса) *N* данной оси относительно координатного базиса *X*.

Методом Штурма можно показать, что для полинома $P_4$ в интервале $s \in (-1, 1) = I$ существуют два действительных простых корня $\nu_1 < \nu_2$ таких, что $(\nu_1, \nu_2) \subset I$. Тогда, если функция $\Phi(s)$ знакопостоянна для $s \in (\nu_1, \nu_2)$, то режим движения апекса *N* является неособым (регулярным), а его траектория на единичной сфере Римана [10] не содержит особенностей.

В остальных случаях движение апекса *N* носит сингулярный характер. В частности, на сферическом слое сферы Римана траектория апекса содержит точки самопересечения. Если выполняются условия $\Phi(\nu_1) = \Phi(\nu_2) = 0$, то данная траектория содержит точки заострения, расположенные на траекторных параллелях сферы Римана.

Согласно уравнению (5) для значений $s = s_p \in I,$ при которых $f(s_p) = 0,$ величина $\dot{s}$ имеет полюс, что обусловливает ударно-импульсное воздействие на данное тело. Однако, как это следует из очевидных соображений, в этом случае должно быть $A \le B,$ что противоречит основному условию принятого приближения.

## 5. Особый случай движения

Пусть вне ограничения $B << A$ выполняются условия

$$AB\Omega^2 = h_1 h_2, \quad H = (A\Omega)^2 + h_1^2. \quad (21)$$

Тогда коэффициенты полинома (8) $a_3 = a_4 = 0$ и $P_4$ имеет двукратный нулевой корень. Согласно равенствам (21) получаем

$$2a_1 = h_1 h_2,\ a_0 = A^{-1} B h_1 h_2,\ -6a_2 = \\ = (B\Omega)^2 + h_1^2 + h_2^2,$$

а уравнение (5) принимает вид

$$f(s)\dot{s} = \mp s\sqrt{P_2(s)}, \quad (22)$$

где обозначено

$$P_2(s) = a_0 s^2 + 4a_1 s + 6a_2.$$

Решение $s(t)$ уравнения (22) для $s \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ может быть получено в конечном виде и выражено в элементарных функциях [5].

Этот случай соответствует вырождению эллиптической функции Вейерштрасса в эллиптическую функцию с инвариантами $g_2 = 3a_2^2,\ g_3 = -a_2^3 > 0$ и с бесконечным действительным периодом.

Здесь $e_1 = e_2 = a_2/2,\ e_3 = -a_2 > 0,$ где $e_j$ – действительные корни стандартного полинома Вейерштрасса, построенного для $\wp$-функции. Согласно [4] в этом случае для $\wp$-функции имеет место вырожденное представление

$$\wp(t; 3a_2^2, -a_2^3) = \frac{a_2}{2}\left[1 + 3\,\mathrm{sh}^{-2}(\sqrt{1.5a_2}\cdot t)\right].$$

## 6. Регулярная прецессия

Пусть выполняются условия

$$P_4(s_*) = P_4'(s_*) = 0. \quad (23)$$

Тогда, согласно равенствам (9), (15), для $t \in T$ с точностью до $\varepsilon$ имеем $s(t) = s^0$, а в силу соотношений (14), (16) с указанной точностью получаем, соответственно:

$$\dot{\psi}(t) = \mathrm{const}, \quad \dot{\varphi}(t) = \mathrm{const} \quad (t \in T).$$

Таким образом, для того чтобы движение твердого тела являлось регулярной прецессией, происходящей с точностью до $\varepsilon$, достаточно, чтобы выполнялись условия (23), т.е., чтобы значение $s = s_*$ являлось корнем для полиномов $P_*,\ P_*'$.

Следует учесть, что данное утверждение относится к телу, обладающему осевой кинетической симметрией в соответствии с условиями (1).

## Заключение

Приведенная постановка задачи о движении твердого тела, при которой задаются независимые первые интегралы, характерна для обратных задач динамики. При этом изначально заданная система первых интегралов как интегральное многообразие определяет некоторое *свойство движения тела* [11]. Эта система позволяет восстановить систему его динамических уравнений, обладающую данными первыми интегралами.

Совокупность независимых первых интегралов (2), (4) составляет полное множество, образующее линейное пространство над собственно евклидовом пространством параметров этой задачи при выборе данных интегралов в качестве базисных.

Системе заданных интегралов можно сопоставить *присоединенные* (или *условные* по Биркгофу [12]) интегралы. Вообще к ним относятся интегралы, являющиеся следствием данных первых интегралов, но не тождественные им. В частности, для системы (2), (4) такими интегралами являются интеграл (10), а также инвариант [2]

$$B(\boldsymbol{\omega} \bullet \mathbf{s}) + (A - A_3)\omega_3 = h, \quad (24)$$

где $h$ – постоянная интегрирования.

Подразумевается, что из расширенной системы интегралов (2), (4), (10), (24) можно выделить подсистему, составленную из любых независимых четырех интегралов, принятых в качестве заданных базовых интегралов. Остальные интегралы этой системы можно отнести к присоединенным интегралам.

**Список литературы**

1. *Bottema O.* First integrals of dynamical systems // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik. 1957. B. 8, №. 5. S. 418−420 / пер. на рус.: Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1958, № 6 (52). С. 159−161.
2. *Белецкий В.В.* Двуногая ходьба. Модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 288 с.
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / пер. с англ. М.: Физматлит. 1967. Т. 3. 300 с.
5. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа: в 2 ч. М.: Физматлит. 1963. Ч. 2. 516 с.
6. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики: в 2 ч. М.: Наука, 1966. Ч. 2. 332 с.
7. *Аппель П.* Теоретическая механика: в 2 т. / пер. с франц. М.: Физматлит. 1960. Т. 2. 488 с.
8. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции / пер. с нем. М.: Наука, 1964. 344 с.
9. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твёрдого тела. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1965. 221 с.
10. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.432 с.
11. *Галиуллин А.С.* Обратные задачи динамики. М.: Физматлит. 1981. 144 с.
12. *Биркгоф Дж.* Динамические системы / пер. с англ. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1999. 408 с.

# A rigid body motion at specified integrals

**N. N. Makeyev**
Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences;
24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

The paper deals with the problem of finding approximate analytical characteristics of an axially symmetric perfectly rigid body's rotation around a fixed pole in a uniform stationary gravitational field. The body motion is initially set by an involutive system of independent algebraic first integrals in an open connected domain of phase space. The explicit expressions for Euler angles were found, also the geometry of the body movement was determined and the existence condition for its regular precession was obtained.

**Keywords:** *perfectly rigid body; algebraic first integrals; dynamic system; integration in quadratures.*