ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2016 Математика. Информатика. Механика Вып. 4 (35)

УДК 519.21

Стохастическая двумерная модель распространения загрязнения реки

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул.Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

В работе рассматривается стохастическая двумерная модель переноса загрязнений по течению реки, включающая случайные пульсации и неслучайные средние продольной и поперечной скоростей водного потока, коэффициенты продольной и поперечной диффузии и консервативности вещества. Построены уравнения для первых моментных полей, для которых получено приближенно аналитическое решение в частном случае.

Ключевые слова: *экология*; *моделирование*; *стохастическая система*; *дифференциальное уравнение в частных производных*; *приближенно аналитическое решение*; *моментные функции.*

Введение

Проблема охраны окружающей среды, а также задачи экологического мониторинга и долгосрочного прогнозирования являются важнейшими задачами науки в современном мире. Интенсивное развитие промышленности и связанное с этим увеличение промышленных выбросов, загрязняющих окружающую среду, уже стали ощутимыми для экологического равновесия многих регионов страны и мира. Промышленные выбросы приводят к угнетению жизни растительного животного мира (птиц, рыб, насекомых, полезных бактерий и др.) [1]. Проблемы окружающей среды, причинами которых является рост объема загрязнений, сбрасываемых в естественные водные бассейны, разливы нефти требуют быстрой реакции с целью предотвращения дальнейшего ухудшения качества воды,а также загрязнения подземных вод и водоносных слоев.

В настоящее время при рассмотрении таких сложных процессов как течения, принято выделять детерминированную и вероятностную составляющие [2]. Детерминированная компонента полностью определяется гидродинамическими законами и гидрологией водоемов; вероятностная составляющая является результатом наложения случайных факторов и может быть оценена лишь путем статистической обработки массового материала наблюдений. При этом стохастические модели уже давно являются рабочим инструментом в задачах гидрологии [2–7].

При стационарном протекании транзитного потока струя загрязненной жидкости, поступая в него, распространяется по течению, постоянно перемешиваясь и разбавляясь в результате турбулентной диффузии [2]. Характерной особенностью турбулент-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-96019), а также Минобразования и науки России (Задание № 2014/153).

ных движений является наличие пульсации гидродинамических величин потока, которые по своей природе являются беспорядочными [1]. Важной задачей является оценка вероятностных характеристик потока, которая может быть получена при использовании различных моделей переноса загрязнений и, в том числе, с учетом запаздывания и наличия распределенных параметров.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую модель распространения попавшего в реку загрязнения:

$$\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t} + \left[\, u_1+\sigma_1 V_1(t) \,\right] \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial x} + \left[\, u_2+\sigma_2 V_2(t) \,\right] \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial y} = \nu_1 \frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial y^2} - \left[\, c+\sigma_3 V_3(t) \,\right] U(x,y,t), \tag{1.1}$$

$$U(x,y,0) = U^0(x,y), \tag{1.2}$$

где $U(x,y,t) > 0$ – концентрация загрязняющих веществ в точке (x,y) в момент времени t; u_1, u_2, ν_1, ν_2, c – положительные постоянные, представляющие собой неслучайные средние продольную и поперечную скорости водного потока, коэффициенты продольной и поперечной диффузии и консервативности вещества. Как и в других моделях, считаем, что для случайного поля $U^0(x,y)$ известны все необходимые числовые характеристики. Влияние случайных факторов в уравнении модели отражено присутствием слагаемых $\sigma_1 V_1(t)$, $\sigma_2 V_2(t)$ и $\sigma_3 V_3(t)$, где $V_i(t)$ – независимые белые шумы с нулевыми средними и единичными интенсивностями, $\sigma_i = \mathrm{const}$, $i = 1,2,3$. Граничные условия примут форму

$$U(-\infty,y,t) = U(+\infty,y,t) = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial U(x,0,t)}{\partial y} = \frac{\partial U(x,L,t)}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

(L – ширина реки).

Очевидно, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{L} U(x,y,t)\, dx\, dy$$

дает массу загрязняющих веществ в момент времени t.

Основная задача исследования в данной работе состоит в построении и решении уравнений для функций

$$m_1(x,y,t) = \mathcal{E}[U(x,y,t)]\,,$$

$$m_2(x_1,y_1,x_2,y_2,t) = \mathcal{E}[U(x_1,y_1,t)\, U(x_2,y_2,t)]$$

– первых моментов концентрации, если известны значения этих функций в начальный момент времени

$$m_1^0(x,y) = \mathcal{E}\big[U^0(x,y)\big] \equiv m_1(x,y,0),$$

$$m_2^0(x_1,y_1,x_2,y_2) = \mathcal{E}\big[U^0(x_1,y_1)\, U^0(x_2,y_2)\big] = m_2(x_1,y_1,x_2,y_2,0),$$

где $\mathcal{E}[...]$ – символ математического ожидания.

2. Уравнения для первых моментов

Для вывода искомых уравнений воспользуемся схемой перехода от непрерывной к дискретной среде и обратно [8]. Для этого в области $\mathbb{D} = \{(x,y)\,|\, x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant y \leqslant L\}$ формально выберем сетку $\{x_q, y_r\}$: $x_q = q\, h_x$, $y_r = r\, h_y$, $q = 0, \pm1, \pm2, ...,$ $r = 0, 1, 2, ..., N$ $(h_y = L/N)$ и дискретизируем уравнение (1.1) по переменным x и y, заменяя частные производные функции с их конечно-разностными аппроксимациями. В результате получим бесконечную систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) для счетного числа случайных функций $U_{qr}(t)$ с белыми шумами $V_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ на входе (метод прямых)

$$\dot U_{qr} = -\left[\, c+\sigma_3 V_3(t) \,\right] U_{qr} - \left[\, u_1+\sigma_1 V_1(t) \,\right] \frac{U_{q+1,r} - U_{q-1,r}}{2\, h_x} - \left[\, u_2+\sigma_2 V_2(t) \,\right] \frac{U_{q,r+1} - U_{q,r-1}}{2\, h_y} + \nu_1 \frac{U_{q+1,r} - 2\, U_{qr} + U_{q-1,r}}{h_x^2} + \nu_2 \frac{U_{q,r+1} - 2\, U_{qr} + U_{q,r-1}}{h_y^2}. \tag{2.1}$$

Используя формулы Стратоновича [9], с учетом формулировки рассматриваемой проблемы и вида коэффициентов сноса и диффузии

$$a_{qr} = f_{qr} + \frac{1}{2} \sum_{i} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial g_{qrk}}{\partial u_{ij}}\, g_{ijk}, \quad (2.2)$$

$$b_{qrsp} = \sum_{k=1}^{3} g_{qrk}\, g_{spk}, \quad (2.3)$$

где

$$f_{qr} = -c\, u_{qr} - -u_1 \frac{u_{q+1,r} - u_{q-1,r}}{2\,h_x} - u_2 \frac{u_{q,r+1} - u_{q,r-1}}{2\,h_y} + + \nu_1 \frac{u_{q+1,r} - 2\,u_{qr} + u_{q-1,r}}{h_x^2} + + \nu_2 \frac{u_{q,r+1} - 2\,u_{qr} + u_{q,r-1}}{h_y^2},$$

$$g_{qr1} = -\sigma_1 \frac{u_{q+1,r} - u_{q-1,r}}{2\,h_x},$$

$$g_{qr2} = -\sigma_2 \frac{u_{q,r+1} - u_{q,r-1}}{2\,h_y}, \quad g_{qr3} = -\sigma_3\, u_{qr},$$

можно построить уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнение) для совместной плотности вероятности $p(\{u_{qr}\}, t)$ распределения случайных функций $U_{qr}(t)$ следующего вида:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{q,s} \sum_{r,p=1}^{N-1} \frac{\partial^2 \big(b_{qrsp}\, p \big)}{\partial u_{qr}\, \partial u_{sp}} - - \sum_{q} \sum_{r=1}^{N-1} \frac{\partial \big(a_{qr}\, p \big)}{\partial u_{qr}}, \quad (2.4)$$

$$p\,(\{u_{..}\}, 0) = p^{\,0}(\{u_{..}\}). \quad (2.5)$$

Заметим, что задавать начальную плотность $p^{\,0}(\{u_{..}\})$ в применяемой, как и в общей [8], схеме исследования нет необходимости, так как ФПК-уравнение используется только как промежуточный инструмент получения уравнений для моментов.

Для построения уравнений относительно математических ожиданий $m_{1qr}(t) = \langle U_{qr}(t) \rangle$ случайных функций $U_{qr}(t)$ воспользуемся аналогом формулы [9, с. 100]:

$$\dot m_{1qr} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} a_{qr}\, p(\{u_{..}\}, t)\, d\{u_{..}\} = - c\, m_{1qr} - u_1 \frac{m_{1,q+1,r} - m_{1,q-1,r}}{2\,h_x} - - u_2 \frac{m_{1,q,r+1} - m_{1,q,r-1}}{2\,h_y} + + \nu_1 \frac{m_{1,q+1,r} - 2\,m_{1qr} + m_{1,q-1,r}}{h_x^2} + + \nu_2 \frac{m_{1,q,r+1} - 2\,m_{1qr} + u_{1,q,r-1}}{h_y^2} + + \frac{1}{2} \Big(\sigma_1^2 \frac{m_{1,q+2,r} - 2\,m_{1qr} + m_{1,q-2,r}}{4\,h_x^2} + + \sigma_2^2 \frac{m_{1,q,r+2} - 2\,m_{1qr} + m_{1,q,r-2}}{4\,h_y^2} + + \sigma_3^2\, m_{1qr} \Big).$$

Переходя от дискретной схемы к непрерывной, получаем уравнение для математического ожидания поля $U(x, y, t)$:

$$\frac{\partial m_1(x,y,t)}{\partial t} = \lambda_0\, m_1(x,y,t) - - u_1 \frac{\partial m_1(x,y,t)}{\partial x} - u_2 \frac{\partial m_1(x,y,t)}{\partial y} + + \lambda_1 \frac{\partial^2 m_1(x,y,t)}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 m_1(x,y,t)}{\partial y^2}, \quad (2.6)$$

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_3^2}{2} - c,$$

$$\lambda_1 = \nu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}, \quad \lambda_2 = \nu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2},$$

$$m_1(x,y,0) = m_1^0(x,y), \quad (2.7)$$

$$m_1(-\infty, y, t) = m_1(+\infty, y, t) = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial m_1(x,0,t)}{\partial y} = \frac{\partial m_1(x,L,t)}{\partial y} = 0. \quad (2.9)$$

Для вывода уравнения для начальных смешанных моментов

$$m_{2qrsp}(t) = \langle U_{qr}(t)\, U_{sp}(t) \rangle$$

применим аналог формулы [9, стр. 100]:

$$\dot m_{2qrsp} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} (a_{qr}\, u_{sp} + a_{sp}\, u_{qr} + + b_{qrsp})\, p(\{u_{..}\}, t)\, d\{u_{..}\} = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = -c\, m_{2qrsp} - u_1 \frac{m_{2,q+1,rsp} - m_{2,q-1,rsp}}{2\,h_{x1}} -$$

$$- u_2 \frac{m_{2q,r+1,sp} - m_{2q,r-1,sp}}{2\, h_{y1}} + \\ + \nu_1 \frac{m_{2,q+1,rsp} - 2\, m_{2qrsp} + m_{2,q-1,rsp}}{h_{x1}^2} + \\ + \nu_2 \frac{m_{2q,r+1,sp} - 2\, m_{2qrsp} + u_{2q,r-1,sp}}{h_{y1}^2} + \\ + \frac{1}{2}\Big(\sigma_1^2\, \frac{m_{2,q+2,rsp} - 2\, m_{2qrsp} + m_{2,q-2,rsp}}{4\, h_{x1}^2} + \\ + \sigma_2^2\, \frac{m_{2q,r+2,sp} - 2\, m_{2qrsp} + m_{2q,r-2,sp}}{4\, h_{y1}^2} + \\ + \sigma_3^2\, m_{2qrsp}\Big),$$

$$I_2 = -c\, m_{2qrsp} - \\ - u_1\, \frac{m_{2qr,s+1,p} - m_{2qr,s-1,p}}{2\, h_{x2}} - \\ - u_2\, \frac{m_{2qrs,p+1} - m_{2qrs,p-1}}{2\, h_{y2}} + \\ + \nu_1 \frac{m_{2qr,s+1,p} - 2\, m_{2qrsp} + m_{qr,s-1,p}}{h_{x2}^2} + \\ + \nu_2 \frac{m_{2qrs,p+1} - 2\, m_{2qrsp} + u_{2qrs,p-1}}{h_{y2}^2} + \\ + \frac{1}{2}\Big(\sigma_1^2\, \frac{m_{2qr,s+2,p} - 2\, m_{2qrsp} + m_{2qr,s-2,p}}{4\, h_{x2}^2} + \\ + \sigma_2^2\, \frac{m_{2qrs,p+2} - 2\, m_{2qrsp} + m_{2qrs,p-2}}{4\, h_{y2}^2} + \\ + \sigma_3^2\, m_{2qrsp}\Big),$$

$$I_3 = \\ = \sigma_1^2\, \mathcal{E}\Big[\, \frac{U_{q+1,r} - U_{q-1,r}}{2\, h_{x1}}\, \frac{U_{s+1,p} - U_{s-1,p}}{2\, h_{x2}}\, \Big] + \\ + \sigma_2^2\, \mathcal{E}\Big[\, \frac{U_{q,r+1} - U_{q,r-1}}{2\, h_{y1}}\, \frac{U_{s,p+1} - U_{s,p-1}}{2\, h_{y2}}\, \Big] + \\ + \sigma_3^2\, m_{2qrsp}.$$

Тогда уравнение для непрерывной среды будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} = \mu\, m_2 - \\ - u_1\Big(\frac{\partial m_2}{\partial x_1} + \frac{\partial m_2}{\partial x_2}\Big) - u_2\Big(\frac{\partial m_2}{\partial y_1} + \frac{\partial m_2}{\partial y_2}\Big) + \\ + \sigma_1^2\, \frac{\partial^2 m_2}{\partial x_1\, \partial x_2} + \sigma_2^2\, \frac{\partial^2 m_2}{\partial y_1\, \partial y_2} + \\ + \lambda_1\, \Big(\frac{\partial^2 m_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 m_2}{\partial x_2^2}\Big) + \\ + \lambda_2\, \Big(\frac{\partial^2 m_2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 m_2}{\partial y_2^2}\Big), \quad (2.10)$$

где $\mu = 2\left(\sigma_3^2 - c\right)$, а начальное и краевые условия примут форму

$$m_2(x_1, y_1, x_2, y_2, 0) = \\ = m_2^0(x_1, y_1, x_2, y_2), \quad (2.11)$$

$$m_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t)\Big|_{x_1=\pm\infty} = \\ = m_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t)\Big|_{x_2=\pm\infty} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial m_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t)}{\partial y_1}\Big|_{y_1=0,L} = \\ = \frac{\partial m_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t)}{\partial y_2}\Big|_{y_2=0,L} = 0. \quad (2.13)$$

Полученные уравнения (2.6)–(2.13) представляют собой замкнутую систему детерминированных уравнений в частных производных относительно математического ожидания и второго начального смешанного момента случайного поля концентрации загрязнения.

3. Решение уравнений

Заметим, что линейные дифференциальные уравнения в частных производных (2.6) и (2.10) для первого и второго моментов разделились, имеют постоянные коэффициенты и, по крайней мере в частных случаях, могут быть решены точно.

Рассмотрим далее такой частный случай, а именно, предположим, что $u_2 = \sigma_2 = 0$. Этот случай соответствует отсутствию наблюдаемого течения в реке в поперечном направлении. При $u_2 = \sigma_2 = 0$ ($\lambda_2 = \nu_2$) уравнение (2.6) примет следующую форму:

$$\frac{\partial m_1(x, y, t)}{\partial t} = \\ = \lambda_0\, m_1(x, y, t) - u_1\, \frac{\partial m_1(x, y, t)}{\partial x} + \\ + \lambda_1\, \frac{\partial^2 m_1(x, y, t)}{\partial x^2} + \lambda_2\, \frac{\partial^2 m_1(x, y, t)}{\partial y^2}. \quad (3.1)$$

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде

$$m_1(x, y, t) = \frac{a_0(x, t)}{2} +$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x,t)\,\cos\frac{\pi k\,y}{L}. \quad (3.2)$$

Для определения функций a_0, a_1, a_2, ... подставим ряд (3.2) в указанное уравнение и приравняем коэффициенты при косинусах с одинаковыми аргументами, что позволяет записать следующие уравнения для искомых коэффициентов:

$$\frac{\partial a_0(x,t)}{\partial t} = \lambda_0\, a_0(x,t) - u_1\,\frac{\partial a_0(x,t)}{\partial x} + \lambda_1\,\frac{\partial^2 a_0(x,t)}{\partial x^2}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial a_k(x,t)}{\partial t} = \lambda_0\, a_k(x,t) - u_1\,\frac{\partial a_k(x,t)}{\partial x} + \lambda_1\,\frac{\partial^2 a_k(x,t)}{\partial x^2} - \lambda_2\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 a_k(x,t), \quad k=1,2,\ldots \quad (3.4)$$

Решение (3.3) имеет вид

$$a_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_1(x,t;z)\,\varphi_{10}(z)\,dz, \quad (3.5)$$

где

$$\mathcal{H}_1(x,t;z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\,c_3\,t}}\,\exp\left[c_1\,t - \frac{(x-z-c_2 t)^2}{4\,\pi\,c_3\,t}\right],$$

$$\varphi_{10}(z) = \frac{2}{L}\int\limits_0^L m_1^0(z,y)\,dy,$$

$$c_1=\lambda_0, \qquad c_2=u_1, \qquad c_3=\lambda_1.$$

Подобным образом можно получить и решения уравнений (3.4):

$$a_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_1(x,t;z)\,\varphi_{1k}(z)\,dz, \quad (3.6)$$

где

$$\varphi_{1k}(z) = \frac{2}{L}\int\limits_0^L m_1^0(z,y)\,\cos\frac{\pi\,k\,y}{L}\,dy,$$

$$c_1=\lambda_0-\lambda_2\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2, \quad c_2=u_1, \quad c_3=\lambda_1.$$

Обратимся теперь к уравнению (2.10). С учетом $u_2=\sigma_2=0$ это уравнение будет иметь следующую форму:

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} = \mu\, m_2 - u_1\left(\frac{\partial m_2}{\partial x_1}+\frac{\partial m_2}{\partial x_2}\right) + \sigma_1^2\,\frac{\partial^2 m_2}{\partial x_1\,\partial x_2} + \lambda_1\left(\frac{\partial^2 m_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 m_2}{\partial x_2^2}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial^2 m_2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 m_2}{\partial y_2^2}\right). \quad (3.7)$$

Решение этого уравнения с условиями (2.11)–(2.13) будем искать в виде

$$m_2(x_1,y_1,x_2,y_2,t) = \frac{a_{00}(x_1,x_2,t)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} a_{10k}(x_1,x_2,t)\,\cos\frac{\pi k\,y_1}{L} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{+\infty} a_{01s}(x_1,x_2,t)\,\cos\frac{\pi s\,y_2}{L} + \sum_{k,s=1}^{+\infty} a_{11ks}(x_1,x_2,t)\,\cos\frac{\pi k\,y_1}{L}\,\cos\frac{\pi s\,y_2}{L}. \quad (3.8)$$

Для того чтобы найти коэффициенты a_{00}, a_{10k}, a_{01s}, a_{11ks}, подставим правую часть равенства (3.8) в уравнение (3.7) и приравняем коэффициенты при косинусах с одинаковыми аргументами, что ведет к следующим уравнениям для искомых коэффициентов ($k,s=1,2,\ldots$):

$$\frac{\partial a_{00}}{\partial t} = \mu\, a_{00} - u_1\left(\frac{\partial a_{00}}{\partial x_1}+\frac{\partial a_{00}}{\partial x_2}\right) + \sigma_1^2\,\frac{\partial^2 a_{00}}{\partial x_1\,\partial x_2} + \lambda_1\left(\frac{\partial^2 a_{00}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 a_{00}}{\partial x_2^2}\right), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial a_{10k}}{\partial t} = \mu\, a_{10k} - u_1\left(\frac{\partial a_{10k}}{\partial x_1}+\frac{\partial a_{10k}}{\partial x_2}\right) + \sigma_1^2\,\frac{\partial^2 a_{10k}}{\partial x_1\,\partial x_2} + \lambda_1\left(\frac{\partial^2 a_{10k}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 a_{10k}}{\partial x_2^2}\right) - \lambda_2\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 a_{10k}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial a_{01s}}{\partial t} = \mu\, a_{01k} - u_1\left(\frac{\partial a_{01s}}{\partial x_1}+\frac{\partial a_{01s}}{\partial x_2}\right) + \sigma_1^2\,\frac{\partial^2 a_{01s}}{\partial x_1\,\partial x_2} + \lambda_1\left(\frac{\partial^2 a_{01s}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 a_{01s}}{\partial x_2^2}\right) - \lambda_2\left(\frac{\pi s}{L}\right)^2 a_{01s}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial a_{11ks}}{\partial t} = \mu\, a_{11ks} - u_1 \Big(\frac{\partial a_{11ks}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{11ks}}{\partial x_2} \Big) + \\ + \sigma_1^2\, \frac{\partial^2 a_{11ks}}{\partial x_1\, \partial x_2} + \\ + \lambda_1 \Big(\frac{\partial^2 a_{11ks}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_{11ks}}{\partial x_2^2} \Big) - \\ - \lambda_2 \Big(\frac{\pi}{L} \Big)^2 \big(k^2 + s^2 \big)\, a_{11ks}. \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.9) имеет вид

$$a_{00} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_2(x_1, x_2, t; z_1, z_2) \times \\ \times \varphi_{200}(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2, \quad (3.13)$$

где

$$\mathcal{H}_2(x_1, x_2, t; z_1, z_2) = \\ = \frac{1}{2\,\pi\, t\, \sqrt{|K|}}\, \exp \Big(c_1\, t - \frac{1}{2}\, \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}\, K^{-1}\, \bar{\boldsymbol{x}} \Big),$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \{x_1 - z_1 - c_2\, t, x_2 - z_2 - c_2\, t\}^{\mathsf{T}},$$

$$K = \begin{bmatrix} 2\, c_4 & c_3 \\ c_3 & 2\, c_4 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{200}(z_1, z_2) = \\ = \frac{4}{L^2} \int\limits_0^L \int\limits_0^L m_2^0(z_1, y_1, z_2, y_2)\, dy_1\, dy_2,$$

$$c_1 = \mu, \quad c_2 = u_1, \quad c_3 = \sigma_1^2, \quad c_4 = \lambda_1,$$

где T – символ транспонирования.

Используя то же ядро $\mathcal{H}_2(x_1, x_2, t; z_1, z_2)$, можно получить и решения уравнений (3.10)–(3.12):

$$a_{10k} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_2(x_1, x_2, t; z_1, z_2) \times \\ \times \varphi_{210k}(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2, \quad (3.14)$$

$$a_{01s} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_2(x_1, x_2, t; z_1, z_2) \times \\ \times \varphi_{201s}(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2, \quad (3.15)$$

$$a_{11ks} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_2(x_1, x_2, t; z_1, z_2) \times \\ \times \varphi_{211ks}(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2, \quad (3.16)$$

где

$$\varphi_{210k}(z_1, z_2) = \\ = \frac{4}{L^2} \int\limits_0^L \int\limits_0^L m_2^0(z_1, y_1, z_2, y_2) \times \\ \times \cos \frac{\pi k\, y_1}{L}\, dy_1\, dy_2,$$

$$\varphi_{201s}(z_1, z_2) = \\ = \frac{4}{L^2} \int\limits_0^L \int\limits_0^L m_2^0(z_1, y_1, z_2, y_2) \times \\ \times \cos \frac{\pi s\, y_2}{L}\, dy_1\, dy_2,$$

$$\varphi_{211ks}(z_1, z_2) = \\ = \frac{4}{L^2} \int\limits_0^L \int\limits_0^L m_2^0(z_1, y_1, z_2, y_2) \times \\ \times \cos \frac{\pi k\, y_1}{L}\, \cos \frac{\pi s\, y_2}{L}\, dy_1\, dy_2,$$

причем для a_{10k}, a_{01k}, a_{11k} константы c_2, c_3, c_4 те же, что и для a_{00}, а c_1 равна соответственно

$$\mu - \lambda_2 \Big(\frac{\pi k}{L} \Big)^2, \quad \mu - \lambda_2 \Big(\frac{\pi s}{L} \Big)^2,$$

$$\mu - \lambda_2 \Big(\frac{\pi}{L} \Big)^2 \big(k^2 + s^2 \big).$$

Итак, решение поставленной задачи получено в терминах соотношений (3.2), (3.5), (3.2), (3.8), (3.13)–(3.16).

Заключение

В работе сначала построены, а затем в приближенно аналитической форме получены решения уравнений для первого и второго моментов случайного поля загрязнения, распространяющегося по течению реки. Схема решения основана на применении функций Грина и разложений в ряды Фурье по косинусам.

Список литературы

1. *Марчук Г.И.* Математические моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
2. *Знаменский В.А.* Гидрологические процессы и их роль в формировании качества воды. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 248 с.
3. *Гринвальд Д.И.* Турбулентность русловых потоков. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 167 с.
4. *Картвешвили Н.А.* Стохастическая гидрология. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 163 с.
5. *Гиляров Н.П.* Моделирование речных потоков. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 200 с.
6. *Найденов В.И., Крутова Н.М.* Исследование многолетних колебаний уровня Каспийского моря на основе теории стохастических дифференциальных уравнений // Водные ресурсы. 2002. Т. 29, № 3. С. 299–310.
7. *Найденов В.И., Швейкина В.И.* Нелинейные модели колебаний речного стока // Водные ресурсы. 2002. Т. 29, № 1. С. 62–67.
8. *Полосков И.Е.* Об одном подходе к анализу случайных процессов в распределенных системах // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 4. С. 85–100.
9. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособие. Ижевск: РХД, 2005. 296 с.

Stochastic two-dimensional model of the distribution of river pollution

I. E. Poloskov
Perm State University, 614990, Perm, Bukirev st., 15
polosk@psu.ru; (342) 239 65 60

In this paper, we consider the two-dimensional stochastic model of transport pollution along a river including random pulsations and non-random means of longitudinal and transverse velocities of a water flow, coefficients of longitudinal and transverse diffusion and the conservativeness of the substance. The equations for the first moments of fields were obtained and solved in an approximate analytical form for a particular case.

Keywords: *ecology*; *modeling*; *stochastic system*; *partial differential equation*; *approximate analytical solution*; *moment functions.*