УДК 62-50

Минимизация энергетических затрат в задаче оптимальной переориентации твердого тела в сопротивляющейся среде

Н. А. Стрелкова
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
strelkova@psu.ru; (342) 2 396 309

Исследуется задача оптимального управления переориентацией сферически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде, при условии, что вектор управляющего внешнего момента ограничен по модулю. В качестве минимизируемого функционала используется функционал энергетических затрат. Для решения задачи применяются теория кватернионов и принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Ключевые слова: *оптимальное управление*; *переориентация твердого тела; сопротивляющаяся среда*; *минимум энергетических затрат*; *принцип максимума Понтрягина*.

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-3-72-76

1. Постановка задачи

Уравнения управляемого углового движения твердого тела, обладающего сферической симметрией, имеют вид [1]

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda} = \lambda \circ \omega, \\ I\dot{\omega} = \mathrm{u} - k\omega, \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – кватернион, компонентами которого являются параметры Родрига–Гамильтона λ_i, $\circ$ – символ кватернионного произведения, $I_1 = I_2 = I_3 = I$ – главные центральные моменты инерции тела, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор управляющего момента, ω_i, u_i – проекции соответственно ω и u на главные центральные оси инерции, k – коэффициент аэродинамического момента сопротивления вращению тела.

Начальное положение твердого тела задается равенствами

$$\lambda(0) = \lambda_0 = (\lambda_{00}, \lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}), \;\; \omega(0) = 0. \tag{2}$$

В конечный момент времени T связанная с твердым телом и опорная системы координат совпадают

$$\lambda(T) = \lambda_T = (\pm 1, 0, 0, 0), \;\; \omega(T) = 0. \tag{3}$$

На величину управляющего момента наложено ограничение

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \le u_0^2, \tag{4}$$

где $u_0 = \mathrm{const} > 0$.

Требуется найти управляющие функции $u_i(t)$ ($i = 1,2,3$), удовлетворяющие ограничению (4), переводящие твердое тело из начального положения (2) в конечное (3) и доставляющие минимум функционалу энергетических затрат:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right) dt, \tag{5}$$

где время перехода T задано.

В данной постановке задача рассматривалась при $k = 0$ в работе [1].

2. Построение оптимального решения

Введем новые переменные по формулам:

$$t = \sqrt{\frac{I}{u_0}}t', \quad \omega = \sqrt{\frac{u_0}{I}}\ \omega', \quad \mathrm{u} = u_0 \mathrm{u}',$$
$$k = \sqrt{Iu_0}k', \quad T = \sqrt{\frac{I}{u_0}}T', \quad J = \sqrt{Iu_0^3}J'. \tag{6}$$

В дальнейшем все исследования будем проводить в штрихованных переменных, однако штрихи для упрощения записи опустим. После замены (6) получаем

$$\begin{cases} 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u} - k\boldsymbol{\omega}, \end{cases} \tag{7}$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \le 1. \tag{8}$$

Вид граничных условий (2), (3) и функционала (5) останется прежним.

Решение задачи будем искать в классе плоских поворотов, при которых вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ сохраняет постоянное направление в пространстве. Тогда вектор угловой скорости может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{x}(t)\boldsymbol{\zeta}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ – постоянный единичный вектор, направленный по оси вращения, x – величина угла поворота.

Общее решение кинематических уравнений системы (7) при постоянном по направлению векторе угловой скорости имеет вид [2]

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{c} \circ \exp\frac{1}{2}\int_0^t \boldsymbol{\omega}(t')dt', \tag{10}$$

где $\mathbf{c}$ – постоянный кватернион.

Из системы уравнений (7) следует:

$$2\ddot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{u} - k\,\boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}. \tag{11}$$

Подставим в уравнение (11) соотношения (9) и (10). Учитывая, что $\boldsymbol{\zeta} \circ \boldsymbol{\zeta} = -1$, получаем

$$\ddot{x} + k\dot{x} = u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 + u_3\zeta_3. \tag{12}$$

Из ограничения (8) вытекает

$$|u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 + u_3\zeta_3| \le 1. \tag{13}$$

Полагая

$$u^* = u_1\zeta_1 + u_2\zeta_2 + u_3\zeta_3, \tag{14}$$

преобразуем соотношения (12), (13) к виду

$$\ddot{x} + k\dot{x} = u^*, \quad |u^*| \le 1. \tag{15}$$

Преобразуем функционал (5), используя формулы (7), (9), (15):

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^T \left[(\dot{\omega}_1 + k\omega_1)^2 + (\dot{\omega}_2 + k\omega_2)^2 + (\dot{\omega}_3 + k\omega_3)^2\right]dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^T \left[(\ddot{x}\zeta_1 + k\dot{x}\zeta_1)^2 + (\ddot{x}\zeta_2 + k\dot{x}\zeta_2)^2 + (\ddot{x}\zeta_3 + k\dot{x}\zeta_3)^2\right]dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^T u^{*2}\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^T u^{*2}dt.$$

Тогда функционал (5) примет вид

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T u^{*2}\,dt. \tag{16}$$

Для объекта, описываемого дифференциальным уравнением (15), в работе [3] найдено оптимальное управление, обеспечивающее перевод фазовой точки из начального состояния $x(0) = x_0 > 0$, $\dot{x}(0) = 0$ в конечное положение $x(T) = \dot{x}(T) = 0$ и доставляющее минимум функционалу (16). А именно, при $x_0 \le \dfrac{2 - 2\operatorname{ch}kT + kT\operatorname{sh}kT}{k^2(\operatorname{ch}kT - 1)}$:

$$x = \frac{1 - \operatorname{ch}kT + \operatorname{ch}kt - \operatorname{ch}k(T-t)}{2 - 2\operatorname{ch}kT + kT\operatorname{sh}kT}x_0 + \frac{k(T-t)\operatorname{sh}kT}{2 - 2\operatorname{ch}kT + kT\operatorname{sh}kT}x_0, \tag{17}$$

$$u^* = k^2\frac{\left(1 - e^{-kT}\right)e^{kt} - \operatorname{sh}kT}{2 - 2\operatorname{ch}kT + kT\operatorname{sh}kT}x_0, \tag{18}$$

$$J_{\min} = \frac{k^3x_0^2\operatorname{sh}kT}{2\left(2 - 2\operatorname{ch}kT + kT\operatorname{sh}kT\right)}; \tag{19}$$

при $\dfrac{2 - 2\operatorname{ch}kT + kT\operatorname{sh}kT}{k^2(\operatorname{ch}kT - 1)} \le x_0 \le \dfrac{2}{k^2}\ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{k}{2}T\right)$:

$$x=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-kt}}{k^2}-\dfrac{t}{k}+x_0,\ 0\le t\le\tau_1,\\ d_1e^{-kt}+\dfrac{e^{kt}}{k^2\Delta_1}-\dfrac{\Delta_2}{k\Delta_1}t+d_2,\ \tau_1\le t\le\tau_2,\\ \dfrac{e^{k(T-t)}-1}{k^2}+\dfrac{t-T}{k},\ \ \tau_2\le t\le T,\end{cases}\quad(20)$$

$$u^*=\begin{cases}-1,\ 0\le t\le\tau_1,\\ \dfrac{2e^{kt}-\Delta_2}{\Delta_1},\ \tau_1\le t\le\tau_2,\\ +1,\ \ \tau_2\le t\le T,\end{cases}\qquad(21)$$

$$J_{\min}=\frac{1}{2}(\tau_1+T-\tau_2)-\frac{\Delta_2}{k\Delta_1}+\frac{\Delta_2^2}{2\Delta_1^2}(\tau_2-\tau_1),\quad(22)$$

где

$$\Delta_1=e^{k\tau_2}-e^{k\tau_1},\ \Delta_2=e^{k\tau_2}+e^{k\tau_1},$$
$$d_1=-\frac{e^{2k\tau_1}+\Delta_1}{k^2\Delta_1},\ d_2=\frac{\tau_1(\Delta_2-\Delta_1)}{k\Delta_1}+x_0+\frac{1}{k^2}.\quad(23)$$

а моменты τ_1,τ_2 переключения управления определяются из следующей системы трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases}k^2x_0+2+T=2\dfrac{k\tau_2e^{k\tau_2}-k\tau_1e^{k\tau_1}}{e^{k\tau_2}-e^{k\tau_1}},\\ e^{k\tau_2}+e^{k\tau_1}=e^{kT}+1.\end{cases}\qquad(24)$$

При $x_0>\dfrac{2}{k^2}\ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{k}{2}T\right)$

рассматриваемая задача решения не имеет.

Используя соотношения (9), (17), (20), найдем вектор угловой скорости.

При $x_0\le\dfrac{2-2\operatorname{ch}kT+kT\operatorname{sh}kT}{k^2(\operatorname{ch}kT-1)}$:

$$\boldsymbol{\omega}=k\frac{\operatorname{sh}kt+\operatorname{sh}k(T-t)-\operatorname{sh}kT}{2-2\operatorname{ch}kT+kT\operatorname{sh}kT}x_0\boldsymbol{\zeta},\qquad(25)$$

при
$\dfrac{2-2\operatorname{ch}kT+kT\operatorname{sh}kT}{k^2(\operatorname{ch}kT-1)}\le x_0\le\dfrac{2}{k^2}\ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{k}{2}T\right)$:

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{k}e^{-kt}-\dfrac{1}{k}\right)\boldsymbol{\zeta},\ 0\le t\le\tau_1,\\ \left(-kd_1e^{-kt}+\dfrac{e^{kt}}{k\Delta_1}-\dfrac{\Delta_2}{k\Delta_1}\right)\boldsymbol{\zeta},\ \tau_1\le t\le\tau_2,\\ \left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{e^{k(T-t)}}{k}\right)\boldsymbol{\zeta},\ \ \tau_2\le t\le T.\end{cases}\quad(26)$$

Из соотношений (7), (25), (26) определим вектор управляющего момента.

При $x_0\le\dfrac{2-2\operatorname{ch}kT+kT\operatorname{sh}kT}{k^2(\operatorname{ch}kT-1)}$:

$$\mathbf{u}=k^2\frac{\left(1-e^{-kT}\right)e^{kt}-\operatorname{sh}kT}{2-2\operatorname{ch}kT+kT\operatorname{sh}kT}x_0\boldsymbol{\zeta},\qquad(27)$$

при $\dfrac{2-2\operatorname{ch}kT+kT\operatorname{sh}kT}{k^2(\operatorname{ch}kT-1)}\le x_0\le\dfrac{2}{k^2}\ln\left(\operatorname{ch}\dfrac{k}{2}T\right)$:

$$\mathbf{u}=\begin{cases}-\boldsymbol{\zeta},\ 0\le t\le\tau_1,\\ \left(\dfrac{2e^{kt}}{\Delta_1}-\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)\boldsymbol{\zeta},\ \tau_1\le t\le\tau_2,\\ \boldsymbol{\zeta},\ \ \tau_2\le t\le T.\end{cases}\qquad(28)$$

Используя соотношения (2), (9), (10), получаем решение кинематических уравнений системы (7):

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_0\circ\exp\left\{\frac{1}{2}(x-x_0)\boldsymbol{\zeta}\right\},\qquad(29)$$

где функция $x=x(t)$ определяется равенствами (17), (20).

Неизвестную постоянную x_0 и компоненты единичного вектора $\boldsymbol{\zeta}$ найдем из граничного условия (3), выбирая в формулах (19), (22) из двух значений функционала наименьшее. Тогда

$$x_0=2\arccos|\lambda_{00}|,\qquad(30)$$

$$\zeta_i=\begin{cases}+\dfrac{\lambda_{i0}}{\sqrt{1-\lambda_{00}^2}},\ \text{если } \lambda_{00}\ge0,\\ -\dfrac{\lambda_{i0}}{\sqrt{1-\lambda_{00}^2}}\ \ \text{если } \lambda_{00}\le0,\ \ i=\overline{1,3}.\end{cases}\qquad(31)$$

Покажем, что полученное решение (17), (19), (20), (22)–(31), определяющее плоский разворот твердого тела из начального положения (2) в конечное (3), удовлетворяет необходимым условиям принципа максимума Л.С.

Понтрягина [4] для задачи оптимального управления (2), (3), (5), (7), (8).

Так же, как и в работе [2], введем в рассмотрение кватернионы $\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ сопряженных переменных, в которых компоненты $\psi_i\ (i = 0, 1, 2, 3)$, соответствуют параметрам λ_i, а $\varphi_j\ (j = 1, 2, 3)$ – переменным ω_j.

Введем обозначение

$$\mathbf{p} = \mathrm{vect}\left(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\psi}\right) \tag{32}$$

и преобразуем функцию Гамильтона–Понтрягина к следующему виду:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\omega_i p_i - 2k\omega_i\varphi_i + 2u_i\varphi_i + \varphi_0 u_i^2\right).$$

При $\varphi_0 = 0$ приходим к задаче оптимального по быстродействию управления переориентацией сферически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде, рассмотренной в работе [5]. Без ограничения общности положим $\varphi_0 = -1$.

Тогда

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\omega_i p_i - 2k\omega_i\varphi_i + 2u_i\varphi_i - u_i^2\right). \tag{33}$$

Преобразуем функцию H:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\omega_i p_i - 2k\omega_i\varphi_i - \left(u_i - \varphi_i\right)^2 + \varphi_i^2\right). \tag{34}$$

Из соотношений (33), (34) следует, что функция H достигает максимума при

$$\mathrm{u} = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}, & \text{если } \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \le 1, \\ \dfrac{\boldsymbol{\varphi}}{|\boldsymbol{\varphi}|}, & \text{если } \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \ge 1. \end{cases} \tag{35}$$

Сопряженные уравнения для системы (7) имеют вид

$$2\dot{\psi} = \psi \circ \omega, \tag{36}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = k\boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{2}\mathrm{p}. \tag{37}$$

Из соотношений (29), (32), (36) получаем, что

$$\psi = \lambda_0 \circ p_0\zeta \circ \exp\left\{\frac{1}{2}\left(x - x_0\right)\zeta\right\}, \tag{38}$$

$$\mathrm{p} = p_0\zeta. \tag{39}$$

Тогда из (35), (37)–(39) следует, что при выполнении условия $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \le 1$:

$$\boldsymbol{\varphi} = k^2\,\frac{\left(1 - e^{-kT}\right)e^{kt} - \mathrm{sh}\,kT}{2 - 2\,\mathrm{ch}\,kT + kT\,\mathrm{sh}\,kT}\,x_0\,\zeta, \tag{40}$$

$$p_0 = -\frac{2k^3\,\mathrm{sh}\,kT}{2 - 2\,\mathrm{ch}\,kT + kT\,\mathrm{sh}\,kT}\,x_0, \tag{41}$$

а при $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \ge 1$:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{2e^{kt} - e^{k\tau_2} - e^{k\tau_1}}{e^{k\tau_2} - e^{k\tau_1}}\zeta, \tag{42}$$

$$p_0 = 2k\,\frac{e^{k\tau_2} + e^{k\tau_1}}{e^{k\tau_2} - e^{k\tau_1}}. \tag{43}$$

Здесь τ_1, τ_2, x_0, ζ определяются из соотношений (24), (30), (31).

Таким образом, для рассматриваемой задачи оптимального управления переориентацией сферически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде решение при

$$2\arccos\left|\lambda_{00}\right| \le \frac{2 - 2\,\mathrm{ch}\,kT + kT\,\mathrm{sh}\,kT}{k^2\left(\mathrm{ch}\,kT - 1\right)} \tag{44}$$

описывается формулами (17), (19), (25), (27), (29)–(31); при

$$\frac{2 - 2\,\mathrm{ch}\,kT + kT\,\mathrm{sh}\,kT}{k^2\left(\mathrm{ch}\,kT - 1\right)} \le 2\arccos\left|\lambda_{00}\right| \le \le \frac{2}{k^2}\ln\left(\mathrm{ch}\frac{k}{2}T\right) \tag{45}$$

задается соотношениями (20), (22)–(24), (26), (28)–(31); при

$$2\arccos\left|\lambda_{00}\right| > \frac{2}{k^2}\ln\left(\mathrm{ch}\frac{k}{2}T\right)$$

задача решения не имеет.

Пример

Рассмотрим задачу оптимального управления переориентацией твердого тела из начального состояния

$$\lambda(0) = \left(0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}707\right), \quad \omega(0) = 0$$

в конечное положение (3) при $k = 0{,}8$.

Положим $T = 5$. В этом случае выполняется условие (44). Угол поворота твердого тела за время T равен $x_0 = 2{,}532$ рад., минимальное значение функционала энергетических затрат $J_{\min} = 0{,}792$. Примем $T = 3{,}7$. В этом случае выполняется условие (45). Моменты переключения управления соответственно равны $\tau_1 = 0{,}271$, $\tau_2 = 3{,}312$.

Угол поворота твердого тела за время T равен остается прежним $x_0 = 2{,}532$ рад., но при этом возрастают энергетические затраты $J_{\min} = 1{,}511$.

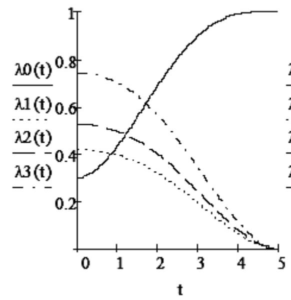

Рис. 1. $T = 5$

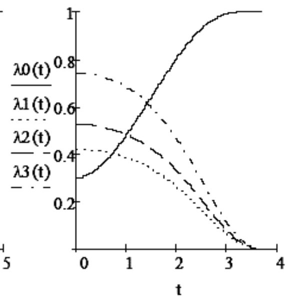

Рис. 2. $T = 3{,}7$

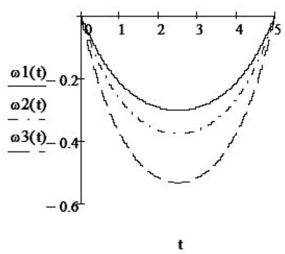

Рис. 3. $T = 5$

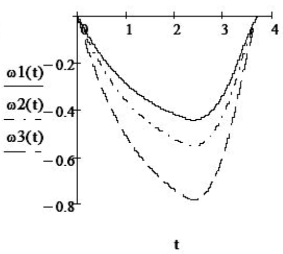

Рис. 4. $T = 3{,}7$

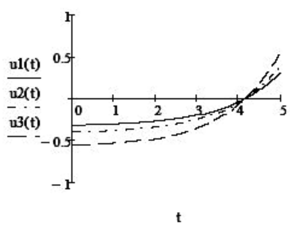

Рис. 5. $T = 5$

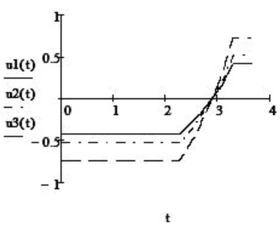

Рис. 6. $T = 3{,}7$

На рис. 1–6 представлены графики зависимости компонент кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$, вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и вектора управления $\mathbf{u}$ от времени.

Заключение

Получено аналитическое решение рассматриваемой задачи оптимального управления переориентацией сферически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде в классе плоских поворотов. С использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина найдены управляющие функции, фазовые координаты, минимальные значения функционала энергетических затрат при двух режимах реализации управления.

Список литературы

1. *Молоденков А.В.* Кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1995. Вып. 27. С. 122–131.
2. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
3. *Стрелкова Н.А.* Об управлении одной системой второго порядка в сопротивляющейся среде // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 3(30). С. 46–51.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
5. *Стрелкова Н.А.* Оптимальная переориентация сферически симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде // VI-е Поляховские чтения: Изб. тр. Междунар. науч. конф. по механике, Санкт-Петербург, 31 января–3 февраля 2012 г. М.: Изд. И.В. Балабанов, 2012. С. 75–79.

Energy expenditure minimizing in the problem

of a rigid body optimal reorientation in a resisting medium

N. A. Strelkova
Perm State University; 15; Bukireva st., Perm, 614990, Russia
strelkova@psu.ru; (342) 2396309

The paper investigates the problem of the optimal control over reorientation of a spherically symmetric rigid body in a resisting medium providing that the controlling external moment vector is module-limited. Energy expenditure functional is used as minimizing functional. The quaternion theory and Pontryagin's maximum principle are applied to solve the problem.

Keywords: *optimal control; rigid body reorientation; resisting medium; energy expenditure minimum;Pontryagin's maximum principle.*