ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2017 Математика. Механика. Информатика Вып. 4(39)

МАТЕМАТИКА

УДК 517.929

Об устойчивости автономных разностных уравнений четвертого порядка

А. А. Кандаков[1], К. М. Чудинов[1,2]
[1]Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
[2]Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
kandakov.sasha@gmail.com, cyril@list.ru; +7(342)2391564

Исследуется область устойчивости линейных автономных разностных уравнений. Обнаружен прием понижения размерности пространства параметров. Область экспоненциальной устойчивости уравнения 4-го порядка получена в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: *разностное уравнение; экспоненциальная устойчивость; устойчивый многочлен; D-разбиение.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-4-5-10

1. Разностные уравнения

Разностные уравнения (РУ), или рекуррентные последовательности, использовались еще во времена древнего Вавилона. Примерами таких последовательностей могут служить арифметическая и геометрическая прогрессии или знаменитая последовательность Фибоначчи, вытекающая из задачи, сформулированной в 1202 г.

Развитие теории РУ со времен появления дифференциального и интегрального исчислений долгое время проходило в тени работ, посвященных дифференциальным уравнениям (ДУ), основной областью применения РУ являлись приближенные решения ДУ. Ситуация изменилась в последние два десятилетия XX в. Количество работ, посвященных исследованию РУ, стало стремительно возрастать. Основной причиной усилившегося интереса исследователей к РУ является лавинообразное развитие вычислительной техники, а вместе с ней и численных методов, где дискретные исчисления нашли применение в полном объеме. Ныне теория РУ является попрежнему тесно связанным с теорией ДУ, но уже вполне самостоятельным разделом математики. Сегодня РУ используются в вычислительной технике, экономике, биологии, экологии и других сферах (основы и обзор некоторых приложений теории РУ см., напр., в книге [1]).

Теория линейных РУ подобна классической теории линейных обыкновенных ДУ [2, 3]. В частности, для линейных РУ построена теория устойчивости, аналогичная теории устойчивости для ОДУ [4, 5]. Устойчивость автономных РУ определяется расположением корней характеристического уравнения относительно единичного круга комплексной плоскости. Эффективные критерии устойчивости РУ могут быть получены из соответствующих критериев для ДУ, где устойчивость определяется расположением корней характеристического уравнения относительно мнимой оси.

Однако геометрическое описание областей устойчивости уравнений высоких порядков в пространстве коэффициентов требует описания непрерывного изменения сечений этих областей [6]. Уже для уравнения 4-го порядка сечения геометрически сильно отличаются друг от друга, поэтому динамика перехода одной области в другую наверняка непроста.

В этой работе рассматривается вопрос получения области устойчивости в пространстве параметров для линейного автономного разностного уравнения общего вида порядков до 4-го включительно. Используется метод D-разбиения [7, 8] и авторский прием понижения размерности искомой области. В частности, благодаря переходу к новым координатам удается уменьшить число параметров уравнения 4-го порядка и не только получить область устойчивости в аналитическом виде, но и явно построить ее в трехмерном пространстве.

2. Устойчивость решений автономного уравнения

Обозначим $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Автономное разностное уравнение k-го порядка имеет вид

$$\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} x(n+i) = 0, \quad n \in N_0, \qquad (1)$$

где $a_i \in R$, $i = \overline{0,k}$, $a_0 \neq 0$.

Определение 1. *Решением* уравнения (1) называется функция $x: N_0 \to R$, удовлетворяющая равенству (1) для всех $n \in N_0$.

Очевидно, что решение уравнения (1) однозначно определяется произвольной начальной функцией $\varphi: \{0, 1, \ldots, k-1\} \to R$ и условием $x(n) = \varphi(n)$, $n = \overline{0, k-1}$.

Понятие *устойчивость решения* отражает непрерывность зависимости решения от начальной функции. Для уравнения (1) в силу его линейности и однородности устойчивость определяется оценкой модуля решения.

В данной работе мы исследуем *асимптотическую устойчивость* уравнения (1), которая для него совпадает с *экспоненциальной*, что следует из формулы представления решения [1, с. 77].

Определение 2. Уравнение (1) будем называть *экспоненциально устойчивым*, если существует такая константа $\gamma > 0$, что для каждого решения x при некотором $M > 0$ для всех $n \in N_0$ имеем $|x(n)| \leq M e^{-\gamma n}$.

Хорошо известен следующий критерий.

Теорема 1 [1, с. 246]. *Уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво, если и только если все корни его характеристического многочлена* $\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} \lambda^i$ *лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга.*

Для построения области устойчивости воспользуемся *методом D-разбиения*. В отличие от теорем типа Шура–Кона [1, с. 247; 9, с. 131–133], метод D-разбиения позволяет не только устанавливать, является ли данное уравнение устойчивым, но и получать представление об устойчивости семейства уравнений с определенными параметрами. Суть метода заключается в построении границ в пространстве параметров, при переходе через которые изменяется количество корней характеристического уравнения, находящихся внутри единичного круга комплексной плоскости. После построения этих границ остается выбрать из областей, на которые разбилось пространство параметров, области, которым соответствует нулевое число таких корней. Их объединение и составляет область экспоненциальной устойчивости.

3. Основной результат

Рассмотрим уравнение 4-го порядка

$$\begin{aligned} a_0 x(n+4) + a_1 x(n+3) + a_2 x(n+2) + \\ + a_3 x(n+1) + a_4 x(n) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Сделаем D-разбиение пространства параметров уравнения (2). Поскольку нас интересуют только корни характеристического многочлена

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4,$$

попавшие на единичную окружность, положим $\lambda = e^{i\varphi}$ и приравняем многочлен нулю. Домножив обе части равенства на ненулевую величину $e^{-2i\varphi}$, получаем:

$$a_0 e^{2i\varphi} + a_1 e^{i\varphi} + a_2 + a_3 e^{-i\varphi} + a_4 e^{-2i\varphi} = 0.$$

По формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ приведем уравнение в тригонометрическую форму и разделим мнимую и действительную части:

$$\begin{cases} a_0 \cos 2\varphi + a_1 \cos\varphi + a_2 + \\ \qquad + a_3 \cos(-\varphi) + a_4 \cos(-2\varphi) = 0, \\ a_0 \sin 2\varphi + a_1 \sin\varphi + \\ \qquad + a_3 \sin(-\varphi) +_4 \sin(-2\varphi) = 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись свойствами четности и нечетности тригонометрических функций, сгруппируем коэффициенты:

$$\begin{cases}(a_0 + a_4)\cos 2\varphi + (a_1 + a_3)\cos\varphi + a_2 = 0,\\ (a_0 - a_4)\sin 2\varphi + (a_1 - a_3)\sin\varphi = 0.\end{cases} \quad (3)$$

Система (3) содержит пять параметров, но заменой переменных их количество удается свести к трем, что позволяет явно построить область в трехмерном пространстве. В случае, когда $a_0 \neq a_4$ и $a_0 \neq -a_4$, при переходе к новым координатам

$$\xi = \frac{a_3 - a_1}{2(a_0 - a_4)},\ \eta = \frac{a_3 + a_1}{a_0 + a_4},\ \rho = \frac{a_2}{a_0 + a_4} \quad (4)$$

система (3) определяет три поверхности в трехмерном пространстве. В остальных случаях размерность пространства также понижается соответствующими заменами. Полученные результаты показаны в табл. 1.

Таблица 1. *Поверхности D-разбиения уравнения* (2)

1	$a_0 \neq a_4$, $a_0 \neq -a_4$	$2\xi^2 + \xi\eta + \rho - 1 = 0$, $1 - \eta + \rho = 0$, $1 + \eta + \rho = 0$
2	$a_0 = a_4$	$a_1 = a_3$ и $\eta t + \rho + 2t^2 - 1 = 0$, где $t \in [-1;1]$; $\rho + \eta + 1 = 0$; $\rho - \eta + 1 = 0$
3	$a_0 = -a_4$	$\xi \in [-1;1]$ и $(a_1 + a_3)\xi + a_2 = 0$; $(a_1 + a_3) + a_2 = 0$; $(a_1 + a_3) - a_2 = 0$

Лемма 1. *Область экспоненциальной устойчивости уравнения* (2) *ограниченна в четырехмерном пространстве параметров* $\{a_i/a_0\}$, $i = \overline{1,4}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_{1,2,3,4}$ – корни характеристического многочлена. По теореме Виета имеем:

$$a_1/a_0 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4),$$

$$a_2/a_0 = \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{4} \lambda_i\lambda_j,$$

$$a_3/a_0 = -\sum_{\substack{i,j,k=1,\\ i\neq j,\, j\neq k,\, k\neq i}}^{4} \lambda_i\lambda_j\lambda_k,$$

$$a_4/a_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4.$$

Если уравнение экспоненциально устойчиво, то $|\lambda_i| < 1$, $i = \overline{1,4}$, следовательно,

$$a_1/a_0 \in (-4;4),\quad a_2/a_0 \in (-6;6),$$
$$a_3/a_0 \in (-4;4),\quad a_4/a_0 \in (-1;1).$$

Область экспоненциальной устойчивости лежит внутри этого параллелепипеда. □

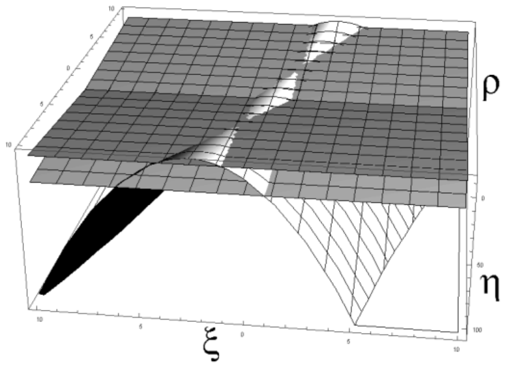

Рис. 1. *Поверхности D-разбиения уравнения* (2) *в случае* $a_0 \neq a_4$, $a_0 \neq -a_4$

Лемма 2. *Для экспоненциально устойчивого уравнения* (2) *значения* (4) *ограничены.*

Доказательство. Условию леммы 1 удовлетворяет только первая строка табл. 1. Указанные в ней поверхности разбивают трехмерное пространство на несколько областей (см. рис. 1). Если точка некоторой из областей *D*-разбиения лежит в области устойчивости, то в силу метода *D*-разбиения вся эта область находится внутри области устойчивости. Но все неограниченные области разбиения пространства рассматриваемыми поверхностями таковы, что для некоторой точки (ξ_0, η_0, ρ_0) внутри области пересечение области либо с плоскостью $\eta = \eta_0$, либо с плоскостью $\rho = \rho_0$, неограниченно по обеим оставшимся координатам. Но это невозможно при условии ограниченности значений a_i/a_0, $i = \overline{1,4}$, которое по лемме 1 является необходимым условием экспоненциальной устойчивости. Действительно, если значения a_i/a_0, $i = \overline{1,3}$ ограниченны, то значение ξ может неограниченно расти только при $a_4/a_0 \to 1$, а значения η и ρ – при $a_4/a_0 \to -1$.

Таким образом, только ограниченная область разбиения может находиться внутри области устойчивости. □

Итак, условиям лемм 1 и 2 удовлетворяет только ограниченная область разбиения трехмерного координатного пространства $\{\xi,\eta,\rho\}$ поверхностями из первой строки табл. 1. Определим эту область аналитически и построим графически.

Обозначим $D=\{(\xi,\eta,\rho)\in\mathbf{R}^3$.

$2\xi^2+\xi\eta+\rho-1<0,\ 1-\eta+\rho>0,\ 1+\eta+\rho>0\}$.

Получим удобный вид области *D*, отбросив на рис. 1 лишние поверхности (см. рис. 2).

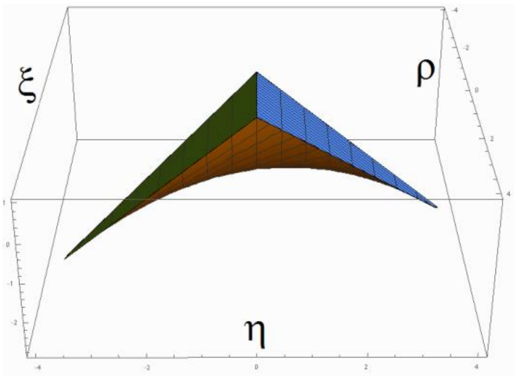

Рис. 2. *Область D*

Теорема 2. *Уравнение* (2) *экспоненциально устойчиво, если и только если* $|a_4|<|a_0|$ *и точка с координатами*

$$\left(\frac{a_3-a_1}{2(a_0-a_4)},\frac{a_1+a_3}{a_0+a_4},\frac{a_2}{a_0+a_4}\right)$$

принадлежит области D.

Доказательство. Пятимерное координатное пространство $\{a_i\}_{i=0}^4$ разбивается гиперплоскостями $a_0=a_4$ и $a_0=-a_4$ на четыре квадранта. Формулы (4) ставят в соответствие каждому из этих квадрантов трехмерное координатное пространство $\{\xi,\eta,\rho\}$. Полученное в лемме 1 условие $|a_4|<|a_0|$ указывает два квадранта, точкам которых могут соответствовать экспоненциально устойчивые уравнения (2). Координаты каждой точки этих квадрантов, соответствующие точке области *D*, являются коэффициентами экспоненциально устойчивого уравнения (2). Действительно, нетрудно убедиться, что области в этих квадрантах координатного пространства $\{a_i\}_{i=0}^4$, являющиеся прообразами области *D*, содержат устойчивые точки $(2,1,0,0,0)$ и $(-2,1,0,0,0)$. Поскольку эти области (прообразы области *D*) не пересекается с поверхностями *D*-разбиения, их точкам соответствуют экспоненциально устойчивые уравнения (2). □

Теорема 2 дает геометрический критерий устойчивости. Тот же результат можно сформулировать в аналитической форме.

Теорема 3. *Уравнение* (2) *экспоненциально устойчиво, если и только если для его коэффициентов выполнены неравенства:*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_3-a_1}{a_0-a_4}\right)^2+\frac{a_3^2-a_1^2}{2(a_0^2-a_4^2)}+\frac{a_2}{a_0+a_4}<1;$$

$$\frac{a_1-a_2+a_3}{a_0+a_4}<1;\quad \frac{a_1+a_2+a_3}{a_0+a_4}>-1;\quad |a_4|<|a_0|.$$

4. Прием понижения размерности

Примененный в разделе 3 прием понижения размерности пространства параметров позволил значительно упростить объект исследования и представить область устойчивости уравнения 4-го порядка в трехмерном пространстве. Интересно проверить применимость использованного подхода для исследования автономных разностных уравнений другого порядка. Используем его для получения областей экспоненциальной устойчивости уравнений 2-го и 3-го порядков. Их области устойчивости в пространстве исходных коэффициентов известны (см., напр., [9, с. 132–133], [10, с. 190], [11]).

Наша цель – не получение новой области, а исследование возможностей метода.

4.1. Уравнение 2-го порядка

Найдем область устойчивости уравнения 2-го порядка и представим ее на прямой.

Уравнение имеет вид:

$$a_0x(n+2)+a_1x(n+1)+a_2x(n)=0,\ n\in N_0. \quad (5)$$

Подставляя $\lambda=e^{i\varphi}$ в характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$$

и домножая его на $e^{-i\varphi}$, получаем

$$a_0e^{i\varphi}+a_1+a_2e^{-i\varphi}=0.$$

Применим формулу Эйлера и сгруппируем коэффициенты:

$$\begin{cases}(a_0+a_2)\cos\varphi+a_1=0,\\(a_0-a_2)\sin\varphi=0.\end{cases}$$

Исследуем эту систему аналогично системе 4-го порядка (3), проводя деление на группы коэффициентов, замены переменных и рассматривая отдельно запрещенные случаи. Результаты приведены в табл. 2, где

$$k=\frac{a_1}{a_0+a_2}. \quad (6)$$

Таблица 2. *Поверхности D-разбиения уравнения* (5)

1	$a_0\neq a_2$, $a_0\neq -a_2$	$k\in\{1,-1\}$
2	$a_0=a_2$	$k\in[-1;1]$
3	$a_0=-a_2$	$a_1=0$

По теореме Виета устойчивость возможна только в случае $|a_2|<|a_0|$. Аналогично соотношениям (4) для уравнения (2) (см. доказательство теоремы 2), соотношение (6) устанавливает соответствие между интервалом (-1,1) и областями в координатном пространстве $\{a_0,a_1,a_2\}$ внутри каждого из квадрантов, на которые пространство делится плоскостями $a_0=\pm a_2$. Компоненты области устойчивости лежит в квадрантах $|a_2|<|a_0|$, границами их одномерного образа являются значения $k=\pm1$ (см. рис. 3).

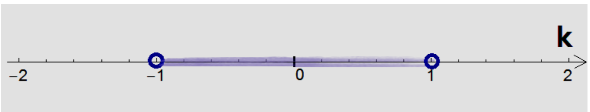

Рис. 3. *Одномерный образ области экспоненциальной устойчивости уравнения* (5)

Теорема 4. *Уравнение* (5) *экспоненциально устойчиво, если и только если для его коэффициентов выполнены неравенства*

$$|a_2|<|a_0| \text{ и } \left|\frac{a_1}{a_0+a_2}\right|<1.$$

4.2. Уравнение 3-го порядка

Понижение размерности области устойчивости оказывается возможным и для уравнения 3-го порядка, однако процесс построения области немного отличается от процесса для четных порядков.

Уравнение 3-го порядка имеет вид

$$a_0x(n+3)+a_1x(n+2)+ \\ +a_2x(n+1)+a_3x(n)=0, \quad n\in N_0, \quad (7)$$

его характеристическое уравнение после подстановки $\lambda=e^{i\varphi}$ принимает вид

$$a_0e^{3i\varphi}+a_1e^{2i\varphi}+a_2e^{i\varphi}+a_3=0.$$

В отличие от случаев четных порядков, для дальнейшего выделения групп коэффициентов домножим это уравнение на величину с дробным коэффициентом в показателе, $e^{-\frac{3}{2}i\varphi}$:

$$a_0e^{\frac{3}{2}i\varphi}+a_1e^{\frac{1}{2}i\varphi}+a_2e^{-\frac{1}{2}i\varphi}+a_3e^{-\frac{3}{2}i\varphi}=0.$$

Далее действуем, как в предыдущих случаях: применяем формулу Эйлера, разделяем действительную и мнимую части и группируем коэффициенты. Получаем:

$$\begin{cases}(a_0+a_3)\cos\frac{3\varphi}{2}+(a_1+a_2)\cos\frac{\varphi}{2}=0,\\(a_0-a_3)\sin\frac{3\varphi}{2}+(a_1-a_2)\sin\frac{\varphi}{2}=0.\end{cases} \quad (8)$$

Первое уравнение системы (8) не имеет свободных членов, как было в случаях с уравнениями четных порядков, однако алгоритм решения аналогичен: рассматривается несколько случаев, в каждом из которых размерность пространства параметров понижается. Результаты приведены в табл. 3, где

$$p=\frac{a_1+a_2}{a_0+a_3},\ q=\frac{a_1-a_2}{a_0-a_3}.$$

Область устойчивости находим аналогично предыдущим случаям. Четырехмерное координатное пространство $\{a_i\}_{i=0}^3$ делится на квадранты гиперплоскостями $a_0=\pm a_3$. Компоненты области устойчивости лежат в квадрантах $|a_2|<|a_0|$, их образ на координатной плоскости $\{p,q\}$ ограничен прямыми, указанными в первой строке табл. 3 (см. рис. 4).

Таблица 3. *Поверхности D-разбиения уравнения* (7)

1	$a_0 \neq a_3$ $a_0 \neq -a_3$	$p - q = 2,$ $p = -1,$ $q = 1$
2	$a_0 = a_3$	$a_1 = a_2$ $2a_0 + a_1 + a_2 = 0$
3	$a_0 = -a_3$	$a_1 = -a_2$ $2a_0 - a_1 + a_2 = 0$

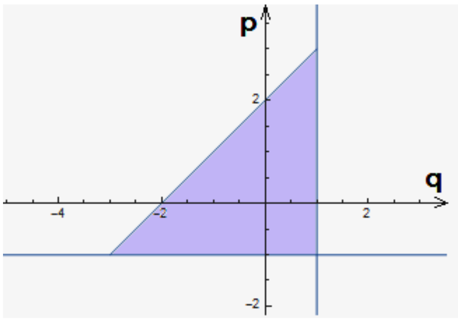

Рис. 4. *Двумерный образ области экспоненциальной устойчивости уравнения* (7)

Теорема 5. *Уравнение* (7) *экспоненциально устойчиво, если и только если для его коэффициентов выполнены неравенства*

$$|a_3| < |a_0|, \quad \frac{a_1 + a_2}{a_0 + a_3} > -1, \quad \frac{a_1 - a_2}{a_0 - a_3} < 1$$

$$\text{и} \quad \frac{a_1 + a_2}{a_0 + a_3} - \frac{a_1 - a_2}{a_0 - a_3} < 2 .$$

Итак, предложенный прием понижения размерности позволяет для уравнений вида (1) до 4-го порядка включительно получить области асимптотической устойчивости как в аналитической, так и в геометрической форме.

Прием не сложен технически и позволяет упростить исследование устойчивости уравнения (1).

Список литературы

1. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. 3rd ed. N.Y.: Springer, 2005. 539 c.
2. *Гельфанд А.О.* Исчисление конечных разностей. 3-е изд. М.: Наука, 1967. 376 с.
3. *Самарский А.А., Карамзин Ю.Н.* Разностные уравнения. М.: Знание, 1978. 64 с.
4. *Мартынюк Д.И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова думка, 1972. 246 с.
5. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 310 с.
6. *Николаев Ю.П.* Анализ геометрии D-разбиения двумерной плоскости произвольных коэффициентов характеристического полинома дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 2004. № 12. С. 49–61.
7. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения // Автоматика и телемеханика. 2008. № 12. С. 3–40.
8. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949. 140 с.
9. *Симонов П.М.* Экономико-математическое моделирование: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 1. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2009. 338 с.
10. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
11. *Баландин А.С., Малыгина В.В.* О разрешимости одного класса разностных уравнений // Вычислительная механика: сб. науч. тр. № 4. Пермь, 2006. С. 67–72.

On the stability of autonomous difference equations of the fourth order

A. A. Kandakov[1], **K. M. Chudinov**[1,2]

[1] Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolskiy pr., Perm, 614990, Russia

[2] Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia

kandakov.sasha@gmail.com; cyril@list.ru

We investigate a stability domain for linear autonomous difference equations. We present a method for decreasing the dimension of the parameter space. The domain of exponential stability of the fourth-order equation is obtained in a three-dimensional space.

Keywords: *difference equation; exponential stability; stable polynomial; D-decomposition.*