ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Математика. Механика. Информатика Вып. 4(39)

УДК 517.929

Об осцилляции линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями

К. М. Чудинов[1], **В. В. Малыгина**[2]
[1] Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
cyril@list.ru; 8(342)2396769
[2] Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
mavera@list.ru; 8(342)2391564

Приведен обзор и сравнение признаков осцилляции для линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений с несколькими сосредоточенными запаздываниями.

Ключевые слова: *линейные функционально-дифференциальные уравнения; осцилляция; эффективные признаки.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-4-11-18

1. История вопроса

Линейные дифференциальные уравнения с последействием первого порядка – в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений – могут иметь осциллирующие решения [1]. Оказалось, что это свойство решений уравнений с последействием хорошо объясняет ряд процессов в биологии, химии, теории автоматического регулирования – и, следовательно, заслуживает специального исследования.

Осцилляцию как тонкое свойство решений естественно начать изучать с самых простых объектов. Если ориентироваться на получение необходимых и достаточных признаков, то ситуация практически исчерпывается автономными уравнениями и сводится к исследованию характеристической функции на наличие либо отсутствие вещественных корней [2–6]. Для неавтономных уравнений задача резко усложняется и речь можно вести только о достаточных признаках. Такие признаки бывают разной силы. Лучшими естественно считать те, в которых показана существенность всех условий и точность входящих в ограничения постоянных.

Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x}(t) + p(t)x(h(t)) = 0\,,\ t \ge 0\,, \tag{1}$$

где функция p локально-суммируема, функция h измерима по Лебегу, при этом $p(t) \ge 0$, $h(t) \le t$ и $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \infty$.

За несколько десятилетий изучения вопроса о признаках осцилляции решений уравнения (1) выделились две ветви точных, эффективно проверяемых признаков, имеющих разную область применимости и ведущих родословную от следующих двух утверждений.

Признак 1 [7; 3; 8, Theor. 2.1.3]. *Пусть функция h не убывает и*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int\limits_{h(t)}^{t} p(s)ds > 1\,.$$

Тогда все решения уравнения (1) *являются осциллирующими.*

Признак 2 [1, 9, 10]. *Пусть*

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \int\limits_{h(t)}^{t} p(s)ds > 1/e\,.$$

Тогда все решения уравнения (1) *являются осциллирующими.*

Обе постоянные, 1 и $1/e$, являются точными, но достигаются они на разных классах уравнений.

Точность постоянной 1 в признаке 1 демонстрирует следующий пример.

Пусть в уравнении (1) $h(t)=t-1$,

$$p(t)=\begin{cases}0, \text{ если } t\in[2n,2n+1),\\ 1-\varepsilon_n, \text{ если } t\in[2n+1,2n+2),\end{cases}$$

$n\in N_0=\{0,1,2,\ldots\}$, $0<\varepsilon_n<1$.

В работе [3] этот пример был рассмотрен для случая $\varepsilon_n=\varepsilon=const$. Легко видеть, что тогда

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-1}^{t}p(s)ds=1-\varepsilon,$$

а решение x уравнения (1) с начальным условием $x(0)=1$ не возрастает, и для всех $n\in N_0$ имеем $x(2n)=\varepsilon^n>0$. Следовательно, $x(t)>0$ при всех $t\ge 0$. Таким образом, константу 1 нельзя уменьшить ни на какую сколь угодно малую величину.

Пусть теперь $\varepsilon_n\to 0$. Тогда

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-1}^{t}p(s)ds=1-\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=1,$$

решение с начальными условиями $x(0)=1$ не возрастает и $x(2n)=\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}>0$ при всех $n\in N_0$. Следовательно, $x(t)>0$ при всех $t\ge 0$. Это означает, что в признаке 1 строгое неравенство нельзя заменить нестрогим.

Теперь покажем точность константы $1/e$ в признаке 2. Пусть в уравнении (1) $p(t)=p=const$, $h(t)=t-r$. Как известно [1], *все решения уравнения*

$$\dot x(t)+px(t-r)=0,\quad t\ge 0, \tag{2}$$

являются осциллирующими тогда и только тогда, когда $pr>1/e$.

Таким образом, для уравнения (2) признак 2 обращается в критерий, следовательно, в признаке 2 нельзя уменьшить постоянную $1/e$ и даже заменить строгое неравенство нестрогим.

Обратим внимание на различные требования, предъявляемые к функции запаздывания h: в признаке 1, в отличие от признака 2, предполагается ее монотонность, которую нельзя отбросить: в работах [11, 12] приведены примеры, показывающие существенность этого условия.

Оба признака многократно обобщались и уточнялись – вплоть до настоящего времени. К одному из возможных путей уточнения этих признаков для уравнения (1) мы обратимся в разделе 5, но углубляться в этот вопрос не будем, поскольку цель данной статьи – рассказать о задаче обобщения признаков 1 и 2 на уравнение с несколькими запаздываниями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейное функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot x(t)+\sum_{k=1}^{n}p_k(t)x(h_k(t))=0,\quad t\ge 0, \tag{3}$$

в следующих предположениях: функции p_k локально-суммируемы, функции h_k измеримы по Лебегу и $h_k(t)\le t$ для всех $t\ge 0$, $k=\overline{1,n}$. При отрицательных значениях аргумента функция x предполагается доопределенной заданной начальной функцией. Как известно [13, гл. 1], в этих предположениях уравнение (3) однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций, и его решение бесконечно продолжаемо на всю положительную полуось.

Далее всюду будем считать, что выполнены также условия: $p_k(t)\ge 0$ для всех $t\ge 0$ и $\lim_{t\to\infty}h_k(t)=\infty$, $k=\overline{1,n}$.

Определение 1. Непрерывную на полуоси функцию будем называть *осциллирующей,* если она имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Определение 2. Уравнение (3) назовем *осциллирующим,* если любое его решение является осциллирующим.

Очевидно, уравнение (1) есть частный случай уравнения (3) при $n=1$, поэтому естественно желание обобщить признаки 1 и 2 на уравнение (3).

Гипотеза 1. *Пусть все функции* h_k *не убывают и*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\int_{h_k(t)}^{t}p_k(s)ds>1.$$

Тогда уравнение (3) *является осциллирующим.*

Гипотеза 2. *Пусть*

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\int_{h_k(t)}^{t}p_k(s)ds>1/e.$$

Тогда уравнение (3) *является осциллирующим.*

Обе гипотезы кажутся правдоподобными, но ни их доказательства, ни их опровержения до недавнего времени опубликованы не были. В действительности при $n>1$ ни одна из них не верна, что показывают следующие примеры.

Пример 1 [12]. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)+p_1(t)x(t-1)+p_2(t)x(t-3)=0,\ t\ge 0, \quad (4)$$

коэффициенты которого определены равенствами ($j\in N_0$):

$$p_1(t)=\begin{cases}0,\ \text{если}\ t\in[6j,6j+5),\\ 3/4,\ \text{если}\ t\in[6j+5,6j+6),\end{cases}$$

$$p_2(t)=\begin{cases}0,\ \text{если}\ t\in[6j,6j+3),\\ 3/4,\ \text{если}\ t\in[6j+3,6j+4),\\ 0,\ \text{если}\ t\in[6j+4,6j+6).\end{cases}$$

Легко видеть, что $p_1(t)\ge 0$, $p_2(t)\ge 0$,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\left(\int_{t-1}^{t}p_1(s)ds+\int_{t-3}^{t}p_2(s)ds\right)=$$

$$=\int_{6j+5}^{6j+6}p_1(s)ds+\int_{6j+3}^{6j+6}p_2(s)ds=3/2>1,$$

т. е. условия гипотезы 1 выполнены.

Дополним уравнение (4) начальным условием $x(0)>0$. Для решения $x=x(t)$ полученной задачи Коши при всех натуральных j получаем $x(6j+6)=x(6j)/16$. Поскольку при этом функция x не возрастает, то она положительна на всей полуоси. Таким образом, уравнение (4) не является осциллирующим, то есть гипотеза 1 неверна.

Пример 2 [14]. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)+p_1(t)x(t-1)+p_2(t)x(t-2)=0,\ t\ge 0, \quad (5)$$

коэффициенты которого определены равенствами ($j\in N_0$):

$$p_1(t)=\begin{cases}0,\ \text{если}\ t\in[3j,3j+1),\\ c,\ \text{если}\ t\in[3j+1,3j+2),\\ 0,\ \text{если}\ t\in[3j+2,3j+3);\end{cases}$$

$$p_2(t)=\begin{cases}0,\ \text{если}\ t\in[3j,3j+2),\\ c,\ \text{если}\ t\in[3j+2,3j+3).\end{cases}$$

Пусть c – постоянная, удовлетворяющая неравенствам $1/e<c<1/2$.

Дополним уравнение (5) начальным условием $x(0)=1$ и построим решение $x=x(t)$ полученной задачи Коши. При $t\in[0,1]$ имеем $x(t)=1$; при $t\in[1,3]$ находим последовательным интегрированием, что $x(t)=1-c(t-1)$. Далее, непосредственной проверкой убеждаемся, что при любом $t\ge 0$ справедливо равенство $x(t+3)=(1-2c)x(t)$. Так как $c<1/2$, то функция x положительна на всей полуоси.

С другой стороны, $p_1(t)\ge 0$, $p_2(t)\ge 0$,

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\left(\int_{t-1}^{t}p_1(s)ds+\int_{t-2}^{t}p_2(s)ds\right)=c>1/e,$$

т. е. условия гипотезы 2 выполнены. Но уравнение (5) не является осциллирующим, значит, гипотеза 2 неверна.

Вопрос о признаках осцилляции для дифференциального уравнения с несколькими запаздываниями оказался нетривиальным. Продолжим разговор о поиске формулировок признаков осцилляции уравнения (3), включающих в себя признаки 1 или 2.

3. Известные результаты

Самый простой способ преобразовать гипотезы 1 и 2 так, чтобы они стали верными, – уменьшить промежуток интегрирования, заменив сумму интегралов одним.

Обозначим

$$h(t)=\max_{1\le k\le n}h_k(t). \quad (6)$$

Признак 3 [2, теор. 3.4.3] *Пусть* h_k – *неубывающие функции и*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{h(t)}^{t}\sum_{k=1}^{n}p_k(s)ds>1. \quad (7)$$

Тогда уравнение (3) *является осциллирующим.*

Признак 4 [15]. *Пусть*

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_{h(t)}^{t}\sum_{k=1}^{n}p_k(s)ds>1/e. \quad (8)$$

Тогда уравнение (3) *является осциллирующим.*

Суть признаков 3 и 4 проста: осцилляция уравнения (3) следует из осцилляции уравнения (1), в котором отклонение аргумента $h(t)$ определено равенством (6), а коэффициентом является $p(t)=\sum_{k=1}^{n}p_k(t)$.

Доказательство основано на сравнении решений [16] уравнений (3) и (1). Признаки 3 и 4 дают хорошее описание области осцилляции, если функции h_k не сильно отличаются друг от друга.

С другой стороны, если, например, $h_k(t)=t$ *хотя бы при одном* k, то $h(t)=t$, интегралы в неравенствах (7) и (8) обращаются в нуль, и признаки 3 и 4 перестают работать.

Первые признаки осцилляции, в которых удалось тонко учесть влияние каждого слагаемого в сумме (3), были получены для случая постоянных запаздываний.

Положим, в уравнении (3) $h_k(t)=t-r_k$, где r_k – вещественные неотрицательные постоянные. Уравнение преобразуется к виду

$$\dot{x}(t)+\sum_{k=1}^{n} p_k(t)\,x(t-r_k)=0,\quad t\ge 0\,. \tag{9}$$

Признак 5 [17]. *Пусть*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\int_{t}^{t+r_k} p_k(s)ds>1\,. \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) *является осциллирующим.*

Признак 6 [18]. *Пусть*

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\int_{t}^{t+r_k} p_k(s)ds>1/e\,. \tag{11}$$

Тогда уравнение (9) *является осциллирующим.*

Заметим, что, применяя признаки 5 и 6 в случае $n=1$, получим признаки осцилляции уравнения

$$\dot{x}(t)+p(t)x(t-r)=0\,,\ t\ge 0\,, \tag{12}$$

в виде неравенств

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t}^{t+r} p(s)ds>1/e\quad \text{и}\quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t}^{t+r} p(s)ds>1\,.$$

Легко видеть, что эти признаки для уравнения (12) эквивалентны признакам 1 и 2, поскольку

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t}^{t+r} p(s)ds=\underline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-r}^{t} p(s)ds\,,$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t}^{t+r} p(s)ds=\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-r}^{t} p(s)ds\,.$$

Однако при переходе к уравнению с несколькими слагаемыми ситуация не аналогична: вообще говоря,

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\int_{t}^{t+r_k} p_k(s)ds\ne\underline{\lim_{t\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\int_{t-r_k}^{t} p_k(s)ds\,,$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\int_{t}^{t+r_k} p_k(s)ds\ne\overline{\lim_{t\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\int_{t-r_k}^{t} p_k(s)ds\,.$$

Это и является причиной того, что гипотезы 1 и 2 неверны. Но принципиальность выбора пределов интегрирования долгое время не привлекла должного внимания.

Например, в недавнем обзоре достижений в исследованиях осцилляции уравнений с последействием [19] (как и в более ранних обзорах того же известного автора) признак 5 был приведен *в неверной формулировке:*

вместо $\int_{t}^{t+r_k} p_k(s)ds$ написано $\int_{t-r_k}^{t} p_k(s)ds$.

По-видимому, признаки 5 и 6 могли дать ключ к решению проблемы получения признаков осцилляции уравнения (3), но не были поняты и оценены по достоинству. Формулы (10) и (11) подсказывают путь (по крайней мере для ситуации, когда функции h_k имеют обратные): в формулировке гипотез 1 и 2 надо промежутки интегрирования $[h_k(t),t]$ заменить на $[t,h_k^{-1}(t)]$.

Эта идея впервые появилась и получила развитие в работе [12].

4. Новый подход

Обозначим $H_k(t)=\{s: h_k(s)\le t\le s\}$.

Теорема 1 [12]. *Пусть*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\int_{H_k(t)} p_k(s)ds>1\,. \tag{13}$$

Тогда уравнение (3) *является осциллирующим.*

Теорема 1 учитывает влияние на решение каждого слагаемого (что ожидалось от гипотезы 2), поскольку каждый коэффициент интегрируется по своему множеству, определяемому только функцией h_k. Она включает в себя признак 5, так как для уравнения (9) $H_k(t)=[t,t+r_k]$, и признак 3, так как в этом случае $[t,h^{-1}(t)]\subseteq[t,h_k^{-1}(t)]=H_k(t)$.

Теорема 1 также снимает условие монотонности функций h_k, традиционное для признаков в виде оценки верхнего предела.

Следствие 1. *Пусть* h_k *– непрерывные строго монотонно возрастающие функции и*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\int_{t}^{h_k^{-1}(t)} p_k(s)ds>1\,.$$

Тогда уравнение (3) *является осциллирующим.*

Доказательство. В условиях следствия $H_k(t)=[t,h_k^{-1}(t)]$. ▲

Недавно было установлено, что замена нестрогого неравенства строгим в определении множества $H_k(t)$ решает вопрос о модификации гипотезы 2.

Обозначим $E_k(t)=\{s: h_k(s)<t\le s\}$.

Теорема 2 [14]. *Пусть*

$$\varliminf_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k(t)} p_k(s)ds>1/e.$$

Тогда уравнение (3) *является осциллирующим.*

Отметим, что теорема 2 усиливает даже классический признак 2, заменяя интеграл по отрезку $[h(t),t]$ интегралом по множеству $E(t)=\{s: h(s)<t\le s\}$.

Следствие 2. *Пусть* $\varliminf_{t\to\infty}\int_{E(t)} p(s)ds>1/e$.

Тогда уравнение (3) *является осциллирующим.*

5. Обобщения

Усилим неравенство (13), используя последовательность итераций. Следующая лемма в разных вариантах встречалась в работах [20, 21].

Обозначим $P_0(t,s)=1$ и для $m\in N_0$

$$P_{m+1}(t,s)=\exp\left\{\int_s^t\sum_{k=1}^{n} p_k(\zeta)P_m(\zeta,h_k(\zeta))d\zeta\right\}.$$

Лемма 1. *Если* x *– положительное при* $t\ge t_0$ *решение уравнения* (2), *то найдется такое* $t_1\ge t_0$, *что при* $t\ge s\ge t_1$

$$x(t)P_m(t,s)\le x(s). \tag{14}$$

Доказательство проведем индукцией по m. Перепишем уравнение (3) в виде

$$\dot{x}(t)+x(t)\sum_{k=1}^{n} p_k(t)=\sum_{k=1}^{n} p_k(t)\left(x(t)-x(h_k(t))\right).$$

Так как при $t\ge t_0$ решение уравнения (2) монотонно убывает, то $x(t)\le x(h_k(t))$, следовательно, $\dot{x}(t)+x(t)\sum_{k=1}^{n} p_k(t)\le 0$.

По формуле Коши отсюда следует, что

$$x(t)\le x(s)\exp\left\{-\int_s^t\sum_{k=1}^{n} p_k(\zeta)d\zeta\right\},$$

т. е. при $m=1$ утверждение леммы верно.

Пусть неравенство (14) выполнено для некоторого $m\ge 2$. Тогда $x(t)P_m(t,s)\le x(s)$, следовательно,

$$\dot{x}(t)+x(t)\sum_{k=1}^{n} p_k(t)P_m(t,h_k(t))\le 0.$$

Еще раз применяя формулу Коши, получаем

$$x(t)\le x(s)\exp\left\{-\int_s^t\sum_{k=1}^{n} p_k(\zeta)P_m(\zeta,h_k(\zeta))d\zeta\right\}$$

или, с учетом определения функции P_{m+1},

$$x(s)\ge x(t)P_{m+1}(t,s),$$

что и требовалось. ▲

Теорема 3. *Если при некотором* $m\in N_0$ *справедливо неравенство*

$$\varlimsup_{t\to\infty}\int_{E(t)}\sum_{k=1}^{n} p_k(s)P_m(t,h_k(s))ds>1,$$

то уравнение (3) *является осциллирующим.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно: найдется решение уравнения (3), которое остается положительным (и, следовательно, монотонно убывающим) начиная с некоторого T. Тогда из уравнения (3) получаем

$$x(t)=x(T)-\int_T^t\sum_{k=1}^{n} p_k(s)x(h_k(s))ds>0,\ t\ge T.$$

Используя включение $E(T)\subseteq[T,\infty)$ и определение множества $E(T)$, получаем:

$$x(T)\ge\int_T^{\infty}\sum_{k=1}^{n} p_k(s)x(h_k(s))ds\ge$$

$$\ge\int_{E(T)}\sum_{k=1}^{n} p_k(s)x(h_k(s))ds.$$

По лемме 1, $x(h_k(s))\ge x(T)P_m(T,h_k(s))$, значит, учитывая условия теоремы, имеем:

$$x(T)\ge x(T)\int_{E(T)}\sum_{k=1}^{n} p_k(s)P_m(T,h_k(s))ds>x(T),$$

что невозможно.

Полученное противоречие доказывает теорему. ▲

Сопоставление теорем 1, 2 и 3 наводит на мысль, что должно существовать усиление теоремы 2, аналогичное теореме 3 с использованием функций $P_m(t,s)$.

В работе [18] была предпринята попытка получить результат такого типа. Авторы этой работы утверждали, что имеет место следующий факт.

Утверждение 1 [21]. *Положим* $g(t)=\sup\limits_{s\le t} h(s)$. *Тогда, если при некотором* $m\in N_0$ *справедливо неравенство*

$$\varliminf_{t\to\infty}\int\limits_{g(t)}^{t}\sum_{k=1}^{n}p_k(s)P_m(g(t),h_k(s))ds>1/e,$$

то уравнение (3) *является осциллирующим.*

Следующий пример показывает, что приведенное утверждение неверно.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)+e^{-1}x(t-1)=0,\ t\ge 0. \qquad (15)$$

Уравнение (15) является частным случаем уравнения (2) при $p=1/e$, $r=1$. По известному критерию (приведенному в разделе 1) уравнение не является осциллирующим.

Применим к уравнению (15) утверждение 1 при $m=1$. Получаем: $n=1$, $p(t)=1/e$, $h(t)=t-1$, $g(t)=t-1$, $P_1(t-1,s-1)=e^{(t-s)/e}$. Следовательно, $\varliminf\limits_{t\to\infty}1/e\int\limits_{t-1}^{t}e^{1/e(t-s)}ds=e^{1/e}-1$. В силу известного неравенства $e>(1+1/e)^e$, получаем, что $e^{1/e}-1>1/e$.

Таким образом, условия утверждения 1 выполнены, уравнение (15) должно быть осциллирующим, что неверно.

В формулировку утверждения 1 можно внести небольшие коррективы так, чтобы оно стало верным. Заметим, что при этом нет необходимости исправлять приведенное в [21] доказательство: оно заменяется на более простое.

Утверждение 2. *Пусть* $g(t)=\sup\limits_{s\le t} h(s)$. *Тогда, если при некотором* $m\in N_0$ *справедливо неравенство*

$$\varliminf_{t\to\infty}\int\limits_{g(t)}^{t}\sum_{k=1}^{n}p_k(s)P_m(g(s),h_k(s))ds>1/e, \qquad (16)$$

то уравнение (3) *является осциллирующим.*

Доказательство. Обозначим

$$a(s)=\sum_{k=1}^{n}p_k(s)P_m(g(s),h_k(s)),\ s\ge 0.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $a(s)>0$. Тогда функция

$$\tau=\varphi(t)=\int\limits_0^t a(s)ds \qquad (17)$$

является непрерывной и монотонно возрастающей, т.е. имеет обратную $t=\varphi^{-1}(\tau)$.

Из условия (16) следует, что $a\notin L(R_+)\left(R_+=[0,+\infty)\right)$, следовательно, φ^{-1} взаимно-однозначно отображает R_+ на R_+, причем $\lim\limits_{\tau\to\infty}\varphi^{-1}(\tau)=\infty$.

Положим

$$r(\tau)=\int\limits_{g(\varphi^{-1}(\tau))}^{\varphi^{-1}(\tau)}a(s)ds,\ r=\varliminf_{\tau\to\infty}r(\tau).$$

Пусть предположения утверждения 2 выполнены, но уравнение (3) имеет неосциллирующее решение x. Тогда существует t_0, начиная с которого $x(t)$ и $x(g(t))$ положительны и монотонны. Построим функцию $v(\tau)=x(\varphi^{-1}(\tau))$, которая также является положительной и монотонной. Рассмотрим автономное уравнение

$$(Ly)(\tau)\equiv y'(\tau)+y(\tau-r)=0,\ \tau\ge 0. \qquad (18)$$

Легко видеть, что

$$(Lv)(\tau)\equiv v'(\tau)+v(\tau-r)\le v'(\tau)+v(\tau-r(\tau)).$$

В силу (17)

$$\tau-r(\tau)=\int\limits_0^t a(s)ds-\int\limits_{g(t)}^{t}a(s)ds=$$

$$=\int\limits_0^{g(t)}a(s)ds=\varphi(g(t)),$$

$$v(\tau-r(\tau))=v(\varphi(g(t)))=x(g(t)).$$

Учитывая очевидное равенство $\dfrac{dv}{d\tau}=\dfrac{1}{a(t)}\dfrac{dx}{dt}$ и оценку (14), получаем:

$$(Lv)(\tau)\le\frac{1}{a(t)}\left(\dot{x}(t)+a(t)x(g(t))\right)=$$

$$=\frac{1}{a(t)}\left(\dot{x}(t)+\sum_{k=1}^{n}p_k(t)P_m(g(t),h_k(t))x(g(t))\right)\le$$

$$\le\frac{1}{a(t)}\left(\dot{x}(t)+\sum_{k=1}^{n}p_k(t)x(h_k(t))\right)=0.$$

Из леммы о дифференциальном неравенстве [22, с. 65; 23; 24] следует, что уравнение (18) имеет положительное решение. Уравнение (18) – частный случай уравнения (2), и согласно классическому критерию, приведенному в разделе 1, $r\le 1/e$. Но в силу (16) $r>1/e$. Противоречие. ▲

Несложно убедиться, что области применимости утверждения 2 и теоремы 2 не совпадают.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + p_1 x(t) + p_2 x(t-1) = 0, \ t \geq 0, \qquad (19)$$

где $p_1 > 0, p_2 > 0$.

Применим теорему 2. Очевидно, что $E_1(t) = \varnothing$, $E_2(t) = [t, t+1)$, следовательно, уравнение (19) является осциллирующим, если $p_2 > 1/e$.

С другой стороны, имеем $g(t) = t$, поэтому интеграл в неравенстве (16) обращается в нуль, т.е. утверждение 2 не дает никаких условий осцилляции уравнения (19).

Авторам статьи неизвестно, существует ли пример уравнения, для которого утверждение 2 дает лучший результат, чем теорема 2. Таким образом, вопрос о возможном усилении теоремы 2 (и даже следствия 2) остается открытым.

Список литературы

1. *Мышкис А.Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка периодического типа с запаздывающим аргументом // Математический сборник. 1951. Т. 28(70), № 1. С. 641–658.
2. *Győri I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations / Oxford Mathematical Monographs. N.Y.: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991.
3. *Трамов М.И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Матем. 1975. № 3. С. 92–96.
4. *Сабатулина Т.Л.* Об осциллирующих решениях автономных дифференциальных уравнений с последействием // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 3 (34). С. 25–31.
5. *Malygina V., T. Sabatulina T.* On oscillation of solutions of differential equations with distributed delay // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016. № 116. P. 1–16.
6. *Малыгина В.В.* Критерий осцилляции автономных дифференциальных уравнений с ограниченным последействием // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 132. С. 68–73.
7. *Ladas G., Lakshmikantham V., Papadakis J.S.* Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by the retarded argument // Delay and functional differential equations and their applications. Proc. Conf., Park City, Utah, 1972. N.Y.: Academic Press, 1972. P. 219–231.
8. *Ladde G.S., Lakshmikantham V., Zhang.B.G.* Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments. N.Y.: Marcel Dekker, 1987.
9. *Ladas G.* Sharp conditions for oscillations caused by delays // Applicable Anal. 1979. Vol. 9, № 2. P. 93–98.
10. *Коплатадзе Р.Г., Чантурия Т.А.* Колебания и монотонные решения дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 8. С. 1463–1465.
11. *Braverman E., Karpuz B.* On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays // Appl. Math. Comput. 2011. Vol. 218, № 7. P. 3880–3887.
12. *Chudinov K.* Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016. № 2, 1–10.
13. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
14. *Чудинов К.*М. О точных достаточных условиях осцилляции решений дифференциальных и разностных уравнений первого порядка с последействием // Изв. вузов. Матем. 2018 (в печати).
15. *Ladas G., Stavroulakis I.P.* Oscillations caused by several retarded and advanced arguments // J. Differential Equations. 1982. Vol. 44, № 1. P. 134–152.
16. *Berezansky L., Braverman E.* On nonoscillation of a scalar delay differential equation // Dyn. Syst. Appl. 1997. Vol. 6. P. 567–580.
17. *Tang X. H.* Oscillation of first order delay defferential equations with distributed delay // J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 289, № 2. P. 367–378.

18. *Li B.* Oscillation of first order delay differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124, № 12. P. 3729–3737.
19. *Stavroulakis I.P.* Oscillations of delay and difference equations with variable coefficients and arguments // Differential and difference equations with applications / Springer Proceedings in Mathematics&Statistics. Springer Proc. Math. Stat., 2016. Vol. 164. P. 169–189.
20. *Koplatadze R.*, *Kvinikadze G.* On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations // Georgian Math. J. 1994. Vol. 1, № 6. P. 675–685.
21. *Braverman E., Chatzarakis G.E., Stavroulakis I. P.* Iterative oscillation tests for differential equations with several nonmonotone arguments // Adv. Difference Equ. 2016. 2016:87, P. 1–18.
22. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.
23. *Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., et al.* Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications. New York: Springer, 2012.
24. *Чудинов К.М.* Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнения с последействием // Известия вузов. Математика. 2014. № 4. С. 52–61.

On oscillation of linear differential equations with several delays

K. M. Chudinov[1], **V. V. Malygina**[2]
[1] Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
cyril@list.ru; 8 (342) 2396769
[2] Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolskiy pr., Perm, 614990, Russia
mavera@list.ru; 8 (342) 2391564

We offer a survey and a comparison of oscillation tests for linear scalar functional differential equations with several concentrated delays.

Keywords: *linear functional differential equations; oscillation; effective tests.*