ИСТОРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 51(09)

Влияние Лейбница на развитие дискретной математики

В. Г. Алябьева
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
alyabieva@rambler.ru

Посвящается истории развития идеи Лейбница об Analysis situs в течение XVIII–XIX вв. в геометрии, комбинаторике, топологии, теории графов.

Ключевые слова: *Лейбниц; analysis situs; комбинаторика; геометрия положения; теория графов; топология.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-3-87-97

Существенное влияние на развитие дискретных разделов математики оказала идея Г.В. Лейбница построения *analysis situs* – специального раздела математики, в котором основным отношением между элементами является отношение взаимного расположения. В XIX в. идея *analysis situs* нашла воплощение в комбинаторике, проективной геометрии, топологии и теории графов. В развитие этой идеи проводились исследования в проективной геометрии, развивалась теория геометрических и комбинаторных конфигураций, было привлечено внимание к комбинаторике, появились такие дисциплины как топология и теория графов. Вторая идея Лейбница относится к введению символики, подобной математической, в логику, к построению символической логики. Обе идеи получили развитие в XIX–XX вв. и привели к великолепным результатам.

Лейбниц об *analysis situs*

Идея Лейбница об *analysis situs* возникла в процессе его размышлений об универсальной (всеобщей) науке, использующей универсальный (единый) язык в научном сообществе. О создании универсальной науки говорили еще Ф. Бэкон и Р. Декарт. Декарт сформулировал ее в работе "Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках" (1637). Одним из приложений этой работы была "Геометрия", содержащая общие правила научного метода. Декарт – создатель аналитической геометрии. Он предлагал свести всю математику к алгебре. Лейбниц поддерживал стремление Декарта к математизации естествознания, к созданию универсальной науки.

Идея Лейбница об *analysis situs* относится к новому пониманию "геометрической алгебры". Она сыграла исключительную роль в развитии геометрии и всей математики. В письме к Х. Гюйгенсу от 8 сентября 1679 г. он писал: "... Я еще недоволен Алгеброй в том отношении, что она в области геометрии не доставляет ни кратчайших путей, ни наиболее красивых построений. Поэтому... я полагаю, что нам нужен ещё иной, чисто геометрический или линейный, анализ, непосредственно выражающий для нас положение (situm), как Алгебра выражает в е л и ч и н у (*magnitudinem)*. Я думаю, что располагаю таким средством и что фигуры и даже машины и движения можно было бы представлять с помощью знаков (*en caracteres*), как Алгебра представляет числа и величины; и я посылаю Вам этюд об этом, который, на мой взгляд, имеет существенное значение... " [6, с. 18–19].

В письме к Лопиталю от 27 декабря 1694 г. он пишет: "...Я не решаюсь еще опубликовать мои проекты характеристики положения (*characteristics situs*), ибо если я не придам ей убедительность, приведя сколько-нибудь существенные примеры, то ее примут за фантазию *(une vision*). Тем не менее, я предвижу, что дело не может не удасться. Я бы хотел иметь возможность его реализовать..." [6, с. 248]. Во всех своих набросках по геометрическому исчислению Лейбниц пользуется понятием величины и, в сущности, не отказывается от координатных систем. Каких-либо новых конкретных результатов Лейбниц при этом не получил, и его принципиальные соображения не получили у современников сочувственного отклика.

От *analysis situs* к геометрии на шахматной доске

Лейбниц был знаком и состоял в переписке со многими выдающимися учеными-современниками. Достойным его собеседником был французский математик Пьер Ремон де Монмор (Pierre Rémond Montort, (1678–1719), член Английской и Французской академий наук, занимался проблемами философии, религии, математики.

В письме Монмору от 17 января 1716 г. Лейбниц делится своими представлениями о применении "анализа положений" в игре солитер: "Среди игр, которые полностью зависят от чисел, встречаются такие, в которых большое значение имеет расположение, как триктрак, шашки, особенно шахматы. Мне очень нравится игра солитер. Вместо того, чтобы по правилам игры не допустить расположения шашек, при котором одной шашкой ходим через другую на свободное место и забираем ту шашку, через которую ходим, я держу за лучшее строить то расположение, из которого выводится перепрыгивание шашкой. Этим способом можно изобразить любую фигуру" [7 , с. 667].

Вслед за Лейбницем геометрией на шахматной доске занимались Л. Эйлер (1758) и Ш.А. Вандермонд (1771). Эйлер решал задачу обхода конем всех клеток шахматной доски, при котором конь должен побывать в каждой клетке точно один раз. В письме к Гольдбаху (26 апреля 1757 г.) он сообщал: "*Воспоминание о предложенной когда-то мне задаче послужило недавно для меня поводом к некоторым тонким изысканиям, в которых обыкновенный анализ, как кажется, не имеет никакого применения ... Я нашел, наконец, ясный способ находить сколько угодно решений (число их, однако, бесконечно), не делая проб*".

Эйлер рассматривал квадратные, крестообразные и прямоугольные доски. Эйлер построил замкнутый обход шахматной доски, доказав тем самым, что обход можно начинать с любой клетки, и указал способы преобразования и построения обходов, привел разнообразные примеры обходов (как замкнутых, так и незамкнутых, в том числе обладающих различными свойствами симметрии). Кроме того Эйлер рассмотрел задачи об обходе конем досок, имеющих другие размеры и формы [3]. В частности, он:

а) отметил, что не существует обходов досок размеров 3×3 и 4×4 и привел пример обхода конем всех клеток доски 4×4, кроме одной угловой клетки;

б) заметил, что не существует замкнутых обходов досок с нечетным числом клеток, показал, что любой обход доски размером $5{\times}5$ должен начинаться или заканчиваться в угловой клетке, и, соединив обходы досок 5×5, построил симметричный обход доски 10×10;

в) построил (незамкнутые) обходы досок размером $3{\times}4$ и $3{\times}7$.

Вандермонд (Charles Auguste Vandermonde, 1735–1796) обобщил задачу хода коня на трехмерный случай [18].

Геометрией на шахматной доске занимались исследователи в XVIII и XIX вв. Однако Гаусс в начале XIX в. (в записках от 22 января 1833 г.) отметил отсутствие прогресса в развитии идей Лебница об *analysis situs*: "О *geometria situs*, как ее называл Лейбниц, и на которую только одна пара геометров (Эйлер и Вандермонд) бросила слабый взгляд, мы через сто пятьдесят лет знаем не намного больше, чем ничего".

Развитие идей Лейбница в геометрии XIX в.

Дальнейшее развитие геометрические идеи Лейбница получили уже в XIX в. в различных направлениях: в построении правильных звездчатых многогранников, в проективной геометрии, в топологии. Л. Карно называл "Géométrie de position" (1803) проективную геометрию. Х. Штаудт в "Geometrie der Lage" (1847) показал, что основной характер проективной геометрии состоит в изучении взаимного расположения точек, прямых и плоскостей.

Преемником идей Лейбница, относящихся к *analysis situs*, считал себя французский математик и механик Луи Пуансо (1777–1859). В 1809 г. он прочитал в Институте Франции доклад "О многоугольниках и многогранниках", который затем оформил в виде статьи [13]. Свое исследование Пуансо относит к геометрии положения, основоположником которой считает Лейбница. Пуансо строит правильные звездчатые многогранники.

Со времен греков были известны пять видов правильных выпуклых многогранников: куб, тетраэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Кеплер в своем главном труде "Гармония мира" (1619) указал на существование еще двух правильных многогранников – звездчатых. Л. Пуансо переоткрыл звездчатые многогранники Кеплера через 200 лет и построил еще два правильных звездчатых многогранника: большой додекаэдр и большой икосаэдр. После выхода этой работы Пуансо правильные звездчатые многогранники стали называть правильными телами Кеплера–Пуансо. О. Коши в работе "Исследование многогранников" (1813) доказал, что правильными телами Кеплера–Пуансо исчерпываются все правильные звездчатые многогранники. *Стрингхем* в 1882 г. нашел все шесть правильных выпуклых многогранников четырехмерного пространства [17].

Через 35 лет Пуансо вновь обратился к идеям "Мемуара" 1810 г. В работе "Размышления о теории многогранников" [12] он дает обзор некоторых новых идей в математике и отмечает, что успехи современной ему геометрии и теории чисел идут рука об руку. Если теория чисел рассматривает числа сами по себе, изучает их свойства, не зависящие от способа их представления и действий над ними, а обыкновенная алгебра (или универсальная арифметика), отталкиваясь от обыкновенных чисел, распространяется на какие угодно, то высшая алгебра в теории уравнений опирается на *теорию порядка и комбинаций*. Геометрия – наука о пространственных или протяженных формах – подобно алгебре распадается на две части: предметом изучения первой из частей является пропорциональность и измерение. Вторая часть геометрии рассматривает порядок и расположение вещей в пространстве, не обращая внимания на их величину и фигуру. Эта наука называется *геометрией положения*, к которой Пуансо относит и теорию звездчатых многоугольников и многогранников

Известный русский математик А.В. Васильев (1853–1929), много занимавшийся историей математики, в статье "Математика" [20] писал: "Декарт и Лейбниц придавали громадное значение идее порядка ... Лейбниц, для которого пространство было порядок сосуществования, время–порядок последовательности, не мог не придать высокое значение идее порядка ... Пуансо, занимавшийся с 1810 г. геометрией звездчатых многоугольников и многогранников, увидел, что этот вопрос, поставленный еще греческой математикой, приводит также к вопросу о порядке, а именно, к теории круговых перемещений, и показал, какое значение имеет эта теория и для геометрии, и для теории чисел". В книге "Целое число" (1919) Васильев еще раз подчеркивает значимость геометрических работ Пуансо: "Объектом математики до XIX в. были исключительно непрерывные многообразия. В XIX веке начинается изучение дискретных (раздельных) систем точек и, прежде всего конфигураций, состоящих из конечного числа точек. Введение этих геометрических образов есть заслуга Пуансо, изучившего конфигурации, состоящие из вершин правильных звездчатых многоугольников и многогранников, и показавшего связь многих вопросов теории чисел с теорией конфигураций, например, связь вопроса о звездчатых многоугольниках с числовой функцией Эйлера $\varphi(n)$".

Дальнейшее развитие геометрические идеи Лейбница получили уже в XIX в. в различных направлениях (Мёбиус, Штаудт, Г. Грассман и др.). Грассман Г., в частности, посвятил разбору наброска Лейбница специальную работу "Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik" (1847).

Лейбниц и комбинаторика

Идея Лейбница об *analysis situs явилась* общим истоком теории конфигураций, как геометрических, так и комбинаторных. Операция комбинирования является основной в теории конфигураций. Она не является строго математической операцией, а относится к общеинтеллектуальным, таким как умение классифицировать, упорядочивать. Осознание сущности операции комбинирования, области ее применения начинается с Лейбница. Лейбниц называл искусство комбинаторики частью искусства изобретения. Свои первые комбинаторные вычисления Лейбниц выполнил в 1666 г. в своей диссертации "Dissertatio de arte combinatoria", а затем в течение всей своей жизни многократно возвращался к размышлениям о роли комбинаторного метода в системе научного знания.

Взгляды Лейбница на высокую значимость комбинаторного искусства разделял Сильвестр Дж.Дж. Исследованию комбинаторных конфигураций он посвятил несколько статей, начиная со статьи 1844 г. [14], в которой он обсудил правила образования различных наборов и систем наборов из элементов данного n-множества.

"Число, положение, комбинация – представляются мне тремя пересекающимися, но различными сферами мысли, к которым имеют отношение все математические идеи" – пишет Сильвестр.

К идеям 1844 г. *Сильвестр* вернулся в 1861 г.: "*Я дал общее название Тактика разделу чистой математики, в которой порядок является основной сферой подобно тому, как число и пространство – сферой двух других. Синтаксис и группы – это только специальные ветви тактики*" [15]. В работе "Заключительная статья о тактике" он пишет:

"Тактика кажется мне основным стержнем, из которого выводятся все остальные, включая даже арифметику, и вторичные ветви. Ключ к успеху в решении проблем этой зарождающейся науки (как и предполагалось большинством других) необходимо искать для построения меткой и выразительной нотации и в открытии языка, силой которого ум может позволить проводить сложные операции и формировать их в простые и легко передаваемые формы мышления" [16, с..45].

A. Cayley разделял взгляды Сильвестра на тактику. В 1864 г. Кэли в статье "О понятиях и границах алгебры" [8] предлагал различать в алгебре два вида операций: тактические и логистические. *Тактическая* операция связана с *расположением* множества вещей некоторым образом, *логистическая* (арифметическая) операция представляет собой вычисление для получения в результате числа. Каждая алгебраическая теорема основывается в конечном счете на тактических основаниях. Однако нельзя абсолютно резко разделить тактические и логистические операции. Во всякой серии логистических операций есть тактический элемент, во многих тактических операциях, например при разбиении чисел, есть кое-что логистическое. Таким образом, по мысли Кэли, *Алгебра имеет два больших раздела: Тактику и Логистику.*

В 1896 г. американский математик E.H. Moore в статье "Tactical memoranda" [10] ввел термин *тактическая конфигурация.* В своей статье Мур рассматривает многочисленные примеры тактических систем и доказывает их свойства. Обобщением понятия "тактическая конфигурация" явилось понятие блок-схемы. В 1935–1940 гг. в статьях Р. Фишера [4], посвященных планированию эксперимента, появился сначала термин *block arrangement*, затем – *block design.*

Влияние идей Лейбница на комбинаторику рассмотрено в статье автора [20].

Топология и теория графов

Работа Л. Эйлера о кёнигсбергских мостах считается самой ранней и самой знаменитой публикацией и по теории графов, и по топологии. Многочисленные исследования посвящены обстоятельствам появления этой статьи, однако до сих пор нет убедительных свидетельств тому, что послужило первоначальным толчком для выбора Эйлером этой темы.

Город Кёнигсберг расположен в устье реки Прегель. В центре города находится небольшой остров Кнайпхоф. Через реку Прегель к середине XVI в. было построено 7 мостов, соединяющих между собой различные участки суши (из них 5 мостов соединяют остров Кнайпхоф с другими частями города).

Кёнигсберг в XVII–XVIII вв. (карта 1652 г.)

Задача о семи мостах формулировалась так: *найти такой обход семи мостов, который* *начинался бы с какого-либо участка суши и завершался на нем, и при этом каждый мост был бы пройден точно один раз.* Задача на правах головоломки была хорошо известна жителям Кёнигсберга. Ее пытались решить любители головоломок и серьезные исследователи.

Решение этой задачи (точнее, доказательство ее неразрешимости) дал Эйлер в статье *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [2], презентованной в Академии наук 26 августа 1735 г., и помещенной в *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* за 1736 г.

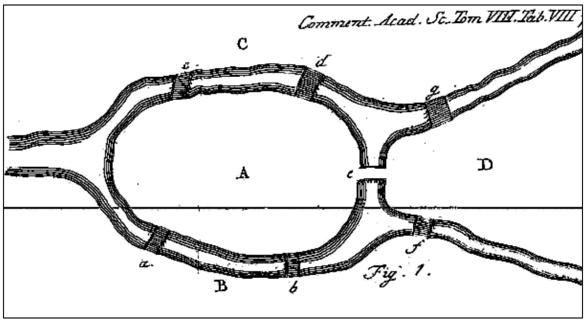

Схема мостов Кёнигсберга из статьи Эйлера [2]

Опубликованы *Commentarii* лишь в 1741 году. В статье доказано, что задача о семи мостах Кёнигсберга неразрешима. Эйлер рассмотрел обобщения этой задачи на случай разного количества мостов и указал, когда задача имеет решение. Между презентацией статьи и ее реальным появлением в печати прошло 6 лет.

Каким образом Эйлер мог узнать об этой задаче? Предположение о возможном источнике высказала Ю.Х Копелевич в 1978 г. в статье "Начало связей между петербургской академией наук и учёными Гданьска" [5]. Эйлеру сообщить задачу о семи мостах мог Карл Элер.

Карл Элер (Ehler Carl Leonhard Gottlieb, 1685–1753) родился в Германии. В Берлине, занимая пост астронома, встретил Лейбница и некоторое время состоял с ним в переписке. К моменту встречи с Эйлером он был советником в Данциге (ныне город Гданьск в Польше). Данциг в это время принадлежал Речи Посполитой, где после смерти в 1733 г. короля Августа II началась война *за польское наследство*, в которую были вовлечены Франция, Россия и Австрия. Заключительным аккордом в этом противостоянии была осада Данцига русско-саксонскими войсками, длившаяся с 22 февраля по 26 июня 1734 г.

Город, который поддерживал проигравшего кандидата на польский трон, должен был выплатить контрибуцию России в размере двух миллионов данцигских талеров. Данциг снарядил в Россию делегацию из шести советников, ведущим членом которой был Карл Элер. Целью делегации было добиться прощения второго миллиона контрибуции. Делегация прибыла в Санкт-Петербург 24 сентября 1734 г. Переговоры были сложными, но в целом успешными. После почти восьмимесячного пребывания делегации императрица Анна Иоанновна 27 мая 1735 г. дала прощальную аудиенцию для делегации. Группа покинула Санкт-Петербург 3 июня 1735 г. Документ о помиловании Данцига (*diploma amnestiae*) был подписан императрицей 29 апреля 1736 г., в нем она прощала второй миллион талеров и восстанавливала городские привилегии. В ходе переговоров члены делегации встречались с различными российскими сановниками и иностранными дипломатами. Например, они посетили Санкт-Петербургскую Академию наук, Адмиралтейство, верфи и металлургические заводы в окрестностях Санкт-Петербурга. Пребывание в Санкт-Петербурге дало Элеру возможность встретиться с Эйлером. Во время своего пребывания в Санкт-Петербурге Карл Элер участвовал в многочисленных встречах Императорской академии, где 7 марта 1735 г. Эйлер представил свою *Mechanics.* Карл Элер инициировал переписку с Эйлером будучи в Петербурге и продолжал ее до 1742 года.

Статью о кёнигсбергских мостах Эйлер презентует в академии наук 26 августа 1735 г. Через полгода он получает письмо от Карла Элера, датированное 9 марта 1736 г. [21, стр. 352], с просьбой сообщить ему решение задачи. К этой переписке Карл Элер привлёк профессора математики из Данцига Генриха Кюна (Heinrich Kühn, (1690–1769), уроженца Кёнигсберга, знакомого с проблемой семи мостов.

В письме Карл Элер напоминает Эйлеру, что "*...мы обсуждали это в Санкт-Петербурге*" и далее *"Вы бы оказали бы мне и нашему другу Кюну самую ценную услугу, поставив нас в известность, если бы отправили нам решение, которое Вам хорошо известно, к проблеме семи мостов Кёнигсберга вместе с доказательством. Это окажется выдающимся примером исчисления положения* *[calculi situs], достойного вашего великого гения. Я добавил эскиз упомянутых мостов*" (рис. 1).

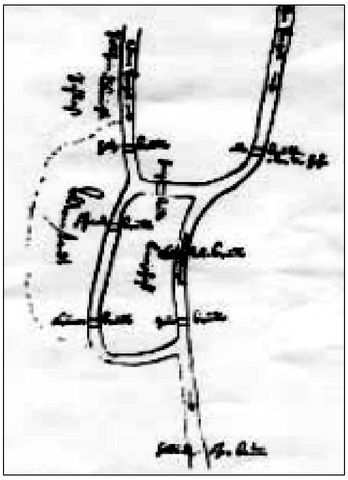

Рис. 1

В ответном письме, датированным 3 апреля 1736 г. [21 с. 330–352], Эйлер пишет:

"*Ты, славнейший муж, выражаешь желание ознакомиться с моим способом построения мостов; охотно представляю этот способ на Твой суд. Ибо когда Ты попросил у меня решение этой проблемы, приспособленной к частному случаю Кёнигсберга, Ты, вероятно, считал, что я предложил такого рода построения мостов, но я не сделал это, а только доказал, что такое построение вообще не может иметь места, это следует принять вместо решения. Способ же мой является универсальным, так как с его помощью в любом предложенном мне случае такого рода я тотчас могу решить, следует ли строить переход с помощью отдельных мостов или нет, и в первом случае могу установить, каким образом этот переход следует осуществить. Далее я изложу свой способ, а также опишу путь, которым я к нему пришёл. Я рассмотрел произвольную фигуру разветвления реки, а также мосты* a, b, c, d, e, f *как это указано на рисунке, и установил, что возможен переход, который я представляю следующим образом.*

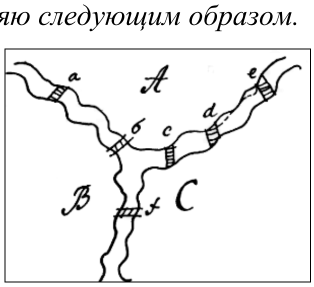

Рис.2

Области, отделенные друг от друга водой, я называю буквами A, B, C, *и когда предполагается переход через мосты из одной области в другую, а именно переход из* A *в* B *через мост или* a, *или* b, – *наиболее удобно назвать буквами* AB, *в которых первая буква* A *будет обозначать область, из которой переходят. Итак,* $ABCACAB$ *будет определять переход, совершаемый через все мосты по одному разу; число этих букв должно быть на единицу больше, чем число мостов; это должно иметь место при любом возможном переходе описанным способом, в чем каждому легче убедиться, чем доказывать. Теперь я рассматриваю, сколько раз в ряде букв* A, B, C, A, C, A, B *должны встретиться буквы* ABC *о чем можно судить по числу мостов, ведущих в каждую из областей. Так, к области* A *ведут пять мостов:* a, b, c, d, e, *и сколько раз буква* A *встречается в середине этого ряда, столько раз встречаются два из этих мостов, ибо с одной стороны нужно перейти в область* A, *с другой стороны – выйти оттуда.*

Если A *встречается или в начале, или в конце того ряда, тогда единственный переход моста соответствует* A. *Отсюда следует, что если число мостов, ведущих в область* A, *будет нечетным, тогда переход через все мосты не может совершиться иначе, чем таким образом, чтобы он или начинался в области* A, *или заканчивался в области* A. *А если число мостов, ведущих в* A *будет четным, тогда переход может быть совершён и без этого условия, чтобы начинаться или заканчиваться в* A; *но если он начинается в* A, *то должен будет там же и закончиться. Отсюда вытекает, что в ряде* $ABCACAB$ *любая буква, за исключением первой и последней, обозначает переход, ведущий через два моста в область, обозначенную этой буквой. Следовательно, надо держаться следующего правила: если на каком-либо рисунке число мостов, ведущих в некоторую область, будет нечетным, тогда желаемый переход через все мосты одновременно не может быть осуществлен иначе, как если переход или начинается, или заканчивается в этой области. А если число мостов чётное, отсюда не может возникнуть никакого затруднения, так как ни начало, ни конец перехода не фиксируются. Отсюда следу-*

ет такое общее правило: если будет больше, чем две области, к которым ведет нечетное количество мостов, тогда желательный переход вообще не может быть совершен. Ибо представляется совершенно невозможным, чтобы переход и начинался, и заканчивался в какой-нибудь одной из этих областей. А если будут только две области такого рода (так как не могут быть даны одна область этого рода или нечетное число областей), тогда может быть совершен переход через все мосты, но с таким условием, чтобы начало перехода было в одной, а конец в другой из этих областей. Когда в предложенной фигуре A *и B есть области, к которым ведет нечетное число мостов, а число мостов, ведущих в C, является четным, то я считаю, что переход или построение мостов может иметь место, если переход начинается или из* A*, или из B, а если же кто-нибудь пожелает начать переход из C, то он никогда не сможет достигнуть цели. В расположении кёнигсбергских мостов я имею четыре области* A, B, C, D*, взаимно отделенные друг от друга водой, к каждой из которых ведёт нечетное число мостов. Таким образом, поскольку есть больше чем две области, к которым ведёт нечётное число мостов, я утверждаю, что я доказал полную невозможность такого соединения мостов. Итак, с помощью очень легкого правила можно почти мгновенно определить для любой фигуры, допускается ли такого рода построение мостов, при котором переход будет происходить только через все мосты одновременно, или нет? Ибо возможным будет построение, если и не будет никакой области, или будут только две, к которым ведет нечетное число мостов; в таких случаях начало перехода выбирается произвольно, но там же должен быть и конец перехода. В последнем же случае начало перехода должно иметь место в одной из тех областей, а конец – в другой.*

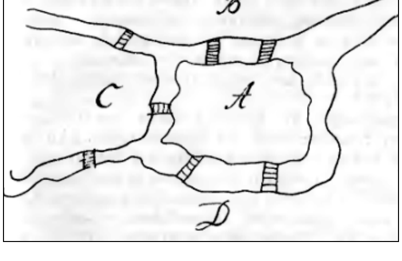

Рис. 3

Построение невозможно, если будет более чем две области, к которым ведет нечетное число мостов".

В заключение Эйлер выражает недоумение тем обстоятельством, что решение задачи не потребовало никаких вычислений: "*Ты можешь убедиться, славнейший муж, что это решение по своему характеру, повидимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математиков ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением и, нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак, я не знаю, каким образом получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, чем другими [учеными]*".

Однако новая наука, освященная именем Лейбница, явно привлекла молодого Эйлера, и он обращается к Карлу Элеру с просьбой прислать новые задачи: "*Между тем Ты, славнейший муж, определяешь место этого вопроса в геометрии положения, и что касается этой новой науки, то, признаюсь, мне не известно, какого рода относящиеся сюда задачи желательны были Лейбницу и Вольфу. Итак, я прошу Тебя, если Ты считаешь, что я способен нечто создать в этой новой науке, чтобы Ты соблаговолил мне прислать несколько определенных, относящихся к ней задач, для того чтобы я мог лучше уяснить себе, что именно представляется желательным*".

Решение задачи о семи мостах Эйлер сообщил также Маринони Джовани (Marinoni Giovanni Jacobo, 1670–1755), [152–158], итальянскому математику и инженеру (в письме от 13 марта 1736 г.). Маринони в XVIII в. был известен значительными астрономическими и картографическими работами в Италии и Австрии. С 1730 г. Маринони поселяется в Вене и получает от австрийского императора Леопольда I звание придворного астронома. Маринони с 1733 г. переписывался в Петербургской академией наук, 16 декабря 1735 г. прислал письмо Эйлеру. Для молодого Эйлера переписка со знаменитым Маринони была весьма престижна, в ответном письме он с готовностью сообщает о своих достижениях.

В своей статье [2] Эйлер сообщает следующие результаты о возможности пройти по семи кёнигсбергским мостам:

1) если существует более двух областей, к которым ведет нечетное число мостов, то такое путешествие невозможно;

2) если существует ровно две области, к которым ведет нечетное число мостов, то путешествие возможно, если оно начинается в любой из этих двух областей;

3) если нет областей, к которым ведет нечетное число мостов, то требуемое путешествие можно осуществить, начиная с любого участка.

Строгое доказательство Эйлер дал только для первого результата. Строгое обоснование двух других результатов было дано в посмертной статье Hierholzer C. (*Hierholzer C.* Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechnung zu umfahren. Mathematische Annalen. 1873. Bd. 6. S. 30–32).

В 1872 г. задача о семи мостах была рассмотрена в книге *Болла* "Математические развлечения и проблемы в прошлом и настоящем" [1].

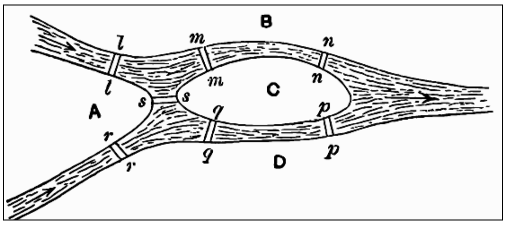

Рис. 4 [1, с. 144]

Болл предлагает обозначить участки суши точками A, B, C, D а мосты – линиями m, n, p, q, r, s. В результате получим геометрическую фигуру или сеть (рис. 5).

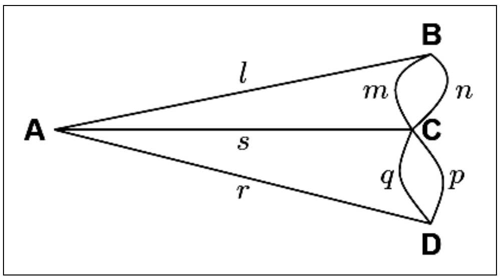

Рис. 5

Задача состоит в том, чтобы пройти каждую линию один раз. Фигура может иметь два или три измерения. Таким образом, впервые в математической литературе появляется *граф* для решения задачи о кёнигсбергских мостах.

В современной теории графов путь, проходящий по одному разу по всем ребрам графа, называют *эйлеровым путем*, а замкнутый эйлеров путь – *эйлеровым циклом*. Справедливы утверждения:

1) в связном неориентированном графе *эйлеров цикл* существует тогда и только тогда, когда нет вершин нечетной степени;

2) в связном неориентированном графе *эйлеров путь* существует тогда и только тогда, когда граф содержит точно две вершины нечетной степени.

Уникурсальные кривые можно вычертить *одним росчерком пера*, они соответсвуют графам, содержащим эйлеров путь или эйлеров цикл.

Первый учебник по теории графов появился в 1936 г. – книга Денеша Кёнига *(Dénes König* Theorie der Endlichen und unendlichen Graphen, 1936. Leipzig. Academische Verlagsgesellschaft M.B.H.). До этой книги появлялись публикации с использованием термина "граф", но именно у Кёнига графы стали основным объектом исследования. В предисловии к своей книге Кёниг обсуждает, является ли теория графов ветвью топологии или ветвью комбинаторики. Он утверждает, что, скорее всего, "это – ветвь комбинаторики: главным образом потому, что мы не относим к элементам графа – вершинам и ребрам – никакого геометрического содержания. Вершины являются произвольными различимыми элементами, а ребра – не что иное, как объединение их двух конечных точек. Эта абстрактная точка зрения, которую Сильвестр подчеркивал в 1873 г., будет строго соблюдаться в нашем представлении, за исключением некоторых примеров и приложений".

В 1848 г. была опубликована книга Бенедикта Листинга (Johann Benedict Listing, 1808–1882), ученика Гаусса, "Предварительное исследование по топологии" [9]. Автор во введении отмечает, что относит свою работу к геометрии положения, критически оценивает предшествующие достижения в этой области и поясняет свое видение нового геометрического исчисления. Он пишет: "При рассмотрении пространственных образов можно различать две точки зрения, а именно, количество и модальность". И далее: "Геометрия издавна считается частью науки о величинах и связана с измерением. Вторая точка зрения, точка зрения модальности, рассматривает вопросы, относящиеся к положению и следованию, появлялась в геометрии лишь постольку, поскольку эту категорию удалось свести к величине или сблизить с ней.

Первую идею научной и одновременно вычислительной обработки модальной стороны геометрии можно встретить в случайном замечании Лейбница (в письме Лейбница Гюйгенсу от 1679), указавшего на своего рода алгорифм, посредством которого положение пространственных образов может быть подчинено анализу так же, как это посредством алгебры имеет место относительно величин. Однако получившая позднее известность и исходящая от самого Лейбница попытка новой геометрической характеристики основывается прежде всего на понятии конгруенции и не имеет, собственно, модального содержания. Примыкающий к этому лейбницевскому труду новый геометрический анализ Грассмана, как и барицентрическое исчисление Мёбиуса, также следует рассматривать лишь как обогащение, собственно, геометрии; то же самое следует сказать и относительно *géométrie de position* Карно, примыкающей к начертательной геометрии Монжа. Напротив, известная "задача о ходе коня", научно решенная еще Эйлером и позднее другими, находится в более близком родстве с геометрией положения, а сделанные Вандермондом в его "Заметках о проблемах положения" [18] по поводу этой задачи примечания о пути, по которому нужно вести нить, чтобы получить галун или петлю чулочной ткани, относятся сюда целиком". "Таким образом, – подводит итог Листинг, – за вычетом немногого, приведённая здесь модальная сторона геометрии почти полностью ожидает разработки в будущем. То странное обстоятельство, что со времени первого почина Лейбница в этой отрасли знания ничего больше не было сделано, объясняется в некоторой мере трудностями нахождения действенных и целесообразных методов, которые бы позволили свести пространственную интуицию к понятиям, а также недостаточностью языка для научного обозначения понятий. Побуждаемый величайшим геометром современности (Листинг имеет в виду Гаусса), неоднократно обращавшим мое внимание на значение этого предмета, я в течение продолжительного времени делал различные попытки анализа отдельных, сюда относящихся случаев, даваемых естественными науками и их приложениями. И если теперь, когда эти размышления ещё не приобрели права притязать на строгую научную форму и метод, я позволю себе опубликовать их в качестве предварительных набросков новой науки, то делаю это с тем намерением, чтобы при помощи собранных здесь основных сведений, примеров и материалов обратить внимание на возможности и значение этой науки".

Листинг обосновывает выбор имени новой науки: "Да будет позволено употребить для такого рода исследований пространственных образов название "топология" вместо предложенного Лейбницем названия "*geometria situs*", напоминающего о понятиях "мера", "мерить", играющих здесь совершенно подчиненную роль, и совпадающего с названием "*géométrie de position"*, уже принятым для другого рода геометрических исследований.

Следовательно, под *топологией* будем понимать учение о модальных отношениях пространственных образов, или о законах связности, взаимного положения и следования точек, линий, поверхностей. тел и их частей в пространстве, не зависимо от отношений мер и величин".

Далее, в 1895 г., *Анри Пуанкаре* опубликовал свою топологическую работу "Analysis Situs" [11]. Это знаменовало появление новой математической дисциплины, которую он позднее назвал *топологией.* Из топологических результатов, предшествовавших работе Пуанкаре, были известны следующие:

1. Эйлерова характеристика поверхностей, введенная Эйлером (1752), теперь мы называем ее формулой многогранника Эйлера: $V - E + F = 2$, где V – число вершин, E – число ребер, F – число граней.

2. Классификация полиэдров, следуя Эйлеру.

3. Теория алгебраических кривых Римана (1851), в которой он моделировал каждую комплексную алгебраическую кривую поверхностью – римановой поверхностью. При этой интерпретации число, которое Абель (1841) назвал *родом* алгебраической кривой, оказывается зависящим от эйлеровой характеристики римановой поверхности. Род имеет простую геометрическую интерпретацию как число "дырок" поверхности.

4. Топологическая классификация поверхностей Мёбиуса (1863). Мёбиус не классифицировал неориентируемые поверхности. Это было сделано Диком (1888).

5. Бетти (1871) ввел так называемые *числа Бетти* для характеристики *связности* римановой поверхности.

Во введении к "Analysis Situs", Пуанкаре поясняет, о какой геометрии идет речь в его работе: "... геометрия – это искусство правильных рассуждений о плохо нарисованных фигурах; однако эти фигуры должны удовлетворять определенным условиям; пропорции могут быть сильно изменены, но относительные положения разных частей не должны изменяться". Так как "положения не должны изменяться", то Пуанкаре построил то, что Лейбниц называл Analysis Situs, геометрией положения.

Заключение

Таким образом, можно считать, что идея Лейбница об Analysis Situs способствовала в XIX в. развитию геометрии, комбинаторики, появлению теории графов и созданию топологии. Комбинаторика и теория графов в XX в. образовали ядро дискретной математики и в связи с мощным развитием вычислительной техники дискретная математика становится в настоящее время наиболее востребованным разделом математики и демонстрирует подлинный триумф идей Лейбница.

Список литературы

1. *Ball W.W. Rouse* Mathematical recreations and problems of past and present times. London New-York: Macmillan and Co., 1892 .
2. *Euler L.* Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Opera Omnia: Series 1, Vol. 7. P. 1–10.
3. *Euler L.* Solution d’une question curieuse que ne paroit soumise ò aucune analyse // Mémoires de l’académie des sciences de Berlin. 1766 (1759). 15. P. 310–337.
4. *Fisher R.A*. The design of experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd. 3 d. ed.1942.
5. *Kopelevich J. Ch.* The beginnings of ties of the St. Petersburg Academy of Sciences with the scholars of Gdańsk, *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki* 23:2 (1978), 323–331 (in Polish).
6. *Leibniz G.W.* Mathematische Schriften (1). Berlin. 1850. Bd. 2.
7. *Leibniz G.W.* Philosophische Schriften. Berlin: Gerausgeber von C.J. Gerhard. 1900. Bd. 3.
8. *Cayley A.* On the notion and boudaries of algebra // Quarterly Journal of pure and applied mathematics. 1864. Vol. 6. P. 382–384.
9. *Listing J.B.* Vorstudien zur Topologie. Göttingen. 1848. (Рус. пер.: Листинг И.Б. Предварительные исследования по топологии / пер с нем. Э. Кольмана. М.–Л., 1932).
10. *Moore E.H.* Tactical memoranda I–III // American journal of mathematics. 1896. Vol. 18. P. 264–303.
11. *Poincaré H.* Analysis Situs // Journal de l’École polytechnique. 1895. 2 ser. Cahier 1. P. 1–123.
12. *Poinsot L.* Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1845. T. 10. P. 1–101.
13. *Poinsot L.* Mémoire sur les polygones et les polyèdres // Journal de l’École polytechnique. 1810. T. 4. Cahier 10. P. 16–48.
14. *Sylvester J.J.* Elementary researches in the analysis of combinatorial aggregation // London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. 1844. Vol. 24. P. 285–296.
15. *Sylvester J.J.* Note on the historical origin of the unsymmetrical Six-valued Function of six Letters // Philosophical magazine. Ser. 4. 1861. Vol. 21. P. 369–377.
16. *Sylvester J.J.* Concluding paper on Tactic // Philosophical Magazine. Ser. 4. 1861. Vol. 22. P. 45–54.
17. *Stringham W.I.* Regular Figures in n-dimensional Space // American Journal of Mathematics. 1880. Vol. 3. P. 1–14.
18. *Vandermonde A.T.* Remarques sur les problèmes de situation // Histoire de l’Académie royale des sciences. 1772. P. 566–574.
19. *Алябьева В.Г.* Развитие комбинаторного метода в математике в XIX веке // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 3(30). С. 64–70.
20. *Васильев А.В.* Математика. Казань: Типолитография Казан. ун-та, 1916.
21. *Леонард Эйлер*. Письма к ученым. М.–Л.: Изд-во АН СССР. 1963.

22. *Sznajde Roman*. On known and less known relations of Leonhard Euler with Poland. URL: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1505/1505.02411.pdf (дата обращения: 10.07.2017).

The influence of Leibniz on the development of discrete mathematics

V. G. Alyabieva
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
alyabieva@rambler.ru

The article contains an overview of the development of Leibniz's idea of Analysis situs in discrete mathematics. The idea of Analysis Situs contributed to the development of geometry, combinatorics, emergence of graph theory and creation of topology in the 19th century. In the 20th century, combinatorics and graph theory formed the core of discrete mathematics. In connection with the powerful development of computer technology, discrete mathematics is now becoming the most demanded area of mathematics and demonstrates the true triumph of Leibniz's ideas.

Keywords: *Leibniz; analysis situs; combinatory; geometry of position; graph theory; topology.*