МЕХАНИКА
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.977

Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений

Г. Г. Иванов, Г. В. Алфёров, П. А. Ефимова
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский проспект, 35
alferovgv@gmail.com; +7-911-246-57-87

При моделировании многих реальных процессов анализ устойчивости систем с переключениями является важной задачей. В настоящей работе исследуется проблема устойчивости нулевого решения селекторно-линейного дифференциального включения (СЛДВ). Рассматриваются необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости по Ляпунову нулевого решения систем автоматического управления, которые содержат элементы с неполной информацией.

Ключевые слова: *переключаемые системы; дифференциальные включения; релейная стабилизация; устойчивость; законы переключения.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-2-25-30

Введение

Прежде всего стоит отметить, что при упрощении описания системы, когда динамические звенья заменяются функциональными преобразователями, или при учете различного рода неидеальностей, нестационарностей и т.д., возникает недоопределенность в описании системы. Это приводит к необходимости при исследовании устойчивости систем автоматического управления, содержащих элементы с неполной информацией, рассматривать не одну систему, а совокупность систем дифференциальных уравнений, содержащих функциональные параметры, которые могут произвольно изменяться в заданных пределах. Для описания таких систем используют дифференциальные включения [1].

Ряд интересных случаев, например таких, как проблема абсолютной устойчивости управляемых систем или исследование линейных нестационарных моделей

$$\dot{x} = A(t)x,$$

где матрица A(t) удовлетворяет поэлементно неравенству

$$\alpha \le A(t) \le \beta,$$

описывается линейными дифференциальными включениями. Этим и объясняется интерес к задаче устойчивости линейных параметрически возмущенных систем.

В работе рассматривается вопрос об устойчивости нулевого решения селекторно-линейного дифференциального включения

$$\dot{x} \in R(x) = conv\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k x\right),$$

где A_k – Гурвицевы матрицы размерности $n \times n$.

А.Ф. Филиппов [2] показал, что если решение $x \equiv 0$ этого дифференциального включения асимптотически устойчиво, то оно является экспоненциально устойчивым. А.М. Мейлахс [3], в свою очередь, доказал, что асимптотическая устойчивость рассматриваемого включения влечет за собой существование функции $v(x)$, которая будет являться функцией Ляпунова, и определил аналитический вид этой функции. Опираясь на результаты А.М. Мейлахса [3], А.П. Молчанов и Е.С. Пятницкий [4] установили, что для асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$ дифференциального включения необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое натуральное число m, число $\gamma > 0$ и симметричные матрицы $L_1, \dots, L_m$, что функция вида

$$v(x) = \max_{i=1}^{m} x^T L_i x$$

при всех x удовлетворяла соотношению

$$\max_{y \in R(x)} \frac{\partial v(x)}{\partial y} \le -\gamma \|x\|^2,$$

где через $\dfrac{\partial v(x)}{\partial y}$ обозначена производная функции $v(x)$ по направлению y.

При исследовании вопроса устойчивости селекторно-линейного дифференциального включения мы будем опираться на эти результаты.

1. Предварительные замечания

При исследовании устойчивости систем автоматического управления, содержащих элементы с неполной информацией, приходится рассматривать не одну систему, а совокупность систем дифференциальных уравнений, содержащих функциональные параметры, которые могут произвольно изменяться в заданных пределах. Подобная ситуация возникает в известной проблеме абсолютной устойчивости управляемых систем, при исследовании линейных нестационарных моделей

$$\dot{x} = A(t)x,$$

где матрица $A(t)$ удовлетворяет поэлементно неравенству

$$\alpha \le A(t) \le \beta,$$

и т. д.

Для описания систем, содержащих элементы с неполной информацией [5–33], используют дифференциальные включения

$$\dot{x} \in R(x), \tag{1}$$

где n-мерный вектор x характеризует отклонение системы от режима, предписанного целью управления, а через $R(x)$ обозначено множество допустимых скоростей. Для указанных выше задач множество $R(x)$ при каждом x представляет собой многогранник вида

$$R(x) = conv\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k x\right). \tag{2}$$

Дифференциальные включения (1), где $R(x)$ имеет вид (2), будем называть селекторно-линейными, поскольку многозначное отображение $R(x)$ в (2) представляет собой объединение линейных однозначных отображений (селекторов).

Под решением включения (1), как обычно принято, будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую соотношению

$$\dot{x} \in R(x(t)),$$

почти всюду на рассматриваемом интервале.

Задача состоит в исследовании асимптотической устойчивости нулевого решения $x(t) \equiv 0$ включения (1).

Решение $x \equiv 0$ включения (1) назовем устойчивым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого x_0, для которого $\|x_0\| < \delta$, каждое решение $\tilde{x}(t)$ с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = x_0$ существует при $t \ge t_0$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{x}(t)\| < \varepsilon.$$

В определении асимптотической устойчивости помимо устойчивости дополнительно требуется, чтобы $\tilde{x} \to 0$ при $t \to \infty$.

В дальнейшем будем предполагать, что все матрицы A_k в выражении (2) являются Гурвицевыми, поскольку очевидно, что это условие необходимо для асимптотической устойчивости нулевого решения (1).

2. Условия устойчивости

Прежде чем приступать к исследованию устойчивости нулевого решения автономного селекторно-линейного дифференциального включения (1), докажем вспомогательное утверждение, в формулировке которого через $Z(x)$ обозначена матрица размерности $N \times n$, k-я строка которой определяется равенством

$$z_k(x) = (A_k x)^T, \quad k = 1,2,\ldots,N.$$

Лемма. Если для любого $x \in S = \{x : \|x\| = 1\}$ существует n-мерный вектор $y(x) \in S$ такой, что

$$Z(x)y(x) < 0, \ x \cdot y(x) > 0,$$

то существуют $\delta > 0$ и положительно определенная однородная функция $v(x)$ такие, что

$$\frac{d}{dt} v(x) \le -\delta \|x\|^2,$$

где производная берется в силу любой из систем

$$\dot{x} = A_k x, \quad k = 1,2,\ldots,N.$$

Доказательство. Выберем произвольную точку $x_0 \in S$ и построим множество

$$M(x_0) = \{y : Z(x_0)y < 0, \ x_0 \cdot y > 0, \ y \in S\}.$$

В множестве $M(x_0)$ выберем некоторую точку y_0. Поскольку $M(x_0)$, очевидно, открыто, то этому множеству точка y_0 принадлежит вместе с некоторой своей окрестностью.

Воспользовавшись тем, что любые точки $x \in S$ и $y \in S$ можно представить в виде

$$x = x_0 + \Delta x, \ y = y_0 + \Delta y,$$

получим систему равенств

$$\begin{aligned} Z(x)y &= Z(x_0)y_0 + Z(\Delta x)y_0 + Z(x)\Delta y \\ x \cdot y &= x_0 \cdot y_0 + \Delta x \cdot y_0 + x \cdot \Delta y. \end{aligned} \qquad (3)$$

По построению

$$Z(x_0)y_0 < 0, \ x_0 \cdot y_0 > 0,$$

откуда, в силу (3) и того факта, что y_0 является внутренней точкой множества $M(x_0)$, следует существование постоянных $\gamma > 0$ и $\theta > 0$ таких, что для любого $x \in \Gamma(x_0)$,

$$\Gamma(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < \gamma, \ x \in S\},$$

и для любого $y \in \Theta(x_0)$,

$$\Theta(x_0) = \{y : \|y - x_0\| < \theta, \ y \in S\},$$

будет $\quad Z(x)y < 0, \ x \cdot y > 0.$

Это означает, что множество $\Theta(y_0)$ принадлежит каждому из множеств $M(x)$ при $x \in \Gamma(x_0)$, т.е.

$$\Theta(y_0) \subset \bigcap_{x \in \Gamma(x_0)} M(x).$$

Повторяя аналогичные рассуждения, каждой точке $x \in S$ можно поставить в соответствие некоторую окрестность $\Gamma(x) \subset S$. Ясно, что совокупность окрестностей $\Gamma(x)$, $x \in S$, образует открытое покрытие множества S, из которого, в силу компактности сферы, можно извлечь конечное подпокрытие

$$\Gamma(x_1),\ldots,\Gamma(x_m).$$

Без нарушения общности можно считать, что выбранное подпокрытие минимально, т.е. из него уже нельзя выбросить ни одного из множеств $\Gamma(x_j)$, $j = 1,2,\ldots,m.$

Ясно, что множества $\Gamma(x_j)$ могут попарно пересекаться. Поэтому выберем из каждого $\Gamma(x_j)$ некоторое открытое подмножество $\Gamma'(x_j)$ таким образом, чтобы при $j_1 \ne j_2$

$$\Gamma'(x_{j_1}) \cap \Gamma'(x_{j_2}) = \varnothing$$

и чтобы замкнутые множества $\overline{\Gamma}'(x_j), j = 1,2,\ldots,m.$ образовывали покрытие множества S.

Отметим, что описанная выше процедура построения множества $\Gamma(x)$ каждому множеству $\Gamma(x_j)$ ставит в соответствие некоторое множество $\Theta(y_j), j = 1,2,\ldots,m.$

Зададим на $\Gamma'(x_j)$ произвольную непрерывную вектор-функцию

$$p_j(x) : \Gamma'(x_j) \to \Theta(y_j), \ j = 1,2,\ldots,m.$$

Несомненно, окрестности $\Gamma(x_j)$ и $\Theta(y_j)$ можно всегда выбрать такими, что найдется набор положительных чисел $\delta_1,\ldots,\delta_m$, для которых при любом $x \in \Gamma(x_j)$ будет

$$Z(x)p_j(x) \le -\delta_j \le -\delta, \quad j = 1,2,\ldots,m,$$

где

$$\delta = \min_{j \in \{1,\ldots,m\}} \delta_j.$$

На границы множеств $\Gamma'(x_j)$ функции p_j продолжим по непрерывности.

Таким образом, на сфере S мы построили вектор-функцию $p(x)$. Если $x \notin S$, то положим

$$p(x) = \|x\| p\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Поскольку выбор функций p_j был произвольным, то можно потребовать, чтобы эти функции удовлетворяли условиям

$$\omega_j \wedge \mathrm{d}\omega_{\mathrm{j}} \equiv 0, \quad x \in \Gamma'(x_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

где $\omega_j = p_j dx$ – дифференциальная 1-форма, а $d\omega_j$ – ее внешняя производная.

Согласно теореме Фробениуса, построенная выше вектор-функция $p(x)$ определяет в пространстве R^n вполне интегрируемое поле гиперплоскостей и, следовательно, существует функция $v(x)$, для которой вектор-функция $p(x)$ является градиентом.

Условие $x \cdot p(x) < 0$ при $x \neq 0$ означает, что однородная функция $v(x)$ является положительно определенной, а условие $Z(x)p(x) \le -\delta$ при $x \in S$, в силу выбора функции $p(x)$ и линейности по x коэффициентов матрицы $Z(x)$, влечет за собой выполнение соотношения

$$\frac{d}{dt} v(x) \le -\delta \|x\|^2,$$

где производная берется в силу любой из систем

$$\dot{x} = A_k x, \ \ k = 1, \dots, N.$$

3. Устойчивость решения СЛДВ

Перейдем теперь к исследованию вопроса об асимптотической устойчивости тривиального решения $x \equiv 0$ автономного селекторно-линейного дифференциального включения (1).

Теорема. Для того чтобы нулевое решение $x \equiv 0$ селекторно-линейного дифференциального включения (1) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in S$ существовал n-мерный вектор $y(x) \in S$ такой, что

$$Z(x)y(x) < 0, \ x \cdot y(x) > 0. \tag{4}$$

Доказательство

Необходимость. Пусть решение $x \equiv 0$ СЛДВ вида (1) асимптотически устойчиво. Тогда, как следует из работ А.М. Мейлахса, А.П. Молчанова и Е.С. Пятницкого, существуют натуральное число m, положительное δ и симметричные $n \times n$ матрицы $L_i, i = 1,2,\dots,m$, такие, что функция

$$v(x) = \max_{i \in \{1,2,\dots,m\}} x^T L_i x$$

является положительно определенной квадратичной формой и имеет производную в силу включения (1) $w(x)$, удовлетворяющую оценке

$$w(x) \le -\delta \|x\|^2. \tag{5}$$

Очевидно, что если оценка (5) справедлива для производной функции $v(x)$, взятой в силу дифференциального включения (1), то она будет справедлива и для производной функции $v(x)$, взятой в силу любой из систем

$$\dot{x} = A_k x, \ \ k = 1,2,\dots,N.$$

Отсюда и из того факта, что $v(x)$ есть квадратичная форма, заключаем, что имеют место неравенства (4).

Достаточность. Если имеют место неравенства (4), то из леммы следует существование положительно определенной функции $v(x)$ и $\delta > 0$ таких, что производная функции $v(x)$ в силу любой из систем

$$\dot{x} = A_k x, \ \ k = 1,2,\dots,N$$

не превышает величины $-\delta \|x\|^2$. Но тогда, очевидно, и

$$w(x) \le -\delta \|x\|^2.$$

откуда заключаем, что нулевое решение СЛДВ (1) асимптотически устойчиво.

Заключение

В данной работе рассмотрен вопрос об устойчивости параметрически возмущенных линейных систем. Мы показали, что вопрос об устойчивости нулевого решения селекторно-линейного дифференциального включения сводится к вопросу о разрешимости системы алгебраических неравенств, коэффициенты которых однозначно определяются коэффициентами исходного дифференциального включения.

Список литературы

1. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 3 (34). С. 37–48.
2. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
3. *Мейлакс А.М.* О стабилизации линейных управляемых систем в условиях неопределенности // Автоматика и телемеха-ника. 1975. № 2. С. 182–189.
4. *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 5–15.
5. *Kulakov F., Alferov G.V., Efimova P. et al.* Modeling and Control of Robot Manipulators With The Constraints At The Moving Objects // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. P. 102–105.
6. *Ефимова П.А., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В. и др.* Управление многозвенными манипуляционными роботами при наличии связей у перемещаемых ими объектов // Устойчивость и процессы управления: Материалы III междунар. конф. 2015. С. 121–122.
7. *Ефимова П.А., Шиманчук Д.В.* Моделирование движения космического манипуляционного робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2014. № 46. С. 20–30.
8. *Kulakov F., Alferov G., Efimova P.* Methods of remote control over space robots // 2015 International Conference on Mechanics - Seventh Polyakhov's Reading 2015. P. 7106742.
9. *Ефимова П.А.* Кинематическая модель космического манипуляционного робота // Молодой ученый. 2015. № 6 (86). С. 1–7.
10. *Efimova P., Shymanchuk D.* Dynamic Model of Space Robot Manipulator // Applied Mathematical Sciences. 2015. T. 9, № 96. P. 4653–4659.
11. *Ефимова П.А.* Динамическая модель космического манипуляционного робота // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2, № 1. С. 173–179.
12. *Пичугин Ю.А., Малафеев О.А., Алфёров Г.В.* Оценивание параметров в задачах конструирования механизмов роботов-манипуляторов // Устойчивость и процессы управления: Материалы III междунар. конф. 2015. С. 141–142.
13. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Шарлай А.С.* Кинематические модели манипуляционных роботов // Потенциал современной науки. Липецк. 2014. № 2. С. 38–41.
14. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В.* Модели манипуляторов для автоматизации сборочных операций // Современные инновации в науке и технике / Сб. тр. 4-й науч.-практ. конф. Курск, 2014. Т. 2. С. 322–329.
15. *Alferov G.V., Malafeyev O.A., Maltseva A.S.* Programming The Robot In Tasks Of Inspection And Interception // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading 2015. P. 7106713.
16. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В.* Математические модели гибкого робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 1995. № 29. С. 92–97.
17. *Алфёров Г.В., Кулаков Ф.М., Нечаев А.И. и др.* Информационные системы виртуальной реальности в мехатронике и робототехнике: учеб. пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 168 с.
18. *Шиманчук Д.В.* Моделирование орбитального управляемого движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L1 // Вестник Санкт-Петер-бургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. № 3. С. 86–92.
19. *Шиманчук Д.В., Шмыров А.С.* Построение траектории возвращения в окрестность коллинеарной точки либрации системы Солнце–Земля // Вестник Санкт-Петер-бургского университета. Серия 10. При-

кладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. № 2. С. 75–84.

20. *Шиманчук Д.В.* Об использовании коллинеарной точки либрации при решении задачи кометно-астероидной опасности // Молодой ученый. 2014. № 4. С. 43-46.
21. *Кулаков Ф.М., Шмыров А.С., Шиманчук Д.В.* Управление космическим роботом с использованием неустойчивой точки либрации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 23–28.
22. *Korolev V., Pototskaya I.* Problems Of Stability With Respect To A Part Of Variables // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading 2015. P. 7106739.
23. *Королёв В.С., Потоцкая И.Ю.* Условия устойчивости состояний движения // Инновации в науке. 2015. № 51-1. С. 29–43.
24. *Королёв В.С.* Вопросы устойчивости положений равновесия // Естественные и математические науки в современном мире. 2014. № 24. С. 13–20.
25. *Королёв В.С.* Устойчивость решений динамических систем по части переменных // Естественные и математические науки в современном мире. 2014. № 19. С. 14–22.
26. *Королёв В.С.* Задачи оптимального маневрирования космических аппаратов для инспектирования или обслуживания системы тел // Исследования наукограда. 2015. № 2 (12). С. 18–23.
27. *Неверова Е.Г., Малафеев О.А., Алфёров Г.В.* Нелинейная модель управления антикоррупционными мероприятиями // Устойчивость и процессы управления: Материалы III междунар. конф. 2015. С. 445–446.
28. *Neverova E.G., Malafeyev O.A., Alferov G.V. et al.* Model of Interaction Between Anticorruption Authorities And Corruption Groups // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. P. 488–490.
29. *Малафеев О.А., Рединских Н.Д., Алфёров Г.В.* Модель аукциона с коррупционной компонентой // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. № 1 (28). С. 30–34.
30. *Демидова Д.А., Алфёров Г.В., Колпак Е.П. и др.* Нелинейный процесс взаимодействия между коррумпированной фирмой и отделом по борьбе с коррупцией // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2015. № 47. С. 17–31.
31. *Зубов В.И.* Границы области асимптотической устойчивости. СПб.: СПбГУ, 2007. 85 с.
32. *Иванов Г.Г.* К вопросу устойчивости линейно однородных систем с переключениями // Устойчивость и процессы управления: Материалы III междунар. конф. 2015. С. 33–34.
33. *Ivanov G.G., Sharlay A.S.* On Stability of Linear Homogeneous Switched Systems // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. P. 13–15.

Stability of Selector-Linear Differential Inclusions

G. G. Ivanov, G. V. Alferov, P. A. Efimova

Saint Petersburg State University; 7/9, Universitetskaya naberezhnaya, St. Petersburg, 199034, Russia

alferovgv@gmail.com ; +7-911-246-57-87

In this paper, we study the problem of stability of the zero solution of a selector-linear differential inclusion.

Keywords: *switched systems; differential inclusions; relay stabilization; stability; switching laws.*