УДК 517.983.53

Предельно ненасыщенные σ-подалгебры, антииинъективные отображения и диффузность

П. М. Симонов[1], А. В. Чистяков[2] (1955–2013)
[1]Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
simpm@mail.ru; 8(3422)2396849
[2]Удмуртский государственный университет
Россия, 426034, Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4)

Доказана теорема о том, что для оператора подстановки, удовлетворяющего условию "независания", восемь утверждений эквивалентны.

Ключевые слова: *оператор подстановки; порядково непрерывный гомоморфиз; отображение антиинъективно; отображение антисюръективно; диффузный оператор; атомарный оператор; N-условие Лузина.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-4-20-24

Функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) все чаще используются в различных областях естествознания и техники для описания реальных явлений и процессов с учетом их предыстории.

При изучении свойств достаточно сложных ФДУ приходится исходить из свойств операторов, входящих в рассматриваемое уравнение. К числу таких операторов относятся и операторы вида

$$(Tf)(\omega) := f(\alpha(\omega)). \qquad (1)$$

Одна из причин интереса к этому оператору кроется также в том, что оператор T возникает не только в теории ФДУ. Наличие такого оператора существенно используется при изучении сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, в эргодической теории, в теории функциональных уравнений и т.д.

Ниже дается одна теорема, дополняющие утверждения из обзора [1, с. 18, 19].

Пусть $(\Xi, \mathcal{F}, \nu)$ и (Ω, Σ, μ) – стандартные измеримые пространства (пространства Лебега) с неатомарными (диффузными) мерами [6] ν и μ.

Тогда измеримое отображение $\alpha : \Omega \to \Xi$, удовлетворяющее условию "независания":

$$B \in \mathcal{F},\ \nu(B) = 0 \Rightarrow \mu(\alpha^{-1}(B)) = 0, \quad (N^{-1})$$

порождает по формуле (оператор подстановки [1, с. 18])

$$(Tf)(\omega) := f(\alpha(\omega))$$

(для каждого $f \in L^\infty(\Omega)$ при $\mu-$ п.в. $\omega \in \Omega$) порядково непрерывный [1, с. 13] гомоморфизм T банаховых алгебр $L^\infty(\Xi) := L^\infty(\Xi, \mathcal{F}, \nu)$ и $L^\infty(\Omega) := L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Ввиду порядковой непрерывности оператора $T : L^\infty(\Xi) \to L^\infty(\Omega)$, следующей из условия (N^{-1}), имеется оператор $T' : L^1(\Omega) \to L^1(\Xi)$, дуальный к оператору T относительно естественной двойственности $\sigma(L^1, L^\infty)$. При этом ясно, что T' – банаховый предвойственный оператор к оператору T, т.е. $T'^* = T$.

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

---

*Работа выполнена при поддержке АО "ПРОГНОЗ".

1) отображение $\alpha:\Omega\to\Xi$ **антиинъективно** [6, 4, 5]: если $A\in\Sigma$ и $\alpha_A:A\to\Xi$ – инъекция, то $\mu(A)=0$;

2) σ-подалгебра $\Sigma_\alpha:=\alpha^{-1}(\mathcal{F})$ **не имеет насыщенных компонент** [3]: для любого множества $A\in\Sigma$ с $\mu(A)>0$ существует множество $B\in\Sigma\cap A$ такое, что $\mu(B\Delta C)>0$ для всех множеств $C\in\Sigma_\alpha$ положительной меры;

3) существует неатомарная (диффузная) σ-подалгебра $\Sigma_1\subset\Sigma$ такая, что σ-подалгебры Σ_α и Σ_1 **независимы**: если $A\in\Sigma_\alpha$ и $B\in\Sigma_1$, то $\mu(A\cap B)=\mu(A)\mu(B)$;

4) **оператор условного математического ожидания (у.м.о.)** [1, с. 21] $E(\cdot\,|\,\Sigma_\alpha):L^1(\Omega)\to L^1(\Omega)$ на σ-подалгебру Σ_α является является **диффузным** [7], т.е. имеет представление

$$E(f\,|\,\Sigma_\alpha)(\omega)=\int_\Omega f(\eta)\mu_\omega(d\eta)$$

для каждой $f\in L^1(\Omega)$ при μ-п.в. $\omega\in\Omega$, где $\{\mu_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ – неатомарная (диффузная) случайная борелевская мера;

5) оператор $T':L^1(\Omega)\to L^1(\Xi)$, дуальный к оператору $T:L^\infty(\Xi)\to L^\infty(\Omega)$, **является диффузным**;

6) оператор подстановки $T:L^\infty(\Xi)\to L^\infty(\Omega)$, обладает свойством: $TS\wedge I=0$ для всех положительных линейных порядково непрерывных операторов $S:L^\infty(\Omega)\to L^\infty(\Xi)$;

7) оператор $T:L^\infty(\Xi)\to L^\infty(\Omega)$ **антисюръективен** [4, 5]: для любого $A\in\Sigma$ с $\mu(A)>0$ оператор $1_A T:L^\infty(\Xi)\to L^\infty(A)$ не сюръективен;

8) отображение $\alpha:\Omega\to\Xi$ обладает свойством: для любого $A\in\Sigma$ с $\mu(A)>0$ для ν-почти всех $\xi\in\Xi$ множество $\alpha^{-1}(\xi)\cap A$ либо несчетно, либо пусто.

Доказательство проведем по такой схеме: $1)\Leftrightarrow 2)$; $2)\Rightarrow 3)$; …; $5)\Rightarrow 6)$; $6)\Rightarrow 2)$; $5)\Rightarrow 7)$; $5)\Rightarrow 8)$; $7)\Rightarrow 6)$; $8)\Rightarrow 5)$.

Эквивалентность $1)\Leftrightarrow 2)$ – это утверждение леммы 2.1 из [6]. Импликация $2)\Rightarrow 3)$ также фактически имеется в статье Н. Колтона из [6] (восходит к работам Д. Магарам начала 40–50-х гг. прошлого века [1, с. 22]). Действительно, в лемме 2.1 из [6] утверждается, что отображение $\alpha:\Omega\to\Xi$ обладает свойством 2) тогда и только тогда, когда оно антиинъективно. Согласно предложению 2.2 из [6], если α антиинъективно, то существует польское пространство (K,S,λ) с диффузной вероятностной мерой λ и (S,Σ)-измеримое отображение $\tau:\Omega\to K$ такие, что

$$\mu(\alpha^{-1}(C)\cap\tau^{-1}(D))=\mu(\alpha^{-1}(C))\lambda(D)=$$
$$=\mu(\alpha^{-1}(C))\mu(\tau^{-1}(D))$$

для всех $C\in\Sigma$ и $D\in S$. Поэтому σ-подалгебры $\Sigma_1:=\Sigma_\tau$ и Σ_α независимы.

$3)\Rightarrow 4)$. Представим оператор у.м.о. $P:=E(\cdot\,|\,\Sigma_\alpha):L^1(\Omega)\to L^1(\Omega)$ в виде $P=P_a+P_d$, где $P=P_a$ и P_d – соответственно, атомарная и диффузная компоненты оператора P. Так как оператор P положителен, то обе его дизъюнктные компоненты также положительны.

Пусть выполнено условие 3): существует диффузная σ-подалгебра $\Sigma_1\subset\Sigma$, независимая от Σ_α. Тогда оператор $P_1:=E(\cdot\,|\,\Sigma_\alpha)_{|L^1(\Sigma_1)}$ переводит пространство $L^1(\Sigma_1)$ в одномерное подпространство, состоящее из функций-констант. Поэтому P_1 является интегральным оператором. Из неравенства $0\le P_a\le P$ следует:

$$0\le P_{a|L^1(\Sigma_1)}\le P_{|L^1(\Sigma_1)}=P_1.$$

Таким образом, сужение атомарного оператора P_a на безатомную решетку $L^1(\Omega,\Sigma_1,\mu)$ мажорируется интегральным оператором P_1. Согласно результатам из [7] это возможно лишь в случае, если $P_{a|L^1(\Sigma_1)}=0$. Но тогда $P_a 1_\Omega=P_{a|L^1(\Sigma_1)}1_\Omega=0$. Поскольку элемент 1_Ω является (слабой) порядковой единицей решетки $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$, то $P_a=0$ и, следовательно, $P=P_d$.

$4)\Rightarrow 5)$. Оператор у.м.о. $P:=E(\cdot\,|\,\Sigma_\alpha)$ действует во всей шкале $L^p:=L^p(\Omega,\Sigma,\mu)$, $p\in[1,\infty]$, пространств Лебега, причем дуальным к оператору $P_p := P_{|L^p} : L^p \to L^p$ является оператор $P_{p'}$.

Здесь p' – сопряженный с p показатель: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, если $p < \infty$ и $p' = 1$, если $p = \infty$. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно представить оператор P_p в виде $P_p = i_p (i_{p'})'$, где $i_p : L^p(\Sigma_\alpha) \to L^p$ – оператор тождественного вложения. Из этого представления следует:

$$(P_p)' = [i_p (i_{p'})']' = i_{p'} (i_p)' = P_{p'} .$$

Так как оператор $T : L^\infty(\Xi) \to L^\infty(\Omega)$ отображает пространство $L^\infty(\Xi)$ на пространство $L^\infty(\Sigma_\alpha)$ Σ_α-измеримых элементов из L^p, то $P_\infty T = T$. Следовательно,

$$T' = T'(P_\infty)' = T'P_1. \qquad (*)$$

Пусть выполнено условие 4): оператор $P_1 : L^1 \to L^1$ имеет диффузное представление. Из следствия 2 статьи [7] следует, что пространство $\mathcal{L}_d(L^1)$ всех диффузных операторов $V : L^1 \to L^1$ является левым операторным идеалом в категории L_n порядково непрерывных линейных операторов в банаховых идеальных пространствах $E(T, S, \lambda)$ на стандартных пространствах с мерой (T, S, λ): если $V \in \mathcal{L}_d(E_1, E_2)$ и $U \in L_n(E_2, E_3)$, то $UV \in \mathcal{L}_d(E_1, E_3)$.

Поэтому оператор $T' : L^1(\Omega) \to L^1(\Xi)$, как ясно из (*), имеет диффузное представление.

$5) \Rightarrow 6)$. Пусть $S : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Xi)$ – положительный порядково непрерывный оператор. Тогда существует дуальный оператор $S' : L^1(\Xi) \to L^1(\Omega)$, который также положителен. Так как $T' \in \mathcal{L}_d(L^1(\Omega), L^1(\Xi))$ и $\mathcal{L}_d$ – левый операторный идеал, то оператор $(TS)'$ ввиду равенства $(TS)' = S'T'$ имеет диффузное представление. Полоса $\mathcal{L}_d$ решетки $L_n(L^1)$ дизъюнктна полосе $\{I\}^{dd}$, порожденной тождественным оператором $I : \Omega \to \Omega$. Поэтому $(TS)' \wedge I = 0$. Отсюда получаем

$$(TS) \wedge I = [((TS) \wedge I))']' \le$$
$$\le [(TS)' \wedge I']' = [0]' = 0.$$

$6) \Rightarrow 2)$. Предположим, что отображение $T : L^\infty(\Xi) \to L^\infty(\Omega)$ не является антиинъективным. Тогда согласно 2) найдется множество $A \in \Sigma$ положительной меры, обладающее свойством: если $B \in \Sigma$ и $B \subset A$, то существует множество $C \in \Sigma_\alpha$ такое, что $\mu(B \Delta C) = 0$.

Это значит, что образ $\operatorname{im} T_1 := T_1(L^\infty(\Xi))$ оператора $T_1 := 1_A T : L^\infty(\Xi) \to L^\infty(A, \Sigma \cap A, \mu)$ содержит фундаментальное в $L^\infty(A)$ множество $\{\chi_B : B \in \Sigma, B \subset A\}$. Следовательно, пространство $\operatorname{im} T_1$ плотно (по норме) в пространстве $L^\infty(A)$.

Далее заметим, что если $g \in L^\infty(\Xi)$ и $T_1 g = 0$, то $|T_1 g| = T_1 |g| = 0$. Поэтому ядро $\ker T_1 := T_1^{-1}\{0\}$ оператора T_1 – порядковый идеал решетки $L^\infty(\Xi)$. Ввиду порядковой непрерывности оператора T_1 идеал $\ker T_1$ замкнут относительно порядковой сходимости, т.е. является порядковой полосой. Множество полос K-пространства $L^\infty(\Xi)$ находится в естественном и взаимно однозначном (по модулю идеала $\mathcal{F}_0$ множеств меры нуль) соответствии с элементами σ-алгебры $\mathcal{F}$. В частности, для полосы $\ker T_1$ можно найти такое множество $D_1 \in \mathcal{F}$, что $\ker T_1 = L^\infty(D_1)$.

Определим оператор $\hat{T} : L^\infty(D) \to L^\infty(A)$, где $D := \Omega \setminus D_1$, равенством $\hat{T} := T_1 1_D$ $(= 1_A T 1_D)$. Имеем: $\ker \hat{T} \doteq \ker T_1 \cap L^\infty(D) = \{0\}$ и $\operatorname{im} \hat{T} = \operatorname{im} T_1$. Покажем, что оператор $\hat{T}$ обратим.

Пусть $g \in L^\infty(D)$ – конечнозначная функция: $g = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{C_k}$ (предполагается, что $c_k \in \alpha^{-1}(C_k)$, $c_k \ne c_l$ и $C_k \cap C_l = \varnothing$ при $k \ne l$). Тогда $\hat{T} g = \sum c_k h_k$, где $h_k := \hat{T} \chi_{C_k} = \chi_{A \cap \alpha^{-1}(C_k)}$, причем $h_k \ne 0$. Отсюда, учитывая, что $\alpha^{-1}(C_k) \cap \alpha^{-1}(C_l) = 0$ при $k \ne l$, получим:

$$\|\hat{T}g\|_{L^\infty(A)} = \sup_k |c_k| = \|g\|_{L^\infty(D)}.$$

Множество конечнозначных функций плотно в $L^\infty(A)$. Поэтому из проведенного выше рассуждения следует, что оператор $\hat{T}$ есть изометрия с плотной областью значений $\operatorname{im}\hat{T}$. Такая ситуация возможна лишь в случае, если оператор $\hat{T}$ обратим.

При естественном отождествлении $(L^1)^* = L^\infty$ оператор $\hat{T}$ банахово сопряжен к дуальному оператору $\hat{T}' : L^1(A) \to L^1(D)$. Следовательно, обратимость оператора $\hat{T}$ влечет за собой $*$-слабо сопряженного оператора $\hat{T}'$. Распространив оператор $\hat{S} = \hat{T}'^{-1} : L^1(D) \to L^1(A) \subset L^1(\Omega)$ по формуле

$$Sg = \hat{S}\chi_D g, \qquad (g \in L^1(\Xi)),$$

на пространство $L^1(\Xi)$ получаем:

$$ST'1_A = \hat{S}\hat{T}'1_A = 1_A.$$

Отсюда $1_A TS' = (T'1_A)' = (1_A)' = 1_A$.

Таким образом, $((TS') \wedge I) \geq 1_A \neq 0$.

Но это противоречит утверждению 6).

Итак, отрицание утверждения 2) не совместимо с утверждением 6).

$5) \Rightarrow 7)$. Предположим, что найдется множество $A \in \Sigma$ с $\mu(A) > 0$ такое, что оператор $1_A T : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(A)$ сюръективен. Без ограничения общности можно считать, что $A = \Omega$, т.е. сам оператор T сюръективен. Но тогда, как следует из пункта 9) основной теоремы из статьи [3], оператор T' обязан быть атомарным, что противоречит 5).

$5) \Rightarrow 8)$. Предположим что свойство 8) не выполнено. Тогда найдется множество $A \in \Sigma$ с $\mu(A) > 0$ такое, что $\nu(B) > 0$, где $B_{\alpha^{-1}(\xi)} := \{\alpha^{-1}(\xi) \cap B : \xi \in \Xi\}$ – непустое не более чем счетное множество. Согласно пункту 1) основной теоремы из статьи [3], оператор $S := 1_{B_{\alpha^{-1}(\xi)}} T' 1_A$ – осколок [1, с. 12] диффузного оператора T' – является ненулевым атомарным оператором, что противоречит 5).

$7) \Rightarrow 6)$. Предположим, что не выполнено условие 6): найдется порядково непрерывный оператор $S : L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Xi)$ такой, что $M := (TS) \wedge I \neq 0$.

Полоса $\{I\}^{dd}$ состоит из операторов умножения. Поэтому оператор M является оператором умножения на ненулевую функцию $a \in L^\infty(\Omega)$: $(Mf)(\omega) = a(\omega) f(\omega)$ для каждой $f \in L^\infty(\Omega)$ при почти всех $\omega \in \Omega$. Так как $a \neq 0$, то при некотором $c > 0$ множество $A := \{\omega \in \Omega : c < |a(\omega)| < c^{-1}\}$ имеет ненулевую меру. Но тогда $\operatorname{im} T$ содержит подрешетку $L^\infty(A)$, что невозможно ввиду 7).

$8) \Rightarrow 5)$. Предположим, что 5) не выполнено; оператор T' не является диффузным. Это означает, что в разложении Лебега [7, следствие 1] $T' = T'_a + T'_d$ атомарная компонента T'_a не равна нулю. По двойственности имеем представление оператора $T = T'^*$ в виде дизъюнктной суммы $T = T_1 + T_2$, где $T_1 := (T'_a)^*$ и $T_2 := (T'_d)^*$, причем $T_1 \neq 0$ по предположению. Как уже не раз отмечалось, любой осколок оператора T есть произведение на характеристическую функцию некоторого измеримого множества. В частности, для T_1 найдется единственное $(\mathrm{mod}\,\mu)$ множество $A \in \Sigma$ с $\mu(A) > 0$ такое, что $T_1 = 1_A T$. Согласно пункту 1) основной теоремы из статьи [3], ввиду атомарности оператора $T_1' : L^1(A) \to L^1(\Xi)$ для ν-почти всех $\xi \in \Xi$ множество $\alpha^{-1}(\xi) \cap A$ не пусто и не более чем счетно. Но это противоречит 8).

Предложение 1. Существует измеримое разбиение $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$, $\Omega = \Omega^1 \cap \Omega^2 = \varnothing$ такое, что:

a) сужение $\alpha_1 := \alpha_{|\Omega^1} : \Omega^1 \to \Xi$ локально инъективно и удовлетворяет *N*-условию Лузина [2, с. 58];

b) сужение $\alpha_2 := \alpha_{|\Omega^2} : \Omega^2 \to \Xi$ антиинъективно (и потому не удовлетворяет *N*-условию Лузина).

Доказательство. Представим оператор T' в виде $T' = T'_a + T'_d$. Для компоненты $T_1 := (T')^*$ найдется измеримое множество $A \in \Sigma$ такое, что $T_1 = 1_A T$. Согласно основной теореме из статьи [3], поскольку $T_1' : L^1(A) \to L^1(\Xi)$ – атомарный оператор, то существует подмножество $\Omega^1 \subset A$ такое, что,

$\mu(A \setminus \Omega^1) = 0$, отображение $\alpha_1 := \alpha_{|\Omega_1}$ локально инъективно и удовлетворяет *N*-условию.

Положим $\Omega^2 = \Omega \setminus \Omega^1$. Так как оператор $1'_{|\Omega^2} = T'_d$ диффузен, то согласно основной теореме из данной статьи, отображение $\alpha_2 := \alpha_{|\Omega_2}$ антиинъективно.

Предложение 2. Существует измеримое разбиение $\Xi = \Xi^0 \cup \Xi^1 \cup \Xi^2$, $\Xi^i \cap \Xi^j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j \in \{0,1,2\}$ такое, что:

a) $\mu(\alpha^{-1}(\Xi^0)) = 0$;

b) $\Xi^{[k]} := \{\xi \in \Xi^1 : |\alpha^{-1}(\xi)| = k\}$

измеримо при всех $k = 1,2,\dots$;

c) $\alpha^{-1}(\xi)$ несчетно для всех $\xi \in \Xi^2$.

Доказательство. В обозначениях основной теоремы из статьи [3] положим $\Xi_i = \alpha(\Omega_i)$, $i = 1,\dots,N$, и $\Xi^1 = \cup_1^N \Xi_i$. Положим $\Xi^{[k]} := \cup_{|I|=k}(\cap_{i\in I}\Xi_i)$.

В теореме доказано, например, что эквивалентны следующие утверждения: отображения $\alpha : \Omega \to \Xi$ антиинъективно, σ-подалгебра $\Sigma_\alpha := \alpha^{-1}(\mathcal{F})$ не имеет насыщенных компонент, оператор у.м.о. является диффузным оператором, оператор T антисюръективен, оператор T' является диффузным.

В теореме из статьи [3] доказано, например, что эквивалентны следующие утверждения: T локально сюръективен, T' атомарен, отображения $\alpha : \Omega \to \Xi$ локально инъективно и удовлетворяет *N*-условию, оператор T' локально непрерывен по мере, оператор у.м.о. тоже локально непрерывен по мере.

Список литературы

1. *Бухвалов А.В.* Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Математический анализ. Т. 26. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 3–63.
2. *Макаров Б.М, Подкорытов А.Н.* Лекции по вещественному анализу: учебник. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 668.
3. *Симонов П.М., Чистяков А.В.* Локально насыщенные σ-подалгебры, локально инъективные отображения и *N*-условие Лузина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 4(35). С. 11–19.
4. *Чистяков А.В.* Об ограниченных решениях стохастических систем Ито // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 3(29). С. 109–121.
5. *Чистяков А.В.* Сильная необратимость операторов сдвига вдоль траекторий броуновского движения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 7(33). С. 84–89.
6. *Kalton N.J.* Isomorphisms between L_p-function spaces when $p < 1$ // J. of Funct. Anal. 1981. Vol. 42, № 3. P. 299–337.
7. *Weis L.W.* Decomposition of positive operators and some of their applications // Funct. Anal.: Surv. and Recent Results III: Proc. 3rd Conf. Amsterdam e.a.: Elsevier Science Publishers B.V., 1984. P. 95–115.

Ultimately unsaturated σ-subalgebras anti-injective mappings and diffuseness

P. M. Simonov[1], A. V. Chistyakov[2](1955–2013)

[1]Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
simpm@mail.ru; 8(3422)396849

[2]Udmurt State University; 1, Universitetskaya st., Izhevsk, 426034, Russia

We prove the theorem that the substitution operator satisfying "no suspension" condition, eight are equivalent statements.

Keywords: *substitution operator; order continuous homomorphism; anti-injective mapping; anti-surjectively mapping; diffuse operator; atomic operator; Luzin' N-condition.*