

УДК 534:519.21

Стохастический анализ колебаний высотных зданий при случайных возмущениях фундамента

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

В работе для анализа случайных колебаний многоэтажных зданий, возбуждаемых нестационарными горизонтальными и вертикальными ускорениями оснований, используется модель вертикальной колонны, перемещение которой описывается линейным параметрическим стохастическим дифференциальным уравнением в частных производных. Используя понятие функционала плотности вероятности, для перемещения колонны построены дифференциальные уравнения в частных производных для функций математических ожиданий и ковариаций.

Ключевые слова: *стохастический анализ; моделирование; колебание здания; нестационарное возмущение; функционал плотности вероятности; моментные функции.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-3-61-71

Введение

Среди стихийных бедствий землетрясения занимают третье место в мире (после тайфунов и наводнений) по величине причиняемого ущерба: гибнут тысячи людей, а десятки тысяч остаются без крова; повреждаются или полностью разрушаются здания, транспортные сооружения (автомобильные и железнодорожные дороги и мосты), трубопроводы (рис. 1, 2) и др. Так, землетрясение в китайской провинции Ганьсу (1920 г.) на границе с Тибетом привело к разрушениям на площади более 40 тыс. км² и к гибели около 400 тыс. чел.; Ашхабадское землетрясение (1948 г.) – более 100 тыс. жертв; Спитакское (1988 г.) – около 30 тыс. [1].

Для сооружений, располагающихся на

берегах морей и озер, землетрясение может создавать опасности, связанные с затоплением [2]. Так, сейсмические колебания под дном океанов и морей (а также извержения подводных вулканов, перепады атмосферного давления) могут привести к образованию цунами – длинной волны, способной перемещаться, не затухая, на огромные расстояния. В открытом море эта волна не ощущается, но при набегании на берег в зависимости от рельефа дна и береговой линии она может набрать высоту в десятки метров и разрушить все в прибрежной зоне. Но даже если береговая волна не образуется, цунами приводит к затоплению прибрежных территорий, иногда на десятки километров в глубь суши, после чего вода, отступая, может смыть строения (рис. 3, 4). Примером такого цунами является самое разрушительное в истории, произошедшее после земле-



Рис. 1



Рис. 2

трясения силой 8,9–9 баллов (26.12.2004) в Индийском океане (около о. Суматра), с высотой волны 30 м и общим числом погибших от 200 до 300 тыс. чел.

На территории СССР 5 ноября 1952 г. в 200 км к юго-востоку от г. Петропавловска-Камчатского в Тихом океане произошло подводное землетрясение магнитудой от 8,3 до 9 баллов. После землетрясения к побережью Камчатки подошли три волны цунами, высоты которых были 10–15 м. Эти волны уничтожили г. Северо-Курильск, пос. Утесный, Прибрежный, Бабушкино, Подгорный с крупным рыбокомбинатом, Козыревский с двумя рыбозаводами. По официальным данным, всего погибло 2336 чел. Цунами причинило большой ущерб бывшим пос. Семячик, Кронок, Налычево, Халактырка. На мысе Пираткова была смыта гидрометеостанция (жилой дом и метеоплощадка с оборудова-

нием). Сотрудники станции спаслись на возвышенности. В 1923 г. в районе пос. Усть-Камчатский волна поднялась на 25–30 м и разрушила пару рыбозаводов и несколько других промышленных и жилых построек.

В замкнутых водоемах (озерах, водохранилищах, заливах) иногда возникают сейши – колебания воды с большими амплитудами. Их причиной являются сейсмические колебания и вызванные ими обрушения в воду больших масс грунта. В зависимости от рельефа берега выплеск воды при сейшах достигает десятков, а иногда и сотен метров. Так, 9 июля 1958 г. в бухте Литуя на Аляске произошел вызванный сейсмическим толчком сход лавины в воду. Поднявшаяся волна выплеснулась более чем на 500 м в высоту.

Землетрясения могут сопровождаться обрушением откосов, горными обвалами, сходом снежных лавин, образованием селей



Рис. 3



Рис. 4

(мощных грязевых потоков по горным ущельям) и др. [2].

С давних пор люди стремились предотвратить разрушение сооружений при землетрясениях, но к достаточно обоснованному решению данной задачи человечество подошло лишь в XIX–XX вв. Важнейшей предпосылкой к этому явилось развитие физики Земли, позволившее лучше понять природу землетрясений, а также общий прогресс науки и техники, появление новых строительных материалов и методов строительства [2]. Очевидно, что проблема сейсмостойкости конструкций относится к числу наиболее сложных в строительной механике и примыкающих науках [3–6]. Ее решение требует глубоких знаний в области инженерной сейсмологии, механики грунтов, динамики сооружений и других дисциплин, которые должны рассматриваться как одно це-

лое, с учетом специфики воздействия, работы конструкции и конечной задачи – сохранности жизни людей и ценного оборудования.

Установлено, что основной причиной землетрясений являются тектонические деформации земной коры. В процессе этих деформаций при определенном уровне напряжений происходит внезапное нарушение сплошности грунта. При этом высвобождается значительная энергия деформации и возникают сейсмические волны, называемые *глубинными*, среди которых выделяют *продольные* и *поперечные*. Эти волны распространяются по всем направлениям и, достигнув поверхности, вызывают землетрясение – колебательное движение верхних слоев земной толщи. При отражении глубинных волн от дневной поверхности возникают поверхностные волны Рэлея и Лява.

Скорость распространения глубинных

волн зависит от плотности среды и ее упругих характеристик. Поперечные волны распространяются примерно в 1,5 раза медленнее продольных. Еще меньше скорость распространения поверхностных волн. Таким образом, при землетрясении сооружение последовательно подвергается воздействию продольных, поперечных и поверхностных волн. Длина сейсмических волн и, следовательно, период сейсмических колебаний зависят от величины сейсмического разлома. Поскольку при разрыве земной коры появляется большое количество трещин различных размеров и каждая из них в момент образования излучает свои волны, очаг землетрясений характеризуется широким спектром колебаний с периодом от десятка секунд до сотых долей секунды [1].

Причиной тяжелых последствий землетрясений является то, что гражданские и промышленные сооружения не в состоянии устоять перед индуцированными землетрясением колебаниями грунта. Для того чтобы уменьшить последствия разрушительных землетрясений, наиболее эффективной мерой является соблюдение нормативных требований к проектированию, строительству и эксплуатации зданий и сооружений в сейсмических районах, а также повышение сейсмостойкости и оптимизация эксплуатационных характеристик сооружений [1, 7]. Таким образом, необходимы высококачественные анализ и оценка сейсмической реакции структур.

Сейсмический расчет конструкции можно условно разделить на четыре подпроблемы: 1) задание исходных данных, в том числе сейсмических; 2) определение инерционных сейсмических нагрузок или вызванных ими перемещений конструкции; 3) вычисление внутренних усилий в самой конструкции, ее опорах, основании здания и т.д. при сочетании сейсмических и других нагрузок; 4) оценка сейсмостойкости (прочности, работоспособности и т.д.) конструкции [2].

В процессе развития теории сейсмостойкости зданий и сооружений различного назначения были разработаны и в настоящее время используются статический, спектральный и динамический методы расчета [1, 2, 8–10].

Статический метод расчета сейсмостойкости сооружений является простейшим. Он был предложен в 1901 г. японским ученым Омори. В соответствии с этим методом сооружение и его основание рассматриваются как абсолютно жесткие. При этом все точки сооружения имеют одинаковые ускорения, равные ускорению основания. Сейсмические силы прикладываются как статические в центре тяжести каждой массы, и на их действие производится расчет конструкции. Существенным недостатком статического метода является невозможность учета в его рамках динамических свойств конструкции.

Спектральный метод (предложен бельгийско-американским физиком М.А. Био в 1934 г.; фундаментальная разработка – 40–50-е гг. XX в.) в настоящее время является основным как в нашей стране, так и за рубежом. Он занимает промежуточное место между статическим и динамическим методами. Как и при статическом, спектральный метод предполагает определение сейсмических инерционных нагрузок (сил), приложенных в центре тяжести каждой массы, а затем конструкция рассчитывается на действие нагрузок, приложенных к конструкции статически. При определении этих нагрузок учитываются динамические свойства конструкции. Для этого в предположении упругой работы конструкции движение системы раскладывается по формам колебаний. Сейсмические нагрузки определяются по каждой форме колебаний. Далее, для получения обобщенных перемещений строится система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), а по ее коэффициентам определяются спектральные характеристики исследуемого объекта. Эти характеристики позволяют определить максимальное значение сейсмической нагрузки и усилий в системе по каждой форме колебаний. Недостаток метода состоит в том, что даже при слабых воздействиях, когда основные несущие конструкции работают в упругой стадии, при колебаниях сооружений проявляются нелинейные эффекты.

С конца 70-х гг., благодаря развитию вычислительной техники, в расчетах сейсмостойкости сооружений начали использовать динамические методы, которые обыч-

но применяются в исследованиях существенно нелинейных систем, например сооружений на сейсмоизолированных фундаментах и при анализе работы конструкций за пределами упругости. При этом воздействия задаются акселерограммами землетрясений, а система ОДУ движения решается численно; значения перемещений, скоростей, ускорений и других факторов определяются для каждого момента времени. Однако использование динамических расчетов сооружений при оценке их сейсмостойкости требует большой осторожности. Для правильного понимания и использования результатов динамических расчетов необходимо учитывать различные аспекты проблемы, в частности, точность имеющихся входных данных, их неполноту и ограниченность.

Для проведения динамических расчетов необходимо задать инерционные и упругодемпфирующие свойства конструкции и сейсмические воздействия. При этом и свойства конструкции, и параметры воздействий являются случайными. Поэтому единичный расчет конструкции на действие, заданное акселерограммой землетрясения, следует рассматривать только как одну из многих реализаций случайного процесса. Другой путь – это замена реального воздействия некоторым условным коротким временным процессом, обеспечивающим в той или иной степени достоверность результатов расчетов, в явном виде.

По своей природе сейсмические воздействия носят случайный характер, а землетрясения возникают случайно во времени и пространстве. Этот безусловный факт делает статистические методы анализа основными в теории сейсмостойкости. Индивидуальные особенности сейсмических колебаний грунта в определенном месте при конкретном разрушительном землетрясении зависят от целого ряда случайных факторов: рода грунта, расстояния от эпицентра, рельефа местности и др. Спектральный метод только опосредованно учитывает статистику повреждений зданий и сооружений. Основной проблемой при реализации статистического метода является выбор представительного набора акселерограмм.

Помимо указанной принципиальной

трудности задания воздействия, статистическое моделирование весьма трудоемко, так как требует многочисленных динамических расчетов конструкции. Все это обусловило второй подход к статистической теории сейсмостойкости, базирующийся на построении математической модели сейсмического воздействия. Однако совершенно очевидно, что в рамках единой математической модели сейсмического движения грунта невозможно отразить все многообразие процесса землетрясения. По этой причине в настоящее время предложено значительное количество частных моделей сейсмического движения оснований, в частности, в явных формах нестационарных случайных процессов [11] или как решений соответствующих линейных или нелинейных систем стохастических ОДУ (СОДУ) [12].

Так, первые модели ускорений грунта при землетрясении в форме стохастических процессов появились еще в конце 40-х гг. прошлого века (G.W. Housner, 1947, возмущение – стационарный гауссовский белый шум). В дальнейшем исследователи применяли фильтрованные белые шумы, линейные и существенно нелинейные (гистерезисные) модели реакции грунта и др. [13], но до сих пор проблемы, связанные с описанием колебаний в наземных сооружениях, полностью не решены, что, на наш взгляд, обусловлено сложностью и многогранностью этих проблем.

Резюмируя, можно сказать, что вследствие больших неопределенностей в прогнозировании интенсивностей результирующих колебаний почвы связанные с землетрясениями колебания грунта необходимо рассматривать как случайные процессы, а последовательное объяснение основополагающих факторов неопределенности и случайности, а также количественная оценка структурной уязвимости и безопасности зданий при возбуждении землетрясений возможны только на основе вероятностных методов.

В последние годы наблюдается устойчивый рост понимания феномена землетрясений и их влияния на конструкции. При анализе высотных зданий, дымовых труб и башен принято заменять конструкции подходящими моделями, такими как консоли или

колонны. На основе этих моделей получают смещения сооружений, изгибающие моменты и поперечные силы при горизонтальных движениях грунта [14]. Хотя влияние горизонтальных компонент сейсмических возмущений представляется более важным, необходимо понимать и эффекты вертикальных ускорений этих возмущений и распределенность массы. Отметим, что при анализе продольного изгиба колонн, верхняя часть которых не закреплена, обычно учитывается и собственный вес.

Далее, моделирование влияния вертикальных ускорений приводит к уравнениям движения с изменяющимися во времени коэффициентами [15]. Изучение таких систем, особенно в случае, когда воздействия от землетрясений моделируются случайными процессами, представляет собой сложную проблему. Такие системы относятся к классу параметрических, а их исследование уже давно привлекает внимание широкого круга исследователей [16–19].

В настоящей работе делается попытка уяснить, как влияют указанные факторы на форму уравнений для статистических характеристик колебаний высотных зданий в вертикальной плоскости. При этом эффект вертикального ускорения учитывается только изменением веса структуры, а расширение колонны под действием собственного веса игнорируется. Учитывая эти допущения и используя понятие функционала плотности вероятности, для статистического описания перемещений колонны построены дифференциальные уравнения в частных производных для функций математического ожидания и ковариаций.

1. Постановка задачи

Рис. 5 представляет модель высотного здания в виде колонны, подвергаемой горизонтальному и вертикальному кинематическим случайным возмущениям ($X_g(t)$ и $Y_g(t)$ соответственно) от землетрясения. Стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных (СДУвЧП), описывающее движение колонны, имеет следующий вид [15, 20]:

$$m \left[\frac{\partial^2 U(y, t)}{\partial t^2} + \ddot{X}_g(t) \right] + c \frac{\partial U(y, t)}{\partial t} +$$

$$+ EI \frac{\partial^4 U(y, t)}{\partial y^4} + m [g + \ddot{Y}_g(t)] \times \\ \times \left[(y - L) \frac{\partial^2 U(y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial U(y, t)}{\partial y} \right] = 0. \quad (1.1)$$

Это уравнение получается из детерминированного уравнения движения колонны [14, 21]:

$$m(y) \frac{\partial^2 \bar{u}(y, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial}{\partial t} [\bar{u}(y, t) - x_g(t)] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[EI(y) \frac{\partial^2 \bar{u}(y, t)}{\partial y^2} + [g + \dot{y}_g(t)] \times \right. \\ \left. \times \int_y^L m(\xi) [\bar{u}(\xi, t) - \bar{u}(y, t)] d\xi \right] = 0, \quad (1.2)$$

где t – время, точкой или точками обозначаются производные по t соответствующего порядка, $\bar{u}(y, t)$ – полное смещение, $x_g(t)$ и $y_g(t)$ – горизонтальное и вертикальные перемещения грунта, $EI(y)$ – изгибная жесткость, L – высота колонны, $m(y)$ – масса на единицу длины, c – коэффициент затухания, g – ускорение силы тяжести. От уравнения (1.2) можно перейти к (1.1), если сделать замену $u(y, t) = \bar{u}(y, t) - x_g(t)$ и далее функции $u(y, t)$, $x_g(t)$ и $y_g(t)$ считать случайными.

Начальными и краевыми условиями для функции $U(y, t)$ будут

$$U(y, 0) = U^{[0]}(y), \quad \frac{\partial U(y, 0)}{\partial t} = U^{[1]}(y), \\ U(0, t) = \frac{\partial U(0, t)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(L, t)}{\partial y^2} = \\ = \frac{\partial^3 U(L, t)}{\partial y^3} = 0, \quad (1.3)$$

где $U^{[0]}(y)$ и $U^{[1]}(y)$ – стационарные пространственные поля с известными числовыми характеристиками.

Задача настоящей работы состоит в построении ДУвЧП для функций математического ожидания

$$m_U(y, t) = \mathcal{E}[U(y, t)], \quad m_{U'_i}(y, t) = \mathcal{E}[U'_i(y, t)]$$

и ковариации

$$C_{UU}(y_1, y_2, t) = \mathcal{E}[U^\circ(y_1, t) U^\circ(y_2, t)], \\ C_{UU'_i}(y_1, y_2, t) = \mathcal{E}[U^\circ(y_1, t) (U'_i)^\circ(y_2, t)], \\ C_{U'_i U'_i}(y_1, y_2, t) = \mathcal{E}[(U'_i)^\circ(y_1, t) (U'_i)^\circ(y_2, t)],$$

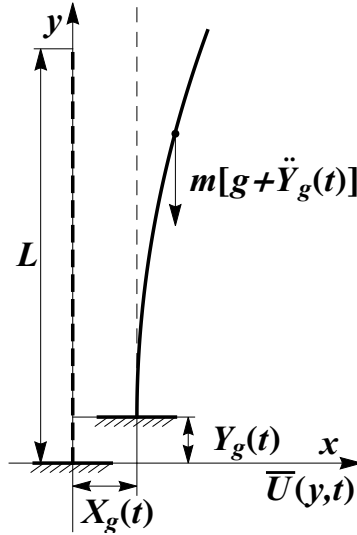


Рис. 5

где $\mathcal{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания,

$$U^\circ(y, t) = U(y, t) - m_U(y, t),$$

$$(U'_t)^\circ(y, t) = U'_t(y, t) - m_{U'_t}(y, t),$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями (см. далее).

2. Теоретический аппарат

Пусть задана система с распределенными параметрами, которая описывается СДУ вЧП (в смысле Стратоновича) вида [22]:

$$dU(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, U(\mathbf{x}, t), U'_x(\mathbf{x}, t), U''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots) dt + \mathcal{G}(\mathbf{x}, t, U(\mathbf{x}, t), U'_x(\mathbf{x}, t), U''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots) \circ dW(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

$$U(\mathbf{x}, t_0) = U^0(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

где t – время, $t_0 \leq t \leq T < +\infty$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;

$$U(\mathbf{x}, t) = \{U_\ell(\mathbf{x}, t)\} \in \mathbb{R}^n$$

– вектор состояния;

$$U^0(\mathbf{x}) = \{U_\ell^0(\mathbf{x})\} \in \mathbb{R}^n$$

– векторное случайное поле с известными характеристиками; $\mathbf{f}(\cdot, \cdot, \dots) = \{f_{ij}(\cdot, \cdot, \dots)\}$ и $\mathcal{G}(\cdot, \cdot, \dots) = \{g_{ij}(\cdot, \cdot, \dots)\}$ – заданные неслучайные векторная и матричная функции своих аргументов;

$$W(\mathbf{x}, t) = \{W_k(\mathbf{x}, t)\} \in \mathbb{R}^m$$

– вектор независимых пространственно-временных винеровских процессов,

$$\mathcal{E}[W(\mathbf{x}, t)] = 0,$$

$$\mathcal{E}[dW_i(\mathbf{x}_1, t_1) dW_j(\mathbf{x}_2, t_2)] = \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \delta(t_2 - t_1) \delta_{ij} d\mathbf{x} dt;$$

$$V(\mathbf{x}, t) = \{V_k(\mathbf{x}, t)\} \equiv \dot{W}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^m$$

– вектор независимых пространственно-временных гауссовых белых шумов, $\delta(\dots)$ – одно- или многомерная функция Дирака.

Функционал плотности вероятности

$$P_t = P_t[\mathbf{u}]$$

случайного векторного поля $U(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^\top$, удовлетворяет обобщенному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК–уравнению) вида [23]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{D}} \frac{\delta \{a_i(\mathbf{u}, \mathbf{y}, t) P_t\}}{\delta u_i(\mathbf{x}, t)} d\mathbf{x} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{\delta^2 \{b_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t) P_t\}}{\delta u_i(\mathbf{x}_1, t) \delta u_j(\mathbf{x}_2, t)} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \equiv \\ & \equiv \widehat{L}[P_t[\mathbf{u}]] \quad (2.3) \end{aligned}$$

с начальным условием $P_t[\mathbf{u}]|_{t=t_0} = P^0[\mathbf{u}]$, где коэффициенты сноса и диффузии вычисляются из соотношений

$$a_i = f_i +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{D}} \frac{\delta g_{ik}(\mathbf{y}, t, \dots)}{\delta u_j(\mathbf{x}, t)} g_{jk}(\mathbf{x}, t, \dots) d\mathbf{x},$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \sum_{k=1}^m g_{ik}(\mathbf{x}_1, t, \dots) g_{jk}(\mathbf{x}_2, t, \dots),$$

которые могут быть получены из обычных формул Стратоновича с помощью перехода от дискретного вектора состояния к непрерывному и замены конечных сумм на интегралы по соответствующей области. В уравнении (2.3): $\delta F / \delta v$ – обозначение вариационной производной [24], \mathbb{D} – ограниченная или неограниченная область изменения переменных \mathbf{x} .

Уравнения, которым удовлетворяют функции математического ожидания полей $U_s(\mathbf{x}, t)$, а также ковариации полей $U_s(\mathbf{x}_1, t)$ и $U_q(\mathbf{x}_2, t)$, будут иметь вид [22]:

$$\frac{\partial m_{U_s}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}[U_s(\mathbf{x}, t)]}{\partial t} = \int_{\mathbb{D}} u_s(\mathbf{x}, t) \widehat{\mathbf{L}}[\mathbf{P}_t[\mathbf{u}]] d\mathbf{u} = \quad (2.4)$$

$$= \int_{\mathbb{D}} a_s(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \mathbf{P}_t[\mathbf{u}] d\mathbf{u}, \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}_{U_s U_q}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}[U_s^\circ(\mathbf{x}_1, t) U_q^\circ(\mathbf{x}_2, t)]}{\partial t} = \int_{\mathbb{D}} \left\{ u_s^\circ(\mathbf{x}_1, t) a_q(\mathbf{u}, \mathbf{x}_2, t) + \right. \quad (2.5)$$

$$\left. + u_q^\circ(\mathbf{x}_2, t) a_s(\mathbf{u}, \mathbf{x}_1, t) + \mathbf{b}_{sq}(\mathbf{u}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \right\} \mathbf{P}_t[\mathbf{u}] d\mathbf{u},$$

где

$$U_p^\circ(\mathbf{x}, t) = U_p(\mathbf{x}, t) - m_{U_p}(\mathbf{x}, t),$$

$$u_p^\circ(\mathbf{x}, t) = u_p(\mathbf{x}, t) - m_{U_p}(\mathbf{x}, t).$$

3. Решение задачи

Используя соотношения из предыдущего раздела, построим искомые уравнения. Обозначим $U_1 = U$, $U_2 = U'_t$, $2\alpha = c/m$, $\beta = EI/m$, а также будем считать, что случайные возмущения можно представить следующим образом:

$$\ddot{X}_g(t) = h_1(t) V_1(t), \quad \ddot{Y}_g(t) = h_2(t) V_2(t),$$

где детерминированные неотрицательные функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ являются огибающими для $V_1(t)$ и $V_2(t)$ – независимых гауссовских случайных процессов типа белого шума с единичными интенсивностями:

$$\mathcal{E}[V_i(t)] = 0, \quad \mathcal{E}[V_i(t_1) V_j(t_2)] = \delta_{ij} \delta(t_2 - t_1),$$

$$i, j = 1, 2,$$

δ_{ij} – символ Кронекера. Искомые моментные функции обозначим так:

$$m_1(y, t) = m_U(y, t), \quad m_2(y, t) = m_{U'_t}(y, t),$$

$$C_{11}(y_1, y_2, t) = C_{UU}(y_1, y_2, t),$$

$$C_{12}(y_1, y_2, t) = C_{UU'_t}(y_1, y_2, t),$$

$$C_{22}(y_1, y_2, t) = C_{U'_t U'_t}(y_1, y_2, t).$$

Используя введенные обозначения, уравнение (1.1) может быть записано в виде двух линейных СДУВЧП с аддитивным и мультипликативным шумами:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = U_2, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = -2\alpha U_2 - \beta \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - [g + h_2 V_2(t)] \times$$

$$\times \left[(y - L) \frac{\partial^2 U_1(y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial U_1(y, t)}{\partial y} \right] - h_1 V_1(t). \quad (3.2)$$

При этом начальные и краевые условия для которых будут выглядеть так:

$$m_1(y, 0) = \mathcal{E}[U^{[0]}(y)],$$

$$m_2(y, 0) = \mathcal{E}[U^{[1]}(y)],$$

$$m_1(0, t) = \frac{\partial m_1(0, t)}{\partial y} = \frac{\partial^2 m_1(L, t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 m_1(L, t)}{\partial y^3} = 0,$$

$$C_{11}(y_1, y_2, 0) = \mathcal{E} \left[(U^{[0]}(y_1))^\circ (U^{[0]}(y_2))^\circ \right],$$

$$C_{12}(y_1, y_2, 0) = \mathcal{E} \left[(U^{[0]}(y_1))^\circ (U^{[1]}(y_2))^\circ \right],$$

$$C_{22}(y_1, y_2, 0) = \mathcal{E} \left[(U^{[1]}(y_1))^\circ (U^{[1]}(y_2))^\circ \right],$$

$$C_{11}(0, y_2, t) = \frac{\partial C_{11}(0, y_2, t)}{\partial y_1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial^2 C_{11}(L, y_2, t)}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^3 C_{11}(L, y_2, t)}{\partial y_1^3} = \\
 &= C_{11}(y_1, 0, t) = \frac{\partial C_{11}(y_1, 0, t)}{\partial y_2} = \\
 &= \frac{\partial^2 C_{11}(y_1, L, t)}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^3 C_{11}(y_1, L, t)}{\partial y_2^3} = 0.
 \end{aligned}$$

Сравнивая структуру уравнений (2.1), (2.2) и (3.1), (3.2), заключаем, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \\
 g_{21} &= -h_1, \\
 g_{22} &= -h_2 \left[(y-L) \frac{\partial^2 U_1(y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial U_1(y, t)}{\partial y} \right], \\
 f_1 &= U_2, \\
 f_2 &= -2\alpha U_2 - \beta \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \\
 &-g \left[(y-L) \frac{\partial^2 U_1(y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial U_1(y, t)}{\partial y} \right].
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = h_1^2 + \\
 &+ h_2^2 \left[(y_1 - L) \frac{\partial^2 u_1(y_1, t)}{\partial y_1^2} + \frac{\partial u_1(y_1, t)}{\partial y_1} \right] \times \\
 &\times \left[(y_2 - L) \frac{\partial^2 u_1(y_2, t)}{\partial y_2^2} + \frac{\partial u_1(y_2, t)}{\partial y_2} \right],
 \end{aligned}$$

а коэффициенты "сноса" определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= u_2, \\
 a_2 &= f_2 \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \int_0^L \int_0^L \frac{\delta g_{2k}(y_1, y_2, t, \dots)}{\delta u_2(z_1, z_2, t)} \times \\
 &\times g_{2k}(y_1, y_2, t, \dots) dz_1 dz_2 = \\
 &= f_2 \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{u}}.
 \end{aligned}$$

Это позволяет получить явный вид уравнений для искомым функций – математических ожиданий и вторых центральных моментов:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m_1}{\partial t} &= m_2, \\
 \frac{\partial m_2}{\partial t} &= -2\alpha m_2 - \beta \frac{\partial^4 m_1}{\partial y^4} -
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$-g \left[(y-L) \frac{\partial^2 m_1(y, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial m_1(y, t)}{\partial y} \right], \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_{11}(y_1, y_2, t)}{\partial t} &= \\
 &= C_{12}(y_1, y_2, t) + C_{12}(y_2, y_1, t), \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_{12}(y_1, y_2, t)}{\partial t} = -2\alpha C_{12}(y_1, y_2, t) -$$

$$-\beta \frac{\partial^4 C_{11}(y_1, y_2, t)}{\partial y_2^4} + C_{22}(y_1, y_2, t) -$$

$$-g (y_2 - L) \frac{\partial^2 C_{11}(y_1, y_2, t)}{\partial y_2^2} -$$

$$-g \frac{\partial C_{11}(y_1, y_2, t)}{\partial y_2}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial C_{22}(y_1, y_2, t)}{\partial t} = h_1^2 - 4\alpha C_{22}(y_1, y_2, t) -$$

$$-\beta \left[\frac{\partial^4 C_{12}(y_1, y_2, t)}{\partial y_1^4} + \frac{\partial^4 C_{12}(y_2, y_1, t)}{\partial y_2^4} \right] -$$

$$-g (y_1 - L) \frac{\partial^2 C_{12}(y_1, y_2, t)}{\partial y_1^2} -$$

$$-g (y_2 - L) \frac{\partial^2 C_{12}(y_2, y_1, t)}{\partial y_2^2} -$$

$$-g \left[\frac{\partial C_{12}(y_1, y_2, t)}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{12}(y_2, y_1, t)}{\partial y_2} \right] +$$

$$+h_2^2 \left[(y_1 - L) (y_2 - L) \frac{\partial^4 C_{11}(y_1, y_2, t)}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} +
 \right.$$

$$\left. + (y_1 - L) \frac{\partial^3 C_{11}(y_1, y_2, t)}{\partial y_1^2 \partial y_2} +
 \right.$$

$$\left. + (y_2 - L) \frac{\partial^3 C_{11}(y_1, y_2, t)}{\partial y_1 \partial y_2^2} +
 \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 C_{11}(y_1, y_2, t)}{\partial y_1 \partial y_2} \right]. \tag{3.7}$$

Отметим, что система уравнений (3.3)–(3.7) замкнута относительно первых и вторых моментных функций. Кроме того, вторая особенность полученных уравнений состоит в том, что подсистемы (3.3), (3.4) и (3.5)–(3.7) можно исследовать отдельно.

Заключение

В работе получена замкнутая система дифференциальных уравнений в частных производных, которая описывает поведение функций математического ожидания и ковариации, характеризующих случайные колебания вертикальной колонны – модели зда-

ний высокой этажности под действием вертикальных и горизонтальных перемещений грунта. Техника вывода основана на применении теории функционалов плотности вероятности и функциональных производных.

Список литературы

1. *Уздин А.М., Елизаров С.В., Белаиш Т.А.* Сейсмостойкие конструкции транспортных зданий и сооружений: учеб. пособие. М.: ФГБОУ "Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте", 2012. 501 с.
2. *Бурбраер А.Н.* Расчет конструкций на сейсмостойкость. СПб.: Наука, 1998. 255 с.
3. *Balendra T.* Vibration of buildings to wind and earthquake loads. London: Springer, 1993. X, 149 p.
4. *Hori M.* Introduction to computational earthquake engineering. London: Imperial College Press, 2006. X, 330 p.
5. *Moczo P., Kristek J., Gális M.* The finite-difference modelling of earthquake motions: waves and ruptures. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. XX, 365 p.
6. *Sen T.K.* Fundamentals of seismic loading on structures. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2009. XIX, 384 p.
7. *Li H., Sun G., Ren Y.* A note on the stationary model of earthquake induced ground with a Hu spectrum // The 14-th World Conf. on Earthquake Eng. (Beijing). 2008. 8 p. URL: www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/14_03-03-0050.pdf (дата обращения: 10.07.2017).
8. *Ивакин Б.Н.* Методы моделирования сейсмических волновых явлений. М.: Наука, 1969. 288 с.
9. *Ньюмарк Н., Розенблюэт Э.* Основы сейсмостойкого строительства. М.: Стройиздат, 1980. 344 с.
10. Dynamic behavior of concrete and seismic engineering / J. Mazars, A. Millard (eds.). London, Hoboken: ISTE Ltd / John Wiley & Sons, 2009. XIII, 374 p.
11. *Болотин В.В.* Статистическое моделирование в расчетах на сейсмостойкость // Строительная механика и расчет сооружений. 1981. № 1. С. 60–64.
12. *Lee S.H., Youn K.J., Min K.W. and al.* Probabilistic distribution of displacement response of frictionally damped structures excited by seismic loads // Smart Structures and Systems. 2010. Vol. 6, № 4. P. 363–372.
13. *Marano G.C., Greco R., Mezzina M.* Stochastic approach for analytical fragility curves // KSCE Journal of Civil Engineering. 2008. Vol. 12, № 5. P. 305–312.
14. *Iyengar R.N., Shinozuka M.* Effect of self-weight and vertical acceleration on the behaviour of tall structures during earthquake // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. 1972. Vol. 1, № 1. P. 69–78.
15. *Abbas A.M., Manohar C.S.* Reliability-based vector nonstationary random critical earthquake excitations for parametrically excited systems // Structural Safety. 2007. Vol. 29, № 1. P. 32–48.
16. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
17. *Ibrahim R.A.* Parametric random vibration. Letchworth: Research Studies Press, 1985. XII, 342 p.
18. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамике систем с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 176 с.
19. *Lin Y.K., Cai G.Q.* Probabilistic structural dynamics. Advanced theory and applications. New York: McGraw-Hill, 1995. 546 p.
20. *Nielsen R.J., Kiremidjian A.S.* Tall column reliability under nonstationary loads: Model formulation // ASCE Journal of Engineering Mechanics. 1988. Vol. 114, № 7. P. 1129–1143.
21. *Timoshenko S.P., Gere J.M.* Theory of elastic stability. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1963. XVI, 541 p.
22. *Полосков И.Е.* Стохастический анализ динамических систем. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.
23. *Шмелев А.Б.* Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей. М.: Изд-во МФТИ, 1998. 208 с.
24. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
25. *Wu W., Wang J.* Potential and flux field landscape theory. I. Global stability and dynamics of spatially dependent non-equilibrium systems // Journal of Chemical Physics. 2013. Vol. 139, № 12. P. 121920-1–121920-21.

Stochastic analysis of vibrations of tall buildings under random perturbations of the foundations

I. E. Poloskov

Perm State University, 614990, Perm, Bukirev st., 15
polosk@psu.ru; (342) 239 65 60

In this paper, a model of a vertical column is used to analyze the random oscillations of multi-storey buildings excited by unsteady horizontal and vertical foundation accelerations. The displacement of the column is described by a linear parametric stochastic partial differential equation. Using the concept of the probability density functional, partial differential equations for the functions of the mathematical expectation and covariances are obtained for motions of the column.

Keywords: *stochastic analysis; modeling; vibration of building; nonstationary fluctuation; probability density functional; moment functions.*