УДК 530.12:531.551

Спонтанное нарушение симметрии и космологическая модель с вращением для метрики типа IX по Бьянки

Е. В. Кувшинова

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

kuvlenka@narod.ru; 8 (342) 239-65-60

Рассматривается эффект спонтанного нарушения калибровочной симметрии в космологической модели с расширением и вращением; построена стационарная космологическая модель с вращением для метрик типа IX по Бьянки.

Ключевые слова: *спонтанное нарушение симметрии; вращение модели; уравнения Эйнштейна.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-4-38-42

Спонтанное нарушение калибровочной симметрии в космологии, в том числе в космологических моделях с вращением исследовалось в ряде работ ([1, 3] и др.). Нами построена [2] замкнутая космологическая модель с вращением с метрикой вида

$$ds^2=(dt+\lambda C\omega^1)^2-(kC\omega^1)^2-\\-C^2\left((\omega^2)^2+(\omega^3)^2\right) \quad (1)$$

где $C=C(t),\ \ k,\lambda=const,\ \ \omega^1,\omega^2,\omega^3$ есть 1-формы, удовлетворяющие структурным отношениям типа IX по Бьянки.

Параметры модели: вращение $\omega=\dfrac{\lambda}{2C(t)}$, ускорение $a=\dfrac{\dot{C}(t)\lambda}{C(t)k}$. При этом мы предполагаем, что одним из источников гравитационного поля является сопутствующая идеальная жидкость.

Рассмотрим самодействующее комплексное скалярное поле $\varphi(t)$ в искривленном пространстве с метрикой (1), удовлетворяющее уравнению

$$g^{ik}\nabla_i\nabla_k\phi+M^2\phi-\frac{1}{6}\tilde{R}\phi+\frac{\Lambda}{3}\phi^*\phi^2=0, \quad (2)$$

$(\Lambda>0)$, которое получается из плотности лагранжиана:

$$L=\sqrt{-g}[g^{ik}\partial_i\phi^*\partial_k\phi-M^2\phi^*\phi+\\+\frac{\tilde{R}}{6}\phi^*\phi-\frac{\Lambda}{6}(\phi^*\phi)^2], \quad (3)$$

инвариантной относительно калибровочных преобразований вида

$$\varphi\to\varphi\exp(i\alpha),\quad \varphi^*\to\varphi^*\exp(-i\alpha).$$

Обозначим |0> гейзенберговское вакуумное состояние, определенное при $t=t_{pl}$. Из пространственной однородности (1) вытекает, что если вакуумное среднее φ отлично от нуля, то оно может зависеть только от *t*:

$$<0|\varphi(t,x,y,z)|0>=<0|\varphi(t)|0>=\ q(t). \quad (4)$$

Вследствие С-инвариантности состояния |0> величина q – вещественна. Отличие q от нуля означает спонтанное нарушение калибровочной симметрии. При этом в ходе усреднения (2) по состоянию |0> предполагается в древесном приближении

$$<0|\phi^*\phi^2|0>\approx\\ \approx<0|\phi^*|0><0|\phi|0>^2=\ q^3. \quad (5)$$

Для метрики (1): $g=-C^6\sin x^1k^2$,

$$\tilde{R} = -\frac{\left(12\ddot{C}Ck^2 - 12\ddot{C}C\lambda^2 + 12\dot{C}^2k^2 - 12\dot{C}^2\lambda^2\right)}{2C^2k^2} - $$
$$ -\frac{\left(-k^4 + k^2\lambda^2 - 4k^2\right)}{2C^2k^2},$$
$$(C \equiv C(t)),\ R_0^0 = -\frac{3\ddot{C}\left(k^2 - \lambda^2\right)}{Ck^2}$$

Исследуем эффект спонтанного нарушения симметрии скалярного поля φ в пространстве-времени с метрикой (1) в двух случаях:

1) для $C(t)=const$, усредненное уравнение (2) для метрики (1) примет вид

$$\ddot{q} - \alpha q + \beta q^3 = 0, \qquad (6)$$

где

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt},$$
$$\alpha = \left[\frac{\left(k^4 - k^2\lambda^2 + 4k^2 - 12M^2C^2k^2\right)}{12C^2\left(k^2 - \lambda^2\right)}\right],$$
$$\beta = \frac{\Lambda k^2}{3\left(k^2 - \lambda^2\right)},\ \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

При этом можно считать q=const, ввиду того, что C(t)=const.

Тогда уравнение (6) имеет два ненулевых решения:

$$q_{2,3} = \pm\left(\frac{k^2 - \lambda^2 + 4 - 12M^2C^2}{4C^2\Lambda}\right)^{1/2}, \qquad (7)$$
$$\textit{при}\ k^2 - \lambda^2 + 4 - 12M^2R^2 > 0\ \textit{и}\ q_1 = 0.$$

Предпочтительность выбора решений $q_{2,3} \neq 0$ из соображений минимума энергии дает возможность выявить спонтанное нарушение калибровочной симметрии. В этом случае несимметричное вакуумное состояние |0> энергетически более выгодно, чем симметричный вакуум. Используем метрический тензор энергии – импульса для скалярного поля φ:

$$T_\mu^\nu = \nabla_\mu\phi^*\nabla^\nu\phi + \nabla^\nu\phi^*\nabla_\mu\phi - \delta_\mu^\nu[\nabla^\alpha\phi^*\nabla_\alpha\phi -$$
$$-M^2\phi^*\phi] - \frac{1}{3}[-R_\mu^\nu + \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu\tilde{R} + \nabla^\nu\nabla_\mu - \qquad (8)$$
$$-\delta_\mu^\nu\Box]\phi^*\phi + \frac{\Lambda}{6}\delta_\mu^\nu(\phi^*\phi)^2.$$

где R_μ^ν – тензор Риччи, δ_μ^ν – единичный тензор.

Вакуумная плотность энергии для данной модели равна

$$\text{E}=\langle 0 | T^0{}_0 | 0\rangle = \left(M^2 + \frac{1}{3}R_0^0 - \frac{1}{6}\tilde{R}\right)q^2 +$$
$$+\frac{\Lambda}{6}q^4. \qquad (9)$$

Подставляем решения уравнения (6) в (9) и находим:

$$\text{E}(q_1) = 0,$$
$$\text{E}(q_{2;3}) = -\frac{(k^2 - \lambda^2 + 4 - 12M^2C^2)^2}{96C^4\Lambda} < 0. \qquad (10)$$

Мы рассматриваем космологическую модель, где R и M – постоянные, за счет варьирования параметров источников гравитационного поля можно менять λ и k, тогда эффект спонтанного нарушения симметрии будет при выполнении условия $12M^2C^2 < k^2 - \lambda^2 + 4$.

Таким образом, энергетически более выгодным будет несимметричное вакуумное состояние |0> ($q \neq 0$), что означает спонтанное нарушение симметрии вакуума.

2) для R(t)=vt, M=0, уравнение (2), усредненное по гейзенберговскому вакуумному состоянию с учетом древесного приближения имеет вид:

$$\ddot{q} + \frac{3}{t}\dot{q} - \frac{\left(k^4 - k^2\lambda^2 + 4k^2 - 12v^2\left(k^2 - \lambda^2\right)\right)}{12v^2\left(k^2 - \lambda^2\right)}\frac{q}{t^2} +$$
$$+\frac{k^2}{3\left(k^2 - \lambda^2\right)}\Lambda q^3 = 0. \qquad (11)$$

Сделав замену $q = \frac{f(t)}{t}$, получим

$$\ddot{f}t^2 + \dot{f}t - \left(\frac{k^4 - k^2\lambda^2 + 4k^2}{12v^2\left(k^2 - \lambda^2\right)}\right)f +$$
$$+\frac{k^2}{3\left(k^2 - \lambda^2\right)}\Lambda f^3 = 0, \qquad (12)$$

сделаем замену $\tau = \ln t$, получим

$$f'' - \left(\frac{k^4 - k^2\lambda^2 + 4k^2}{12v^2\left(k^2 - \lambda^2\right)}\right)f +$$
$$+\frac{k^2}{3\left(k^2 - \lambda^2\right)}\Lambda f^3 = 0, \qquad (13)$$

где $f' = \frac{df}{d\tau}$.

Уравнение Дюффинга (13) имеет два устойчивых решения и одно неустойчивое:

$$f_1 = 0,\ f_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{k^2-\lambda^2+4}{\Lambda}}\cdot\frac{1}{2v}, \qquad (14)$$

$$k^2-\lambda^2+4>0,\ \Lambda>0.$$

В качестве начальных условий для решения (13) возьмем:

$$f(t_{pl}) = \pm\sqrt{\frac{k^2-\lambda^2+4}{\Lambda}}\cdot\frac{1}{2v},\ f'(t_{pl}) = 0.$$

Уравнение (13) имеет ненулевое решение, соответствующее перестройке вакуума в состояние с нарушенной калибровочной симметрией.

Тогда решения уравнения (11):

$$q_1 = 0,\ q_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{k^2-\lambda^2+4}{\Lambda}}\cdot\frac{1}{2vt}. \qquad (15)$$

Обсудим теперь вопрос о предпочтительности вакуумного состояния |0> с энергетической точки зрении. Подставим (15) в выражение (9) и, учитывая также, что $R(t)=vt$, $M=0$, получим:

$$E(q_1) = 0,$$

$$E(q_{2;3}) = \frac{\left(48v^2\left(k^2-\lambda^2\right)-k^4\right)\left(k^2-\lambda^2+4\right)}{8t^4v^4k^2\Lambda} + \frac{\left(k^2\lambda^2-4k^2\right)\left(k^2-\lambda^2+4\right)}{8t^4v^4k^2\Lambda}. \qquad (16)$$

При выполнении условия

$$v^2 < \frac{k^4-k^2\lambda^2+4k^2}{48\left(k^2-\lambda^2\right)},\ k^2>\lambda^2$$

вакуумная плотность энергии $E(q_{2;3})$ отрицательна.

Таким образом, так же, как и в предыдущем случае, энергетически более выгодным будет несимметричное вакуумное состояние |0>, и ненулевые решения (15) уравнения (11) соответствуют перестройке вакуума в состояние с нарушенной калибровочной симметрией.

Модель с метрикой Ожвата–Шюкинга

В настоящее время не теряет своей актуальности вопрос о возможном вращении Вселенной и его связи с вращением галактик. Поэтому сохраняется интерес к построению и исследованию космологических моделей с вращением. Нами построена стационарная космологическая модель с вращением для метрики Ожвата–Шюкинга вида:

$$ds^2 = (dt)^2 + R\sqrt{1-2k^2}\,w^3dt - \left(\frac{R}{2}\right)^2 * ((1-k)(w^1)^2 + (1+k)(w^2)^2 + (1+2k^2)(w^3)^2), \qquad (17)$$

где

$$w^1 = \cos x^3dx^1 + \sin x^1\sin x^3dx^2,$$

$$w^2 = -\sin x^3dx^1 + \sin x^1\cos x^3dx^2,$$

$$w^3 = \cos x^1dx^2 + dx^3.$$

$$0\le x^1\le\pi,\quad 0\le x^2, x^3\le 2\pi,$$

$$R, k = const,\quad |k| < \frac{1}{2}.$$

Отметим, что в работе [4] получена космологическая модель с вращением с метрикой (17), заполненная пылью, с космологическим членом. Источником гравитационного поля нашей космологической модели является несопутствующая идеальная жидкость с тензором энергии-импульса $T_{mn} = (e+p)u_mu_n - pg_{mn}$, где $\varepsilon>0,\ u_\mu u^\mu = 1$.

Компоненты вектора скорости рассмотрим в следующем виде:

$$u_0 \ne 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = \tilde{u}_2\sqrt{1-2k^2}\cos x^1,$$

$$u_3 = \tilde{u}_3\sqrt{1-2k^2}.$$

У нас эйнштейновская гравитационная постоянная равна 1.

Тогда ненулевые уравнения Эйнштейна для метрики (17) запишутся в следующем виде:

$$\frac{8k^2-5}{(k^2-1)R^2} = (e+p)u_0^2 - p, \qquad (18)$$

$$\frac{8k^2-1}{2R(k^2-1)} = (e+p)u_0\tilde{u}_2 - p\frac{R}{2}, \qquad (19)$$

$$\frac{8k^2-1}{2R(k^2-1)} = (e+p)u_0\tilde{u}_3 - p\frac{R}{2}, \qquad (20)$$

$$\frac{1}{(k^2-1)} = pR^2, \qquad (21)$$

$$-\frac{1}{(k^2-1)} = -pR^2, \qquad (22)$$

$$\frac{-(16k^4-2k^2-1)}{4(k^2-1)} = (\varepsilon+p)\tilde{u}_2\tilde{u}_3(1-2k^2) + p\frac{R^2(1+2k^2)}{4}, \qquad (23)$$

$$\frac{-(16k^4-2k^2-1)}{4(k^2-1)}= \\ =(\varepsilon+p)\tilde{u}_3^2(1-2k^2)+p\frac{R^2(1+2k^2)}{4} \tag{24}$$

$$\frac{\cos 2(x^3)\sin^2(x^1)k}{4(k^2-1)}+ \\ +\frac{\sin^2(x^1)(16k^4-2k^2)-16k^4+2k^2+1}{4(k^2-1)}= \\ =(\varepsilon+p)\tilde{u}_2^2(1-2k^2)\cos^2(x^1)+ \\ p\frac{R^2(1+k\sin^2(x^1)\cos 2(x^3)+2k^2\cos^2(x^1))}{4}. \tag{25}$$

Из уравнений (19), (20) вытекает, что $\tilde{u}_2=\tilde{u}_3$, тогда уравнения (23) и (24) будут одинаковы.

Из уравнений (21), (22) получаем $p=\dfrac{1}{R^2(k^2-1)}$. Подставим p в уравнения (18), (19), (23) и (25), и получим следующую систему уравнений:

$$(\varepsilon+p)u_0^2=\frac{8k^2-4}{R^2(k^2-1)}, \tag{26}$$

$$(\varepsilon+p)u_0\tilde{u}_2=\frac{4k^2}{R(k^2-1)}, \tag{27}$$

$$(\varepsilon+p)\tilde{u}_2^2=\frac{-4k^4}{(k^2-1)(1-2k^2)}. \tag{28}$$

Из условия $u_\mu u^\mu=1$ получим уравнение

$$u_0^2\frac{(2k^2+1)}{2}+2u_0\tilde{u}_2\frac{(1-2k^2)}{R}- \\ -2\tilde{u}_2^2\frac{(1-2k^2)}{R^2}=1. \tag{29}$$

Решая систему уравнений (26), (27), (28) при условии (29) находим, что

$$\varepsilon=\frac{8k^2-3}{R^2(k^2-1)},\quad u_0^2=\frac{2(2k^2-1)}{4k^2-1},$$

$$\tilde{u}_2^2=\frac{2k^4R^2}{(2k^2-1)(4k^2-1)}.$$

Условия $\varepsilon>0, u_0^2>0,\ \tilde{u}_2^2>0$ выполняются при $|k|<\dfrac{1}{2}$. Для данной модели расширение, сдвиг и ускорение отсутствуют, вращение модели отлично от нуля при $k\neq0$:

$$\omega=\frac{2\sqrt{2}k^2}{R\sqrt{1-4k^2}\sqrt{1-k^2}}.$$

Применяя метод, предложенный в [5], найдем условия, которые обеспечивают причинность пространства-времени с метрикой (17).

Пусть $x^\mu(s)$ – произвольная времениподобная кривая (s – параметр), $v^\mu v_\mu>0$. Если предположить, что эта кривая – замкнутая, тогда всегда существует такое $s=s_0$, при котором производная $\left.\dfrac{dt}{ds}\right|_{S=S_0}=0$.

Вычислим в точке $s=s_0$ квадрат модуля $V^\mu=\dfrac{dx^\mu}{ds}$, касательного к $x^\mu(s)$

$$\left.V^\mu V_\mu\right|_{S=S_0}=-\left(\frac{R}{2}\right)^2\left((1-k)\left(\frac{\omega^1}{ds}\right)^2+\right. \\ \left.+(1+k)\left(\frac{\omega^2}{ds}\right)^2+(1+2k^2)\left(\frac{\omega^3}{ds}\right)^2\right). \tag{30}$$

При $k\le1$ в точке $s=s_0$ имеем: $\left.V^\mu V_\mu\right|_{S=S_0}\le0$. Но мы предположили, что $x^\mu(s)$ – времениподобная кривая ($\left.V^\mu V_\mu\right|_{S=S_0}>0$) при любых s.

Таким образом, мы получили противоречие с исходным предположением о замкнутости $x^\mu(s)$. Значит, условие, накладываемое на наше решение $|k|<\dfrac{1}{2}$, обеспечивает отсутствие замкнутых времениподобных кривых во всем пространстве – времени с метрикой (17).

Полагаем, нашу модель с метрикой (17) можно использовать для исследования космологических эффектов, обусловленных только вращением Вселенной.

Сделаем оценку космологического вращения для нашей метрики.

Пусть ρ – плотность материи в этой модели и $\rho\approx10^{-30}г/см^3$.

Тогда для нашей модели можно получить, что скорость вращения будет $\omega\approx10^{-13}$рад / год при $k\approx10^{-2}$, что совпадает с результатом Берча.

Список литературы

1. *Панов В.Ф.* Спонтанное нарушение симметрии в космологических моделях с вращением // ТМФ. 1988. Т. 74, № 3. С.463–468.
2. *Кувшинова Е.В., Панов В.Ф.* Квантовое рождение вращающейся вселенной // Известия вузов. Физика. 2003. Т. 46, № 10. С.40–47.
3. *Kuvshinova E.V., Sandakova O.V.* The effect of spontaneous breaking of gauge symmetry in cosmology with rotation // Russian Physics Journal. 2004. Т. 47, № 1. P. 15–24.
4. *Ozsvath I., Schucking E.L.* The finite rotating Universe // Ann. Phys. 1969. Vol. 55, № 1. P. 166–204.
5. *Maitra S.C.* Stationary dust – filled cosmological solution with Λ=0 and without closed timelike lines // Journal Math. Phys. 1966. Vol. 7, № 6. P. 1025–1030.

Spontaneous symmetry breaking and the cosmological model with rotation for the Bianchi type IX metric

E. V. Kuvshinova

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia

kuvlenka@narod.ru; 8 (342) 239-65-60

The effect of spontaneous breaking of gauge symmetry in cosmology, in particular, in cosmological models with rotation, has been studied in several papers ([1, 3], etc.). This paper investigates the effect of spontaneous breaking of gauge symmetries in cosmological models with expansion and rotation. A stationary cosmological model with rotation for Bianchi type IX metrics is constructed.

Keywords: *spontaneous symmetry breaking; models with rotation; Einstein equations.*