

УДК 519.6

Об особенностях численного дифференцирования некоторого зашумленного сигнала

С. В. Русаков, В. Л. Чечулин

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
chechulinvl@mail.ru, 8 (342) 2-396-424

Описаны особенности численного дифференцирования в системах управления технологическими процессами, указано на сильное влияние шумов на точность результатов обработки исходного сигнала, рассмотрены два способа уменьшения помех при дифференцировании: а) нечетный период дифференцирования, б) сглаживание (усреднение) исходного сигнала до дифференцирования; приведены примеры.

Ключевые слова: системы управления технологическими процессами; шумы сигнала; численное дифференцирование; статистические критерии.

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-2-49-52

Предисловие

В работах [4], [5], [6] (см. также [7]) был описан способ управления процессом вакуумной сепарации губчатого титана, при котором теоретическое окончание процесса определялось как выполнение статистической гипотезы о равенстве нулю первой производной от энергопотока в систему (описание технологического процесса см. в [5]). Отдельной процедурой определялся коэффициент продления процессов относительно теоретического момента окончания процесса.

В связи с тем, что исходный для управления процессом сигнал об энергопотоке в систему обладает большой зашумленностью, для определения производной имеет значение то, каким образом она вычисляется.

Целью работы является сравнение различных способов вычисления производной от зашумленного сигнала для выбора оптимального способа дифференцирования, с точки зрения обеспечения максимальной вероятности обеспечения статистического критерия.

1. Исходная модель сигнала

Качественная модель исходного сигнала такова. Энергопоток убывает по экспоненте от начального значения до ненулевого конечного:

$$E_{1,i} = \exp(-a - t_i) + c, \quad (1)$$

где a, b, c – положительные коэффициенты, i – условный номер отсчета по времени, $i = \overline{1, n}$ (в примере $a=3, b=10, c=1, n=50$ для упрощения $t_i=i$).

При этом на эту функцию наложен шум вида (ср. рис. 2, сигнал с реального объекта, см. [4]):

$$s_i = (RND(1)) * 0,2 - 0,1 + (-1)^i \cdot 0,5, \quad (2)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Такая характеристика шума связана с наличием позиционного регулирования температуры реторты [2], при таком шуме возникает колебательный процесс, с изменением температуры около температуры уставки регулятора (подробно это рассмотрено Ю.П. Кириным в [1]).

Тогда возмущенный сигнал имеет вид

$$E_{2,i} = E_{1,i} + s_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

см. рис. 1.

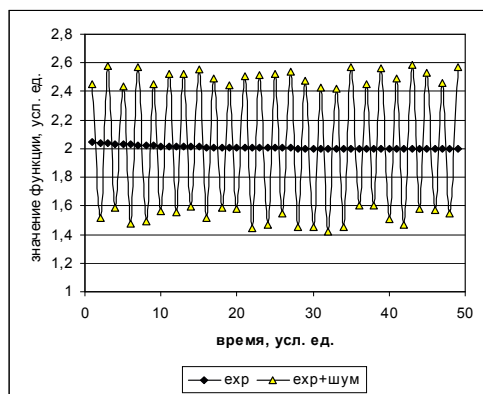


Рис. 1. Модельная функция зашумленного экспоненциально убывающего сигнала $E_{2,i}$

При этом необходимо выбрать оптимальный способ дифференцирования сигнала вида $E_{2,i}$, для обеспечения наибольшей вероятности при проверке t -критерием равенства нулю первой производной от энергопотока ($E_{2,i}$), которая в дальнейшем обозначается E^*_{i} .

2. Способы численного дифференцирования

Сравним следующие широко известные способы численного дифференцирования (см. [3]).

- 1) Направленные разделенные разности:
 - а) назад:

$$E^*_i = (E_{2,i} - E_{2,i-1}) / \Delta t, \quad i = \overline{2, n}, \quad (4)$$

где Δt – шаг отсчетов по времени;

б) вперед:

$$E^*_i = (E_{2,i+1} - E_{2,i}) / \Delta t, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (5)$$

2) Симметричные разделенные разности:

$$E^*_i = (E_{2,i+1} - E_{2,i-1}) / (2\Delta t), \quad i = \overline{2, n-1}. \quad (6)$$

3) Численное дифференцирование при усреднении исходной функции по четному числу точек – 6 точек (см. рис. 4).

$$E^*_{i,cp} = (E_{i+1,cp} - E_{i,cp}) / \Delta t, \quad i = 1, 7, 13, \dots \quad (7)$$

(Сглаживание выполняется по последовательным интервалам длиной 6 отсчетов, рис. 4)

$$E_{i,cp} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 E_{2,i+k}.$$

4) Численное дифференцирование при усреднении исходной функции по нечетному числу точек – 5 точек, (см. рис. 5).

$$E^*_{i,cp} = (E_{i+1,cp} - E_{i,cp}) / \Delta t, \quad i = 1, 6, 11, \dots \quad (8)$$

(Сглаживание выполняется по последовательным интервалам длиной 5 отсчетов, рис. 5)

$$E_{i,cp} = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 E_{2,i+k}.$$

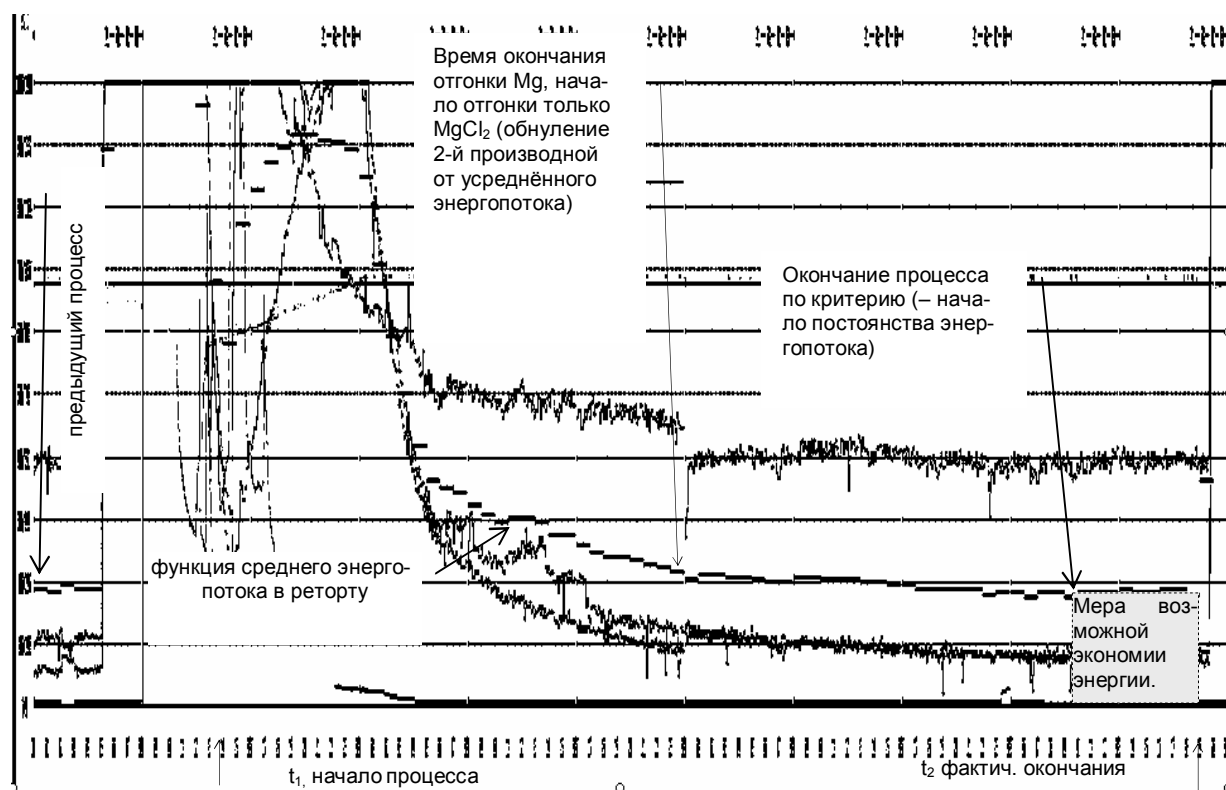


Рис. 2. Графики параметров процесса (длит. ок. 80 час.) с нормальным качеством продукта, [4]

Результаты дифференцирования представлены на рис. 3–5 и в таблице.

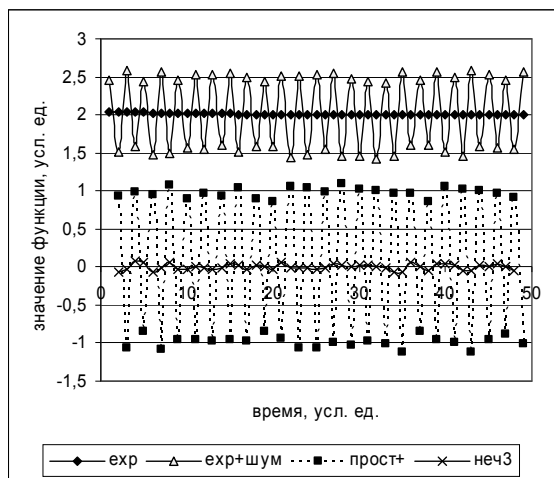


Рис. 3. Дифференцирование типов 1) —□— и, 2) —x—, —◆— исходный сигнал, —Δ— зашумленный сигнал

3. Выполнение *t*-критерия

Для указанных выше способов численного дифференцирования на модельном промежутке сигнала проверялось выполнение *t*-критерия. По *t*-критерию определялась вероятность равенства нулю производной исходного зашумленного сигнала для чего вычислялась статистика *t*-критерия Стьюдента:

$$y = \frac{\bar{x} - \xi_0}{S / \sqrt{n}}, \quad (9)$$

где ξ_0 – гипотетическое математическое ожидание (в данном случае $\xi_0 = 0$, что соответствует асимптотическому поведению производной от энергопотока); \bar{x} – математическое ожидание наблюдаемой случайной величины (на промежутке вычисления критерия, для рассматриваемого примера [1, 49]); S – стандартное отклонение наблюдаемой случайной величины; n – количество наблюдений в выборке.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} E_i^*,$$

где I – множество индексов; n – мощность множества индексов; E_i^* – значение 1-й производной энергопотока.

По статистике y стандартным способом определялась вероятность выполнения гипотезы о равенстве математического ожидания 1-й производной нулю, $p(\bar{x} = 0)$ (результаты в таблице).

Значения вероятности *t*-критерия

Тип числ. дифференциров.	n	\bar{x}	Ст. отклон. числ. производной**	Значение вероятности <i>t</i> -критерия**
1а	49	-0,001+0,004	0,98–1,1	<u>0,98–0,99</u>
1б	49	-0,004+0,001	0,98–1,1	<u>0,98–0,99</u>
2	48	-0,001+0,004	0,03–0,45	0,70–0,91
3	9	~0,001	0,035–0,08	0,50–0,95
4	10	~0,001	0,035–0,045	0,46–0,70

* на промежутке вычисления *t*-критерия

** приближенно на серии вычислительных экспериментов

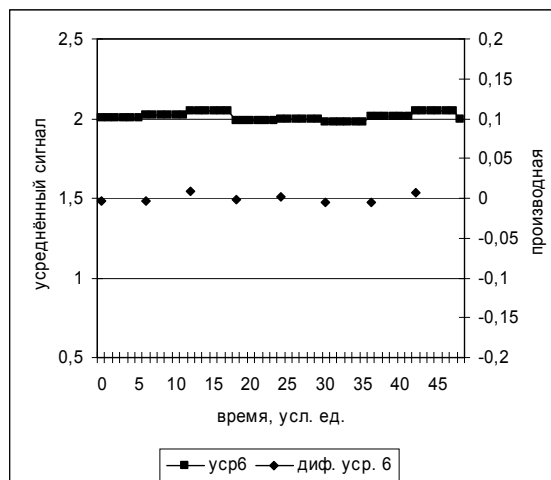


Рис. 4. Дифференцирование типа 3) —◆—

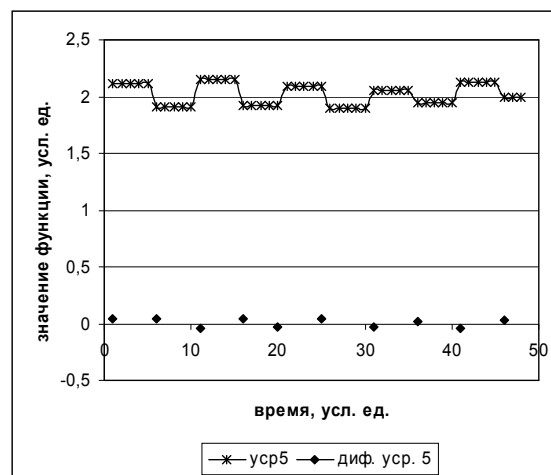


Рис. 5. Дифференцирование типа 4) —◆—

Для исходного шума (2), зашумляющего модельный сигнал (1), математическое ожидание равно 0 с вероятностью 0,99.

Высокие значения вероятности (0,99) для численного дифференцирования (тип 1а,б), связаны с тем, что при статистической обра-

ботке (вычислении математического ожидания) колебания сигнала усредняются.

Для типа численного дифференцирования 2), хотя продифференцированный сигнал имеет меньший размах (рис. 3), получается менее приемлемая вероятность выполнения критерия, т. е. промежуток проверки выполнения гипотезы требуется продлевать.

Для типов численного дифференцирования 3) и 4) более приемлемо усреднение по четному количеству точек (тип. 3), однако, как и в предыдущем случае, промежуток проверки гипотезы о равенстве нулю сигнала производной требуется продлевать.

Таким образом, при разнице стандартных отклонений полученных численных производных (см. табл.), приемлемым, по результатам выполнения t -критерия на промежутке ($p \approx 0,99$), являются способы численного дифференцирования с неминимальным стандартным отклонением.

Заключение

В результате вычислительных экспериментов установлено, что приемлемым для проверки критерия о равенстве нулю математического ожидания производной исходного зашумленного сигнала является простое численное дифференцирование направленными разделенными разностями типов 1а,б, как видно из значений вероятности срабатывания критерия в таблице (строки 1, 2).

Список литературы

1. *Кирич Ю.П. и др.* Качественный анализ динамики позиционного регулирования температуры процесса восстановления титана // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2008. № 10. С. 54–56.
2. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1989. 304 с.
3. *Турчак Л.И.* Основы численных методов / под ред. В.В. Щенникова. М.: Наука, 1987. 320 с.
4. *Чечулин В.Л. и др.* К информатизации процессов отгонки для обеспечения заданного качества продукта // Химическая промышленность. 2007. № 12. С. 408–414.
5. *Чечулин В.Л.* Метод пространства состояний управления качеством сложных химико-технологических процессов: монография / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2011. 114 с.
URL: http://www.psu.ru/psu2/files/0444/chechulin_mps.pdf (дата обращения: 02.02.2017).
6. *Chechulin V.L. etc.* About informatization of distillation process for providing required quality of product // Russian Journal of Applied Chemistry, MAIK Nauka/Interperiodica/ 2008. Vol. 81, № 3. P. 558–564.
7. *Чечулин В.Л.* Программный модуль реализации алгоритма "Определение момента окончания процесса вакуумной сепарации (отгонки)" // ОФАП РФ. Свидетельство об отраслевой регистрации № 11635; № гос. регистр. 50200802124, 16 окт. 2008.

On peculiarities of numerical differentiation of some noisy signal

S. V. Rusakov, V. L. Chechulin

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
chechulinvl@mail.ru; 8 (342) 2-396-424

The features of numerical differentiation in process control systems are described. It is noted that noises have a strong influence on the accuracy of the results of processing the original signal. Two ways to reduce interference during differentiation are considered: a) an odd period of differentiation, b) smoothing (averaging) of the original signal to derivation; some examples are given.

Keywords: process control systems; signal noise; numerical differentiation; statistical criteria.