

УДК 532.5

Переходы между электроконвективными режимами слабопроводящей жидкости при инъекции заряда в горизонтальных ячейках с разным аспектным отношением

В. А. Ильин, К. С. Рушинская

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
ilin1@psu.ru; +7 342 2 396 894

Изучены нелинейные режимы электроконвекции неизотермической слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле горизонтального слоя при униполярной инъекции заряда с катода. Рассмотрены прямоугольные ячейки разной длины с условиями периодичности. Построены бифуркационные диаграммы режимов электроконвекции.

Ключевые слова: электроконвекция; слабопроводящая жидкость; инъекция заряда.

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-4-32-37

Введение

Движение жидкостей в электрическом поле привлекает внимание тем, что представляет собой способ прямого преобразования энергии электрического поля в энергию движения жидкости [1, 2]. Знание законов действия электрического поля на конвективные течения актуально в связи с проблемой эффективного управления конвекцией, тепло- и массопереносом в различных технологических ситуациях, в частности, в электрогидродинамических насосах.

Существует несколько механизмов электроконвекции в диэлектрических жидкостях: диэлектрофоретический механизм неустойчивости в идеальных диэлектриках [3], электрокондуктивный механизм неустойчивости в слабопроводящих жидкостях [4], инъекция заряда и диссоциационно-рекомбинационный механизм зарядообразования в слабопроводящих жидкостях [5].

В настоящей работе инъекционный механизм зарядообразования считается основным. Используется модель униполярной ин-

жекции заряда, рассмотренная в [6–9]. Согласно этой модели плотность инжектируемого заряда с катода прямо пропорциональна напряженности электрического поля в слое жидкости.

В [6] рассмотрен изотермический случай, в [7] – подогрев сверху, в [8, 9] – подогрев снизу. Электроконвекция в длинных ячейках изучена в работе [10].

В настоящей работе исследуется электроконвекция в прямоугольных ячейках с разным аспектным отношением с условиями периодичности при разных нагревах снизу и в невесомости [11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости в вертикальном постоянном электрическом поле и поле тяжести с ускорением свободного падения g . Ось x направлена вдоль нижней границы слоя, ось z – перпендикулярна границам слоя.

Два плоских электрода лежат в плоскостях $z = 0$ и $z = h$ (рис. 1), h – толщина слоя.

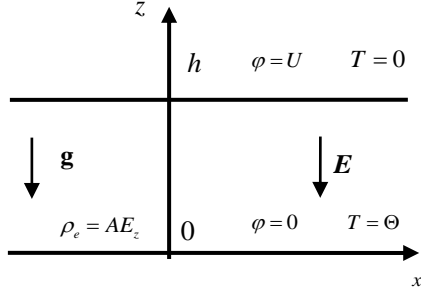


Рис. 1. Геометрия задачи

Идеально тепло- и электропроводные пластины конденсатора нагреты до разной температуры – $T(0) = \Theta$, $T(h) = 0$. Здесь T – температура, отсчитываемая от температуры верхнего электрода, Θ – характерная разность температур. Случай $\Theta > 0$ соответствует нагреву снизу.

На катоде (нижнем электроде) потенциал равен нулю $\varphi(0) = 0$, на аноде (верхнем электроде) – $\varphi(h) = U$. Здесь U – напряжение электрического поля.

С катода происходит униполярная инжекция заряда. Плотность свободных зарядов у катода пропорциональна нормальной составляющей вектора напряженности поля $\rho_e = aE_z$, где a – коэффициент, характеризующий степень инжекции.

Движение жидкости и свободных зарядов в слое описывается системой уравнений электрогидродинамики:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \rho \nu_0 \Delta \mathbf{v} + \rho_e \mathbf{E} + \rho \mathbf{g}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T &= \chi \Delta T, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div}(\rho_e \mathbf{v} - b \rho_e \mathbf{E}) &= 0, \\ \text{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \rho = \rho_0 (1 - \beta T), \\ \text{div}(\varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}) &= \rho_e, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ – массовая плотность жидкости; \mathbf{v} – вектор скорости жидкости; p – давление; ν_0 – коэффициент кинематической вязкости; ρ_e – плотность заряда; χ – коэффициент температуропроводности; β – коэффициент теплового расширения жидкости; ε – диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 – электрическая постоянная; b – подвижность зарядов; \mathbf{E} – напряженность, φ – потенциал поля.

Границы слоя непроницаемые, на них выполняются условия прилипания – скорость равна нулю:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \rho_e &= -a \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad T = \Theta, \\ z = h: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = U, \quad T &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Используем безразмерные переменные на основе масштабов: времени – время вязкой диссипации h^2/ν_0 , расстояния – расстояние между электродами h , скорости – ν_0/h , потенциала – U , поля – U/h , давления – $\rho \nu_0^2/h^2$, температуры – Θ , плотности заряда – $\varepsilon \varepsilon_0 U/h^2$.

После обезразмеривания система уравнений (1) с граничными условиями (2) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - \frac{T_e^2}{M^2} \rho_e \nabla \varphi + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} T \boldsymbol{\gamma}, \\ \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T &= \Delta T, \\ \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta \varphi + \rho_e &= 0, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho_e &= \frac{T_e}{M^2} (\rho_e^2 - \nabla \varphi \cdot \nabla \rho_e), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$, p – превышение давления над гидростатическим. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \rho_e &= -A \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad T = 1, \\ z = 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = 1, \quad T &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь введены безразмерные параметры – тепловое число Рэлея Ra , электрические параметры T_e и M , число Прандтля Pr , параметр инжекции A :

$$\begin{aligned} \text{Ra} = \frac{g \beta \Theta h^3}{\nu_0 \chi}, \quad T_e = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 U}{b \rho \nu_0}, \quad M = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\rho}} \\ \text{Pr} = \frac{\nu_0}{\chi}, \quad A = \frac{ah}{\varepsilon \varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассматриваются плоские возмущения $\mathbf{v} = (u, 0, w)$ и $\partial/\partial y = 0$, вводится функция тока ψ и вихрь скорости Φ :

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Phi = (\text{rot} \mathbf{v})_y = -\Delta \psi.$$

В рамках безындукционного приближения безразмерная система уравнений электроконвекции слабопроводящей жидкости имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \Delta \Phi - \\ &- E \frac{T_e^2}{M^2} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \rho_e}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho_e}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} &= \frac{T_e^2}{M^2} \left(\rho_e^2 + E \frac{\partial \rho_e}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{Pr} \Delta T. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} z = 0: \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \rho_e = AE, T = 1, \\ z = 1: \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, T = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

На боковых границах для всех искомым функций выполняются условия периодичности.

2. Результаты

Задача решалась методом конечных разностей [12]. Эволюционные уравнения решались по явной схеме, конвективные слагаемые в уравнении для заряда и температуры аппроксимировались разностями "против потока". Для уравнения переноса тепла использовались центральные разности. Для удобства работы с условиями периодичности к сетке добавлялись два вертикальных ряда. Вихрь скорости на горизонтальных границах вычислялся по формуле Тома. Для решения уравнения Пуассона использовался метод последовательной верхней релаксации.

Число Прандтля $Pr = 10$, электрический параметр $M = 14,14$. Расчеты проведены при разных значениях параметра T_e и теплового числа Рэлея Ra . Для вычислений выбиралась прямоугольная ячейка с пространственными размерами $L_z = 1, L_x = 4$; $L_z = 1, L_x = 10$. Число узлов по вертикальной и горизонтальной осям было соответственно 21×81 ; 21×201 .

Результаты расчетов систематизированы. Обнаружены два режима стационарной конвекции, между которыми наблюдались гистерезисные переходы [9]. Предварительные результаты для разных ячеек опубликованы в работе [11]. На рис. 2 представлены результа-

ты расчетов зависимости максимального значения функции тока ψ_m от электрического параметра T_e для $Ra = 1000$ и сетки 21×201 узлов.

Нижний режим 1 имеет меньшую интенсивность движения вихрей, верхний режим 2 – большую интенсивность. Существует конкуренция между режимом 2 и равновесием, режимами 1 и 2 в соответствующих интервалах управляющего параметра.

Результаты расчетов для ячейки $L_z = 1, L_x = 2$ представлены в работе [9]. Пороги переходов между режимами электроконвекции, полученные при вычислении зависимости максимального значения функции тока от параметра T_e для $Ra = 1000$ и для $L_x = 4, 10$ представлены в таблице.

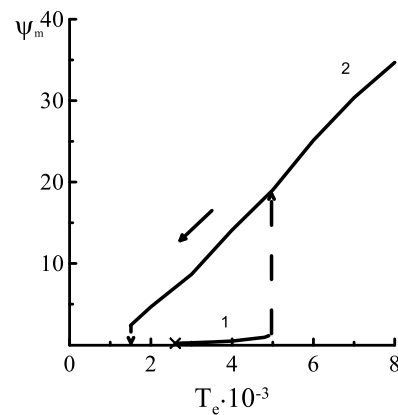


Рис. 2. Зависимость максимальной функции тока от T_e для $Ra = 1000$ ($L_z = 1, L_x = 10$)

Для ячейки $L_z = 1, L_x = 2$ нижний режим начинается при $T_e = 2,5 \cdot 10^3$; для $L_z = 1, L_x = 4$ – при $T_e = 2,8 \cdot 10^3$; для $L_z = 1, L_x = 10$ – при $T_e = 2,6 \cdot 10^3$.

Для ячейки $L_z = 1, L_x = 2$ с ростом поля при $T_e = 5,5 \cdot 10^3$ происходит скачкообразный переход к режиму конвекции 2 с большей интенсивностью вихрей; для $L_z = 1, L_x = 4$ – при $T_e = 4,9 \cdot 10^3$; для $L_z = 1, L_x = 10$ – при $T_e = 5 \cdot 10^3$.

Для ячейки $L_z = 1, L_x = 2$ в интервале $1,6 \cdot 10^3 \leq T_e \leq 5,5 \cdot 10^3$ обнаружен гистерезис, в котором поведение системы существенно зависит от начальных условий. При вычислении методом продолжения по параметру выявлено, что при движении в пространстве параметров справа налево режим 2 существует до $T_e = 1,6 \cdot 10^3$. При меньшей напряженности поля в системе независимо от начальных

условий затухают все возмущения, и устанавливается равновесное распределение переменных. При больших размерах ячейки эти интервалы переходов следующие: $1,4 \cdot 10^3 \leq T_e \leq 4,9 \cdot 10^3$ для $L_z = 1, L_x = 4$; $1,5 \cdot 10^3 \leq T_e \leq 5 \cdot 10^3$ для $L_z = 1, L_x = 10$.

Для ячейки $L_z = 1, L_x = 2$ в интервале $1,6 \cdot 10^3 \leq T_e \leq 2,4 \cdot 10^3$ в зависимости от начальных условий в системе будет либо равновесие, либо стационарный режим 2, при большем поле: $2,5 \cdot 10^3 \leq T_e \leq 5,4 \cdot 10^3$, реализуется либо режим 1, либо режим 2. При $T_e > 5,4 \cdot 10^3$ сколь угодно малые возмущения равновесия приводят систему после переходных процессов к стационарному режиму 2.

Пороги возникновения нелинейных режимов и переходов от одного режима к другому при $Ra = 1000$ для различных размеров ячейки

Ra	L_x	Порог возникновения верхнего режима (2), $T_e, 10^3$	Порог возникновения нижнего режима (1), $T_e, 10^3$	Порог перехода от нижнего режима (1) к верхнему (2), $T_e, 10^3$
1000	2	1,6	2,5	5,5
1000	4	1,4	2,8	4,9
1000	10	1,5	2,6	5,0
500	2	1,5	4,4	5,7
500	4	1,5	4,1	5,1
500	10	1,5	4,0	5,1
0	2	1,5	-	6,3
0	4	1,5	-	5,4
0	10	1,5	-	5,4

Для других ячеек интервалы меняются. Для $L_z = 1, L_x = 4$ они таковы: $1,4 \cdot 10^3 \leq T_e \leq 2,7 \cdot 10^3$; $2,8 \cdot 10^3 \leq T_e \leq 4,8 \cdot 10^3$. Переход на верхний режим происходит при $T_e > 4,8 \cdot 10^3$.

Для $L_z = 1, L_x = 10$ первый интервал гистерезиса следующий: $1,5 \cdot 10^3 \leq T_e \leq 2,5 \cdot 10^3$, второй – $2,6 \cdot 10^3 \leq T_e \leq 4,9 \cdot 10^3$.

Переход на верхний режим совершается при $T_e > 4,9 \cdot 10^3$.

Также были проведены расчеты для других нагревов снизу, меньших числа Рэлея. В таблице представлены пороги переходов между режимами.

Обнаружено, что, когда число Рэлея становится меньше, порог режима 2 практически не изменяется, при этом пороги переходов между режимами растут, и ширина существования режима 1 уменьшается.

В состоянии невесомости ($Ra = 0$) режим с малой интенсивностью вихрей исчезает, и остается только режим с большой интенсивностью вихрей. Увеличение размеров ячейки приводит к изменению порогов перехода между режимами.

На рис. 3 приведены изолинии функции тока для режима 1 ($T_e = 4,5 \cdot 10^3$) (а) и режима 2 ($T_e = 7 \cdot 10^3$) (в) при $Ra = 500, L_x = 4$. В такой ячейке существует 6 вихрей. Вихри в режиме 1 симметричные, а в режиме 2 – несимметричные.

На рис. 3 также приведены изолинии температуры – для режима 1 (б) и для режима 2 (г). Во втором режиме вихревое движение и теплоперенос более интенсивные, чем в первом.

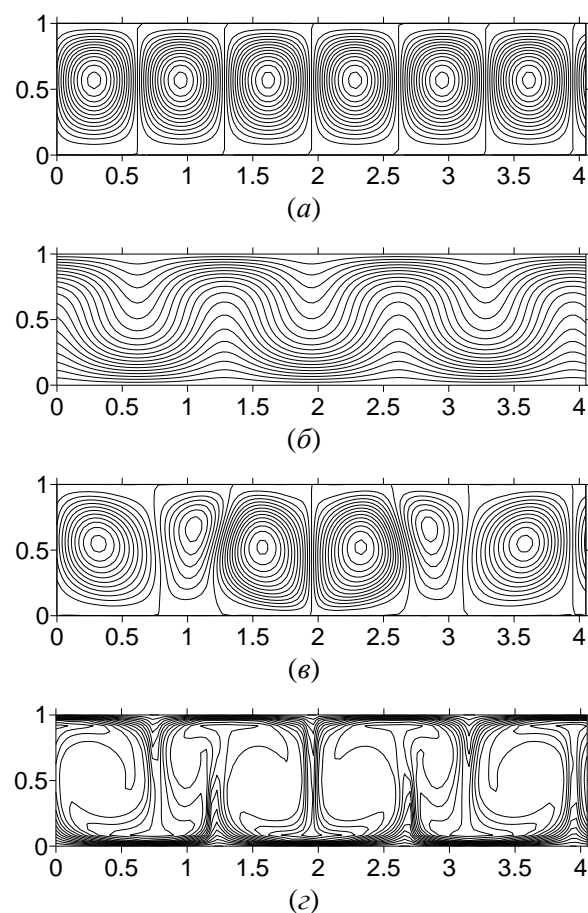


Рис. 3. Изолинии функции тока (а) и температуры (б) при $Ra = 500, L_x = 4$ для режима 1 ($T_e = 4,5 \cdot 10^3$); и изолинии функции тока (е) и температуры (г) для режима 2 ($T_e = 7 \cdot 10^3$)

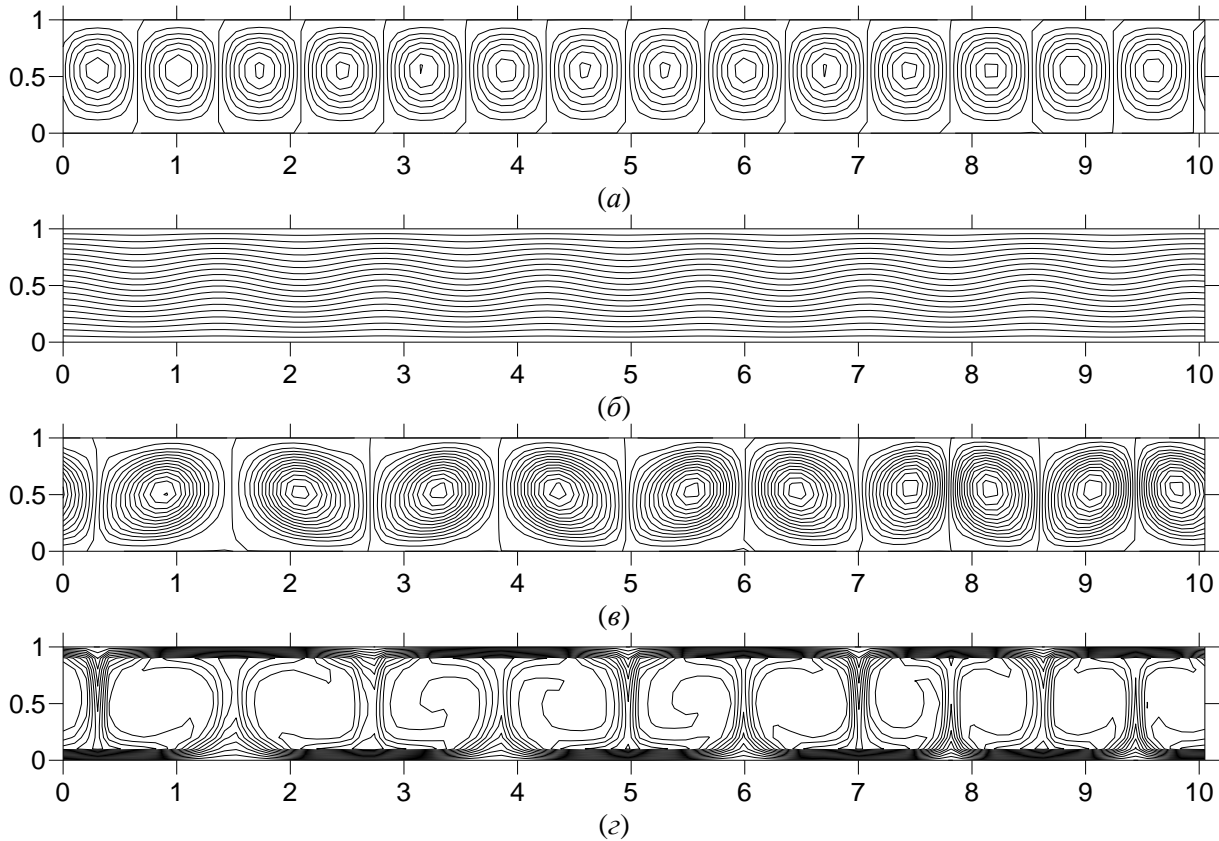


Рис. 4. Изолинии функции тока (а) и температуры (б) при $Ra = 500$, $L_x = 10$ для режима 1 ($T_e = 4 \cdot 10^3$); и изолинии функции тока (в) и температуры (г) для режима 2 ($T_e = 7 \cdot 10^3$)

На рис. 4 приведены изолинии функции тока для режима 1 ($T_e = 4 \cdot 10^3$) (а) и режима 2 ($T_e = 7 \cdot 10^3$) (в) при $Ra = 500$, $L_x = 10$. В такой ячейке у нижнего режима наблюдается 14 вихрей, а у верхнего – 10 вихрей.

На рис. 4 также приведены изолинии температуры – для режима 1 (б) и для режима 2 (г). Отметим, что во втором режиме вихревое движение и теплоперенос более интенсивны, чем в первом.

Заключение

В работе изучена динамика нелинейных режимов электроконвекции неизотермической слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле горизонтального конденсатора. Исследована конвекция в прямоугольных ячейках для разных соотношений сторон конвективной ячейки с условиями периодичности при разных нагревах.

Система имеет два различных по интенсивности нелинейных стационарных режима конвекции. Построены бифуркационные диа-

граммы. Проанализированы и изучены соответствующие пороги и гистерезисные переходы между различными типами движений.

Список литературы

1. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей: Физические основы электрогидродинамики. М.: Наука, 1979. 320 с.
2. *Саранин В.А.* Устойчивость равновесия, зарядка, конвекция и взаимодействие жидких масс в электрических полях. М.; Ижевск: НИЦ РХД, 2009. 332 с.
3. *Ильин В.А.* Маломодовая модель электроконвекции идеального диэлектрика // Журнал технической физики. 2010. Т. 80, вып. 8. С. 38–48.
4. *Ильин В.А.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле // Журнал технической физики. 2013. Т. 83, вып. 1. С. 64–73.
5. *Стишков Ю.К., Чирков В.А.* Неравновесные механизмы электризации слабых элек-

- тролитов при воздействии постоянного напряжения // Журнал технической физики. 2016. Т. 86. Вып. 7. С. 1–8.
6. *Верещага А.Н.* Унарная электроконвекция в плоском слое // Гидродинамика и процессы тепломассопереноса. Свердловск: Уральское отделение академии наук СССР, 1989. С. 42–47.
 7. *Мордвинов А.Н., Смородин Б.Л.* Электроконвекция при инъекции с катода и нагреве сверху // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Т. 141, вып. 5. С. 997–1005.
 8. *Ильин В.А., Мордвинов А.Н., Петров Д.А.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости при униполярной инъекции заряда в постоянном электрическом поле // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2015. Т. 147, вып. 1. С. 181–188.
 9. *Ильин В.А.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе при униполярной инъекции заряда // Журнал технической физики. 2017. Т. 87. Вып. 1. С. 5–9.
 10. *Smorodin B.L., Taraut A.V.* Simulations of oscillatory electroconvection in a horizontal capacitor with a large aspect ratio // *Magneto-hydrodynamics*. 2016. Т. 52, № 1. С. 245–254.
 11. *Рушинская К.С., Ильин В.А.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости при инъекции заряда в горизонтальных ячейках с разным аспектным отношением // Материалы международного симпозиума "Неравновесные процессы в сплошных средах". Пермь, 2017. Т. 2. С. 172–174.
 12. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. С. 228.

Transitions between electroconvective regimes of a poorly conductive liquid under charge injection in horizontal cells with the different aspect ratio

V. A. Il'in, K. S. Rushinskaya

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
ilin1@psu.ru; +7 342 2 396 894

Nonlinear regimes of electroconvection in a horizontal layer of the nonisothermal poorly conductive liquid in a steady electric field have been studied. Electroconvection is given rise by unipolar injection of charge from a cathode. During calculations rectangular cells of a different length with the periodicity conditions have been observed. The diagrams of electroconvection regimes have been plotted.

Keywords: *electroconvection; poorly conductive liquid; injection.*