УДК 517.929

Признаки осцилляции линейных уравнений с последействием

К. М. Чудинов, В. В. Малыгина
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
cyril@list.ru, mavera@list.ru; 8(342)2391564

Для линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений установлен новый эффективный критерий осцилляции решений.

Ключевые слова: *линейные функционально-дифференциальные уравнения; осцилляция; эффективные признаки.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2017-2-19-24

1. История вопроса

Использование уравнений с последействием в задачах физики, химии, биологии, экономики дало возможность строить математические модели, более точно описывающие реальность. С другой стороны, это повлекло за собой необходимость совершенствования общей теории дифференциальных уравнений, поскольку класс уравнений с последействием существенно шире обыкновенных дифференциальных уравнений, а структура их решений – сложнее и многообразнее.

Появление осциллирующих решений у линейных уравнений первого порядка – одно из качественных отличий уравнений с последействием от обыкновенных дифференциальных уравнений [2]. Эта особенность сразу привлекла внимание исследователей, для ее изучения начали разрабатываться новые методы, позволяющие отделять осциллирующие решения от знакопостоянных.

Первые признаки осцилляции были, естественно, получены для простейших уравнений с последействием. С усложнением объекта получение признаков осцилляции также становилось более сложной задачей. Право на обобщение получали признаки, которые удовлетворяли ряду важных требований: эффективная проверяемость, простота и точность.

Настоящая статья посвящена обобщению одного из таких признаков осцилляции. Первый его вариант, полученный в 70-х гг. прошлого века в работах [3, 7], после ряда небольших уточнений и усилений принял следующий вид.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)+p(t)x(h(t))=0\,, \quad t\ge 0\,, \qquad (1)$$

где p – локально-суммируемая, а h – измеримая по Лебегу функция, причем $h(t)\le t$ и $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=\infty$.

Теорема 1. *Пусть* $p(t)\ge 0$, h *монотонно возрастает и*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{h(t)}^{t}p(s)ds>1.$$

Тогда все решения уравнения (1) *являются осциллирующими.*

Требование монотонности h отбросить нельзя: в работах [5, 6] приведены примеры, показывающие существенность этого условия. Попытки ослабить его предпринимались многократно, хотя не все они были одинаково успешными. Рассмотрим наиболее сильные, на наш взгляд, подходы.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ, проект 1.5336.2017/8.9

Обозначим $g(t)=\sup\limits_{s\le t} h(s)$. Очевидно, что функция g монотонно возрастает и $g(t)\ge h(t)$ при любом t. Если функция h монотонно возрастает, то $g(t)=h(t)$.

Теорема 2 [5]. *Пусть* $p(t)\ge 0$ *и*

$$\varlimsup_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t} p(s)ds>1.$$

Тогда все решения уравнения (1) *являются осциллирующими.*

Теорема 2 усиливает теорему 1. В то же время функция $g(t)$ была использована для дальнейшего усиления, определяемого возможностью увеличить подынтегральное выражение.

Теорема 3 [5]. *Пусть* $p(t)\ge 0$ *и*

$$\varlimsup_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t} p(s)\exp\left\{\int_{h(s)}^{g(t)} p(\tau)d\tau\right\}ds>1. \qquad (2)$$

Тогда все решения уравнения (1) *являются осциллирующими.*

Успех работы [5] был развит в работе [4], где было показано, что функцию $\exp\left\{\int_{h(s)}^{g(t)} p(\tau)d\tau\right\}$ в неравенстве (2) можно заменять еще бóльшими функциями, последовательно выстраивая их с помощью рекуррентного соотношения.

Обозначим

$$a_1(t,s)=\exp\left\{\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau\right\}, \qquad (3)$$

$$a_{k+1}(t,s)=\exp\left\{\int_{s}^{t} p(\tau)a_k(\tau,h(\tau))d\tau\right\},\ k\in N.$$

Теорема 4 [4]. *Пусть* $p(t)\ge 0$ *и при некотором* $k\in N$

$$\varlimsup_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t} p(s)a_k(g(t),h(s))ds>1.$$

Тогда все решения уравнения (1) *являются осциллирующими.*

Рассмотрим теперь другой недавний подход к уточнению теоремы 1.

Обозначим $E(t)=\{s : h(s)\le t\le s\}$.

Теорема 5 [6]. *Пусть* $p(t)\ge 0$ *и*

$$\varlimsup_{t\to\infty}\int_{E(t)} p(s)ds>1.$$

Тогда все решения уравнения (1) *являются осциллирующими.*

Теорема 2 является следствием как теоремы 3, так и теоремы 5. Для случая монотонной функции h теоремы 2 и 5 совпадают, для прочих ситуаций интегрирование по множеству $E(t)$ всегда дает более сильный результат, чем по множеству $[g(t),t]$. Возникают естественные вопросы:

- Нельзя ли получить аналоги теорем 3 и 4, обобщая теорему 5?
- Насколько существенно в теоремах 1–5 сосредоточенное запаздывание? Останутся ли верными результаты для распределенного запаздывания или последействия общего вида?

Поиску ответов на эти вопросы и посвящена данная статья.

2. Описание объекта и постановка задачи

Рассмотрим линейное функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t)+\int_{h(t)}^{t} x(s)d_s r(t,s)=0,\quad t\ge 0, \qquad (4)$$

в следующих предположениях: функция $r(t,\cdot)$ имеет ограниченную вариацию, $r(t,0)=0$, функция $\rho(t)=\operatorname*{var}\limits_{h(t)\le s\le t} r(t,s)$ локально суммируема; функция h измерима и $h(t)\le t$; интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса. При отрицательных значениях аргумента функция x предполагается доопределенной заданной начальной функцией.

Как известно [1], в этих предположениях решение уравнения (4) существует и единственно в классе локально абсолютно непрерывных функций; отсюда же следует бесконечная продолжаемость решения на всю положительную полуось.

Частными случаями уравнения (4) являются уравнения с несколькими сосредоточенными запаздываниями и уравнения с распределенным запаздыванием.

Определение 1. Непрерывную на полуоси функцию будем называть *осциллирующей*, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Определение 2. Уравнение (1) назовем *осциллирующим,* если любое его решение является осциллирующим.

3. Основной результат

По аналогии с формулами (3) введем обозначения:

$$P_1(t,s)=\exp\left\{\int_s^t \rho(\xi)d\xi\right\}=$$

$$=\exp\left\{\int_s^t\left(\int_{h(\xi)}^{\xi} d_\eta r(\xi,\eta)\right)d\xi\right\};$$

$$P_{k+1}(t,s)=\exp\left\{\int_s^t\left(\int_{h(\xi)}^{\xi} P_k(\xi,\eta)d_\eta r(\xi,\eta)\right)d\xi\right\},$$

$$k\in N.$$

Доказательство следующей леммы следует схеме доказательства аналогичного утверждения из работы [4].

Лемма 1. *Пусть* $r(t,\cdot)$ *монотонно возрастает и* $\lim_{t\to\infty} h(t)=\infty$. *Если* x *– положительное при* $t\ge t_0$ *решение уравнения* (4), *то найдется такое* $t_1\ge t_0$, *что при* $t\ge s\ge t_1$

$$x(t)P_k(t,s)\le x(s). \qquad (5)$$

Доказательство проведем индукцией по k. Перепишем уравнение (4) в виде

$$\dot{x}(t)+\rho(t)x(t)=\int_{h(t)}^{t}\big(x(t)-x(\eta)\big)\,d_\eta r(t,\eta).$$

Так как при $t\ge t_0$ решение уравнения (4) монотонно убывает, то $x(t)\le x(\eta)$, следовательно, $\dot{x}(t)+\rho(t)x(t)\le 0$. По формуле Коши (представления решения [1, с. 35]) отсюда следует, что

$$x(t)\le x(s)\exp\left\{-\int_s^t \rho(\xi)d\xi\right\},$$

т. е. при $k=1$ утверждение леммы верно. Пусть неравенство (5) выполнено для некоторого $k\ge 2$. Тогда $x(t)P_k(t,\eta)\le x(\eta)$, следовательно,

$$\dot{x}(t)+x(t)\int_{h(t)}^{t}P_k(t,\eta)d_\eta r(t,\eta)\le 0.$$

Еще раз применяя формулу Коши, получаем

$$x(t)\le x(s)\exp\left\{-\int_s^t\left(\int_{h(\xi)}^{\xi}P_k(\xi,\eta)d_\eta r(\xi,\eta)\right)d\xi\right\}$$

или, с учетом определения функции P_{k+1}, $x(s)\ge x(t)P_{k+1}(t,s)$, что и требовалось доказать. ▲

Теорема 6. *Пусть* $r(t,\cdot)$ *монотонно возрастает и* $\lim_{t\to\infty}h(t)=\infty$. *Тогда, если при некотором* $k\in N$ *справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{E(t)}\int_{h(s)}^{t}P_k(t,\eta)d_\eta r(s,\eta)ds>1,$$

то уравнение (4) *является осциллирующим.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и, начиная с некоторого T, решение уравнения (4) остается положительным и, следовательно, монотонно убывающим. Из уравнения (4) получаем

$$\dot{x}(t)=x(T)-\int_T^t\int_{h(s)}^{s}x(\eta)d_\eta r(s,\eta)ds>0,\ t\ge T.$$

Используя включение $E(T)\subset[T,\infty)$ и определение множества $E(T)$, получаем:

$$x(T)\ge\int_T^\infty\int_{h(s)}^{s}x(\eta)d_\eta r(s,\eta)ds\ge$$

$$\ge\int_{E(T)}\int_{h(s)}^{s}x(\eta)d_\eta r(s,\eta)ds\ge\int_{E(T)}\int_{h(s)}^{T}x(\eta)d_\eta r(s,\eta)ds.$$

По лемме 1, $x(\eta)\ge x(T)P_k(T,\eta)$, значит, учитывая условия теоремы, имеем:

$$x(T)\ge\int_{E(T)}\int_{h(s)}^{T}x(\eta)d_\eta r(s,\eta)ds\ge$$

$$\ge x(T)\int_{E(T)}\int_{h(s)}^{T}P_k(T,\eta)d_\eta r(s,\eta)ds>x(T),$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему. ▲

Следствие 1. *Пусть* $p(t)\ge 0$ *и* $\lim_{t\to\infty}h(t)=\infty$. *Тогда, если при некотором* $k\in N$ *справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{E(t)}p(s)P_k(t,h(s))ds>1,$$

то уравнение (1) *является осциллирующим.*

Так как $g(t)\le t$, а $[g(t),t]\subset E(t)$, то теоремы 3 и 4 оказываются частным случаем следствия 1. Обратное утверждение неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (1), в котором функции p и h определены следующими формулами:

$$p(t)=\begin{cases} a, \text{ если } t\in[2n,2n+1),\\ b, \text{ если } t\in[2n+1,2n+2),\ n\in N_0;\end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases} 2n, \text{ если } t\in[2n,\,2n+1),\\ 2n-1, \text{ если } t\in[2n+1,\,2n+2),\ n\in N_0.\end{cases}$$

Применим теорему 3. Очевидно, что $g(t)=2n$, если $t\in[2n,2n+2)$; $n\in N_0$.

Значит,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{g(t)}^{t}p(s)\exp\left\{\int_{h(s)}^{g(t)}p(\tau)d\tau\right\}ds=$$

$$=\int_{2n}^{2n+2}p(s)\exp\left\{\int_{h(s)}^{2n}p(\tau)d\tau\right\}ds=$$

$$=\int_{2n}^{2n+1}a\exp\left\{\int_{2n}^{2n}p(\tau)d\tau\right\}ds+$$

$$+\int_{2n+1}^{2n+2}b\exp\left\{\int_{2n-1}^{2n}bd\tau\right\}ds=a+be^{b},$$

и, следовательно, уравнение (1) является осциллирующим, если $a+be^{b}>1$.

Теперь применим следствие 1 при $k=1$. Поскольку

$$E(2n+1)=[2n+1,2n+2)\cup[2n+3,2n+4)$$

и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{E(t)}p(s)\exp\left\{\int_{h(s)}^{t}p(\tau)d\tau\right\}ds=$$

$$=\int_{2n+1}^{2n+2}b\exp\left\{\int_{2n-1}^{2n+1}p(\tau)d\tau\right\}ds+$$

$$+\int_{2n+3}^{2n+4}b\exp\left\{\int_{2n+1}^{2n+1}p(\tau)d\tau\right\}ds=b(e^{a+b}+1),$$

то уравнение (1) является осциллирующим, если $b\left(1+e^{a+b}\right)>1$. Пусть числа a и b таковы, что $b>a$. Тогда $b\left(1+e^{a+b}\right)>a+be^{b}$, т.е. следствие 1 имеет более широкую область применимости, чем теорема 3.

Замечание. В работе [6] построен пример, который показывает, что теорема 5 сильнее теоремы 2. Приведенный выше пример показывает, что добавление под интеграл экспоненты только усиливает эффект.

Следствие 2. *Пусть* $r(t,\xi)$ *монотонно возрастает и* $\lim_{t\to\infty}h(t)=\infty$. *Тогда, если*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{E(t)}\int_{h(s)}^{t}d_{\eta}r(s,\eta)ds>1,$$

то уравнение (4) *является осциллирующим.*

Доказательство следует из очевидного неравенства $P_k(t,\eta)\ge 1$ и монотонности функции $r(t,\xi)$. ▲

Для уравнения (1) следствие 1 совпадает с теоремой 5.

Таким образом, получены ответы на оба вопроса, поставленные в п. 2. Теорема 6 обобщает теоремы 4 и 5 в двух направлениях: интегрирование по отрезку $[g(t),t]$ заменяется интегрированием по множеству $E(t)$, а вместо сосредоточенного запаздывания рассматривается последействие общего вида.

4. Уравнение с распределенным последействием

Как уже отмечалось выше, другой важный частный случай уравнения (4) – уравнение с распределенным последействием

$$\dot{x}(t)+\int_{h(t)}^{t}k(t,s)x(s)ds=0,\quad t\ge 0. \qquad (6)$$

Для уравнения (6) функции $P_k(t,s)$ имеют вид

$$P_1(t,s)=\exp\left\{\int_{s}^{t}\left(\int_{h(\zeta)}^{\zeta}k(\zeta,\eta)d\eta\right)d\zeta\right\};$$

$$P_{k+1}(t,s)=\exp\left\{\int_{s}^{t}\left(\int_{h(\zeta)}^{\zeta}P_k(\zeta,\eta)k(\zeta,\eta)d\eta\right)d\zeta\right\},$$

$$k\in N.$$

Применяя к (6) теорему 6, получаем следующий признак осцилляции.

Теорема 7. *Пусть* $k(t,s)\ge 0$ *и* $\lim_{t\to\infty}h(t)=\infty$. *Тогда, если при некотором* $k\in N$ *справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{E(t)}\int_{h(s)}^{t}P_k(t,\eta)k(s,\eta)d\eta ds>1,$$

то уравнение (6) *является осциллирующим.*

Теорема 7 включает в себя известные признаки осцилляции для уравнения (6).

Следствие 3 [8]. *Пусть* $k(t,s)\ge 0$ *и* $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=\infty$. *Тогда, если*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int\limits_{E(t)} \int\limits_{h(s)}^{t} k(s,\eta)\,d\eta\, ds > 1,$$

то уравнение (6) *является осциллирующим.*

Доказательство следует из очевидного неравенства $P_k(t,\eta)\ge 1$ и неотрицательности функции $k(t,s)$. ▲

В работе [9] уравнение с распределенным запаздыванием записано в форме, отличной от (6):

$$\dot{x}(t) + \int\limits_{0}^{b(t)} R(t,s)\,x(t-s)\,ds = 0, \quad t\ge 0. \qquad (7)$$

Здесь функция b непрерывна и положительна на $[0,\infty)$, функция R кусочно-непрерывна на $[0,\infty)\times[0,b(t)]$.

Теорема 8 [9]. *Пусть* $R(t,s)\ge 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}(t-b(t))=\infty$, *а функция* b *монотонно возрастает на* $[0,\infty)$. *Тогда, если*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int\limits_{0}^{b(t)} \int\limits_{t}^{t+s} R(\eta,s)\,d\eta\, ds > 1,$$

то уравнение (7) *является осциллирующим.*

Покажем, что теорема 8 вытекает из следствия 3. Заметим, что уравнение (7) можно привести к форме (6), если сделать в интеграле замену $t-s=\tau$ и обозначить $t-b(t)=h(t)$, а $R(t,t-\tau)=k(t,\tau)$.

Так как b – монотонно возрастающая функция, то $b(\eta)\ge b(t)$ при $\eta\ge t$, а если $t\le\eta\le t+b(t)$, то $\eta-b(\eta)\le t\le\eta$, следовательно, $\eta\in E(t)$. С учетом неотрицательности R, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\int\limits_{0}^{b(t)} \int\limits_{t}^{t+s} R(\eta,s)\,d\eta\, ds = \int\limits_{t}^{t+b(t)} \int\limits_{\eta-t}^{b(t)} R(\eta,s)\,ds\,d\eta =$$

$$= \int\limits_{t}^{t+b(t)} \int\limits_{\eta-b(t)}^{t} R(\eta,\eta-\tau)\,d\tau\,d\eta \le$$

$$\le \int\limits_{t}^{t+b(t)} \int\limits_{h(\eta)}^{t} k(\eta,\tau)\,d\tau\,d\eta \le \int\limits_{E(t)} \int\limits_{h(\eta)}^{t} k(\eta,\tau)\,d\tau\,d\eta,$$

откуда следует, что выполнение условий теоремы 8 обеспечивает выполнение условий следствия 3. Обратное неверно: в следствии 3 нет предположений о монотонности функции $b(t)=t-h(t)$.

Список литературы

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 108 с.
2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
3. *Трамов М.И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Известия вузов. Математика. 1975. № 3(154). С. 92–96.
4. *Braverman E., Chatzarakis G.E., Stavroulakis I.P.* Iterative oscillation tests for differential equations with several non-monotone arguments // Advances in Difference Equations. 2016. № 2016:87. P. 1–18.
5. *Braverman E., Karpuz B.* On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays // Applied Mathematics and Computation. 2011. Vol. 218. № 7. P. 3880–3887.
6. *Chudinov K.* Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2016. № 2. P. 1–10.
7. *Ladas G., Lakshmikantham V., Papadakis J.S.* Oscillation of higher-order retarded differential equations generated by the retarded agument // Delay and functional differential equations and their applications / N.Y.: Academic Press, 1972. P. 219–231.
8. *Malygina V., Sabatulina T.* On oscillation of solutions of differential equations with distributed delay // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2016. № 116. P. 1–15.
9. *Tang X.H.* Oscillation of first order delay differential equations with distributed delay // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2004. Vol. 289, № 2. P. 367–378.

Oscillation conditions for linear equations with aftereffect

K. M. Chudinov, V. V. Malygina
Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospekt, 614990, Perm, Russia
mavera@list.ru; 8(342)2391564

For linear scalar functional differential equations, a new effective criterion for the oscillation of solutions have been established.

Keywords: *linear functional differential equations; oscillation; effective conditions.*