МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.56

Оптимальное граничное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе

В. В. Провоторов[1], **Ю. А. Гнилицкая**[2]
[1]Воронежский государственный университет
Россия, 394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
[2] Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина"
Россия, 394064, Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54 "А"
wwprov@mail.ru, ulpya_al@mail.ru; 89507581514, 89518659684

Рассматривается случай, когда состояние дифференциальной системы с распределенными параметрами на графе определяется слабым решением начально-краевой задачи на графе. Такое решение принадлежит пространству соболевского типа и удовлетворяет условиям трансверсальности во всех внутренних узлах графа. Воздействие на систему и наблюдение за состоянием системы осуществляется на границе (в граничных узлах графа) при произвольной временной переменной. Сопряженное состояние системы определяется слабым решением начально-краевой задачи на графе с финальным (по времени) условием. Получены необходимые и достаточные условия существования единственного граничного управления. Во всех рассмотренных случаях используется произвольный связный ограниченный ориентированный граф, допускающий наличие циклов (петель).

Ключевые слова: *дифференциальная система на графе; оптимальное граничное управление; граничное наблюдение; сопряженное состояние.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-4-5-10

Обозначим через $\partial\Gamma$ множество граничных ζ, через $J(\Gamma)$ – множество внутренних ξ узлов графа Γ, и пусть Γ_0 – объединение всех ребер, не содержащих их концевых точек, при этом: $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0,T)$, $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0,t)$, $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0,T)$, $\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0,t)$. Каждое ребро γ графа Γ ориентировано, параметризуется отрезком $[0,1]$ с переменной $x \in [0,1]$ [1, с. 88].

Введем необходимые пространства функций: $L_p(\Gamma)$ ($p = 1,2$) – банахово пространство измеримых на Γ_0 функций с конечной нормой $\|u\|_{L_p(\Gamma)} = (\int_\Gamma u^p(x)\,dx)^{1/p}$ (аналогично определяются пространства $L_p(\Gamma_T)$, $p = 1,2$); $W_2^1(\Gamma)$ – пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка, в то же время из $L_2(\Gamma)$, норма в $W_2^1(\Gamma)$ определяется скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^1(\Gamma)} = \int_\Gamma \left(u(x)v(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} \right) dx;$$

$L_{2,1}(\Gamma_T)$ – просранство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int\limits_0^T (\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx)^{1/2}\,dt$;

$W^{1,0}(\Gamma_T)$ – пространство функций $u(x,t)\in L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по x, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$, норма в $W^{1,0}(\Gamma_T)$ определяется соотношением

$$\|u\|^2_{W^{1,0}(\Gamma_T)} = \int\limits_{\Gamma_T}\left(u(x,t)^2 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}^2\right)dxdt.$$

Пусть далее $V(\Gamma_T)$ – множество всех функций $u(x,t)\in W^{1,0}(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \underset{0\le t\le T}{vrai\max}\|u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(\Gamma_T)} \quad (1)$$

и сильно непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$, т.е. таких, что $\|u(x,t+\Delta t)-u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$ при $\Delta t\to 0$ равномерно на $[0,T]$.

Рассмотрим билинейную форму

$$\ell(\mu,\nu) = \int\limits_\Gamma\left(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x)\right)dx,$$

где коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ – фиксированные измеримые ограниченные на Γ_0 функции, суммируемые с квадратом: $a_*\le a(x)\le a^*$, $|b(x)|\le\beta$, $x\in\Gamma_0$ (a_*, a^*, β – фиксированные положительные постоянные).

Из леммы 2 [1, с. 92] следует, что в пространстве $W_2^1(\Gamma)$ есть множество Ω функций $u(x)\in C(\Gamma)$ ($C(\Gamma)$ – пространство непрерывных на Γ функций), удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{\gamma_j\in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j}\frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx} = \sum_{\gamma_j\in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j}\frac{du(0)_{\gamma_j}}{dx}$$

во всех узлах $\xi\in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ – множество ребер, ориентированных "к узлу ξ", $r(\xi)$ – множество ребер ориентированных "от узла ξ"; через $u(\cdot)_\gamma$ обозначено сужение функции $u(\cdot)$ на ребро γ).

Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества функций из Ω обозначим через $W_2^1(a,\Gamma)$. Если при этом элементы $u\in\Omega$ равны нулю во всех узлах $\zeta\in\partial\Gamma$, то получим пространство $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$.

Пусть далее $\Omega_0(a,\Gamma_T)$ – множество функций $u(x,t)\in V(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t=t_0\in[0,T]$ как функции класса $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma_j\in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j}\frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j\in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j}\frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x} \quad (2)$$

для всех узлов $\xi\in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_0(a,\Gamma_T)$ по норме (1), обозначим через $V_0^{1,0}(a,\Gamma_T)$. Если в приведенном определении класс $W_{2,0}^1(a,\Gamma)$ заменить на $W_2^1(a,\Gamma)$, то получим пространство $V^{1,0}(a,\Gamma_T): V_0^{1,0}(a,\Gamma_T)\subset V^{1,0}(a,\Gamma_T)\subset W^{1,0}(\Gamma_T)$.

Другим подпространством пространства $W^{1,0}(\Gamma_T)$ является $W_0^{1,0}(a,\Gamma_T)$ – замыкание в норме $W^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (2) для всех узлов $\xi\in J(\Gamma)$ и для любого $t\in[0,T]$, а также равных нулю вблизи $\partial\Gamma_T$. Отличием элементов пространства $V_0^{1,0}(a,\Gamma_T)$ ($V^{1,0}(a,\Gamma_T)$) от элементов $W_0^{1,0}(a,\Gamma_T)$ является отсутствие у последних непрерывности по переменной t, соотношение (2) имеет место почти всюду на $(0,T)$. По мере необходимости будут введены другие пространства и их подпространства с интересующими нас свойствами.

Рассмотрим уравнение в области Γ_T:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \quad (3)$$

представляющее собой систему дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на каждом ребре γ графа Γ.

Состояние системы (3) в области $\overline{\Gamma}_T$ определяется реше-нием $y(x,t)$ уравнения (3), удовлетворяющим соотношениям (3), начальному

$$y\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \qquad (4)$$

и краевому

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x\in\partial\Gamma_T} = \phi(x,t), \;\; 0 \le t \le T \qquad (5)$$

условиям.

Выбор функций $\phi(x)$ в (4) определяет стартовые условия начально-краевой задачи (3)–(5). Предположения относительно функций $a(x)$, $b(x)$ остаются теми же, что рассмотрены выше для билинейной формы $\ell(\mu,\nu)$; $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$, $\phi(x,t)\in L_2(\partial\Gamma_T)$.

Определение. *Слабым решением в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (3)–(5) называется функция $y(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int_\Gamma y(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_t} y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt +$$
$$+\,\ell_t(y,\eta) = \int_\Gamma \varphi(x)\eta(x,0)dx +$$
$$+\int_{\partial\Gamma_t}\phi(x,t)\eta(x,t)dxdt + \int_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

при любом $t\in[0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t)\in W^1(a,\Gamma_T)$; $\ell_t(y,\eta)$ – билинейная форма, определенная соотношением

$$\ell_t(y,\eta) =$$
$$= \int_{\Gamma_t}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x} + b(x)y(x,t)\eta(x,t)\right)dxdt.$$

Теорема 1 [2]. *Для любых $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$, $\phi(x,t)\in L_2(\partial\Gamma_T)$ начально-краевая задача (3)–(5) однозначно слабо разрешима в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$; имеет место непрерывность по исходным данным.*

Замечание. Утверждение теоремы означает корректность по Адамару начально-краевой задачи (3)–(5) в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, что является основополагающим условием для анализа задачи оптимального управления системой (3).

Далее для дифференциальной системы (3) рассматривается задача оптимального граничного управления и граничного наблюдения, представляющая собой для многих приложений ситуацию (т.е. управляющее воздействие $v(x,t)$ распределено на границе или части границы цилиндре Γ_T), наблюдение за состоянием системы (3) осуществляется на границе $\partial\Gamma_T$, а состояние системы определяется начально-краевой задачей (3)–(5) при $\phi(x,t) = v(x,t)$ в краевом условии (5). При этом пространством состояний является $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, а в качестве пространства управлений U используется $L_2(\partial\Gamma_T)$.

Состояние $y(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ системы (3) определяется слабым решением $y(v)(x,t)$ задачи (3)–(5) ($\phi(x,t) = v(x,t)$). Пространство наблюдений обозначим через $H = L_2(\partial\Gamma_T)$, наблюдение имеет важный для приложений вид $Cy(v) = My(v)|_{\partial\Gamma_T}$ ($M : L_2(\partial\Gamma_T)\to L_2(\partial\Gamma_T)$ – линейный непрерывный оператор, C – *оператор граничного наблюдения*). Здесь $y(v)|_{\partial\Gamma_T}$ – след функции $y(v)$ на поверхности $\partial\Gamma_T$; функционал $J(v)$, требующий минимизации на выпуклом замкнутом множестве $\mathrm{U}_\partial \subset \mathrm{U}$, имеет вид

$$J(v) = \left\| My(v) - z_0 \right\|^2_{L_2(\partial\Gamma_T)} + (Nv,v)_{\mathrm{U}},$$

где $z_0(x,t)\in L_2(\partial\Gamma_T)$ – заданное наблюдение.

Отметим, что если $\partial\Gamma_T$ заменить на подмножество $S\subset\partial\Gamma_T$, то наблюдаются значения функции $y(v)$ на подмножестве S поверхности $\partial\Gamma_T$.

Задача граничного управления системой (3) *заключается в том, чтобы отыскать* $\inf\limits_{v\in\mathrm{U}_\partial} J(v)$.

Теорема 2. *Задача оптимального граничного управления системой* (3)–(5) $(\phi(x,t) = v(x,t))$ *имеет единственное решение* $v^*\in\mathrm{U}_\partial$:

$$J(v^*) = \inf_{v \in U_\partial} J(v).$$

Доказательство. В силу утверждения теоремы 1 линейное отображение $v \to y(v)$ пространства управлений U в пространство состояний $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ непрерывно. Функционал $J(v)$ определяется с помощью двух операторов: 1) оператора $v \to y(v)$ перехода от управления v к состоянию $y(v)$, 2) оператора $y(v) \to My(v)$ перехода от состояния к наблюдению.

Преобразуем функционал $J(v)$ к следующему виду:

$$J(v) = \|M(y(v) - y(0)) + My(0) - z\|^2_{L_2(\partial\Gamma_T)} + $$
$$+ (Nv, v)_U = \pi(v, v) - 2\ell(v) + \|My(0) - z\|^2_{L_2(\partial\Gamma_T)},$$

где

$$\pi(u, v) = (M(y(u) - y(0)),$$
$$M(y(v) - y(0)))_{L_2(\partial\Gamma_T)} + (Nu, v)_U,$$
$$\ell(v) = (z - My(0), M(y(v) - y(0)))_{L_2(\partial\Gamma_T)}.$$

Доказательство завершается применением утверждения теоремы 1.1 [3, с. 13], при этом учитывается очевидное неравенство $\|My(0) - z\|^2_{L_2(\partial\Gamma_T)} \geq 0.$

Далее приведем утверждения, основанные на теории минимизации коэрцитивных форм [3, гл. 1].

Теорема 3 [4]. *Задача оптимального граничного управления системы* (3) *имеет единственное оптимальное управление, если оператор* N *ненулевой. Для того чтобы элемент* $u(x,t) \in U_\partial$ *был единственным оптимальным управлением, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma y(u)(x,t)\eta(x,t)dx - \\ &- \int_{\Gamma_t} y(u)(x,t)\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_t(y(u),\eta) = \\ &= \int_\Gamma \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_{\partial\Gamma_t} u(x,t)\eta(x,t)dxdt + \\ &+ \int_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt \end{aligned} \tag{6}$$

для любых функций $\eta(x,t) \in W^1(a, \Gamma_T)$ *и при любом* $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Gamma_T} (My(v)(x,t) - z_0(x,t))M(y(v)(x,t) - \\ &- y(u)(x,t))dxdt + (Nu, v - u)_U \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

для любых $v \in U_\partial$ *; здесь* $y(u) \in V^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Неравенство (7) можно преобразовать с помощью сопряженного состояния системы (3), учитывая симметричность формы $\ell_t(\mu, \eta)$ ($t \in [0, T]$). Сделаем это для наглядности только для случая

$$C : L_2(\partial\Gamma_T) \to L_2(\partial\Gamma_T),$$

тогда неравенство (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &(M^*(My(u) - z_0), y(v) - y(u))_{L_2(\partial\Gamma_T)} + \\ &+ (Nu, v - u)_U \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

для любых $v \in U_\partial$ (здесь $M^* : L_2(\Gamma_T) \to L_2(\Gamma_T)$ – сопряженный к M оператор).

Для граничного управления $v(x,t)$ сопряженное состояние $\omega(v)(x,t) \in W_2^1(a, \Gamma_T)$, $\omega(v)(x,T) = 0$, определим соотношением

$$\begin{aligned} &- \int_{\Gamma_T} \frac{\partial \omega(v)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt + \ell_T(\omega(v), \zeta) = \\ &= \int_{\partial\Gamma_T} M^*(My(v)(x,t) - z_0(x,t))\zeta(x,t)dxdt \end{aligned} \tag{9}$$

для любых функций $\zeta(x,t) \in W^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Пусть функция $y(v)(x,t)$ удовлетворяет тождеству определения слабого решения задачи (3)–(5), а $y(u)(x,t)$ – тому же тождеству при $v = u$. Положим в (9) $v = u$ и

$$\zeta(x,t) = y(v)(x,t) - y(u)(x,t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_T)$$

(последнее возможно, так как

$$V^{1,0}(a,\Gamma_T)\in W^{1,0}(a,\Gamma_T)),$$

получим

$$-\int\limits_{\Gamma_T}\frac{\partial\omega(u)(x,t)}{\partial t}(y(v)(x,t)-$$
$$-y(u)(x,t))dxdt+\ell_T(\omega(u),y(v)-y(u))= \qquad (10)$$
$$=\int\limits_{\partial\Gamma_T}C^*(Cy(u)(x,t)-$$
$$-z_0(x,t))(y(v)(x,t)-y(u)(x,t))dxdt.$$

С другой стороны, из соотношения определения слабого решения задачи (3)–(5) вычтем то же соотношение при $v=u$ и, заменив $\eta(x,t)$ на $\omega(u)(x,t)$, получим при $t=T$ соотношение

$$-\int\limits_{\Gamma_T}\frac{\partial\omega(u)(x,t)}{\partial t}\big(y(v)(x,t)-y(u)(x,t)\big)dxdt+$$
$$+\ell_T(y(v)-y(u),\omega(u))= \qquad (11)$$
$$=\int\limits_{\partial\Gamma_T}\big(v(x,t)-u(x,t)\big)\omega(u)(x,t)dxdt.$$

Сравнивая в (10) и (11) стоящие справа выражения и учитывая симметричность формы $\ell_T(\cdot,\cdot)$, приходим к равенству

$$\int\limits_{\partial\Gamma_T}M^*(My(u)(x,t)-z_0(x,t))(y(v)(x,t)-$$
$$-y(u)(x,t))dxdt=$$
$$=\int\limits_{\partial\Gamma_T}\omega(u)(x,t)\big(v(x,t)-u(x,t)\big)dxdt,$$

из которого вместе с (7) вытекает неравенство

$$\int\limits_{\partial\Gamma_T}\big(\omega(u)(x,t)+Nu(x,t)\big)\times$$
$$\times\big(v(x,t)-u(x,t)\big)d\sigma\ge 0 \qquad (12)$$

для любых $v\in U_\partial$, эквивалентное неравенству (7).

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть множество* U_∂ *ограничено. Для того чтобы элемент* $u(x,t)\in U_\partial$ *был оптимумом, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения:*

$$\int\limits_{\Gamma}y(u)(x,t)\eta(x,t)dx-$$
$$\int\limits_{\Gamma_t}y(u)(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt+\ell_t(y(u),\eta)=$$
$$=\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\eta(x,0)dx+\int\limits_{\partial\Gamma_t}u(x,t)\eta(x,t)dxdt+ \qquad (13)$$
$$+\int\limits_{\Gamma_t}f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

для любых функций $\eta(x,t)\in W^1(a,\Gamma_T)$ *и при любом* $t\in[0,T]$,

$$-\int\limits_{\Gamma_T}\frac{\partial\omega(u)(x,t)}{\partial t}\zeta(x,t)dxdt+\ell_T(\omega(u),\zeta)=$$
$$=\int\limits_{\partial\Gamma_T}M^*(M\omega(u)(x,t)-z_0(x,t))\zeta(x,t)d\sigma \qquad (14)$$

для любых функций

$$\zeta(x,t)\in W^{1,0}(a,\Gamma_T),$$

$$\int\limits_{\partial\Gamma_T}\big(\omega(u)(x,t)+Nu(x,t)\big)\times$$
$$\times\big(v(x,t)-u(x,t)\big)dxdt\ge 0 \qquad (15)$$

для любых $v\in U_\partial$, *где* $y(u)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, $\omega(v)\in W^1(a,\Gamma_T)$ *и* $\omega(v)(x,T)=0$.

При этом: 1) *если оператор* $N\neq 0$, *то оптимум* $u\in U_\partial$ *единственен,* 2) *если* $N=0$, *то соотношениям* (13)–(15) *удовлетворяет по крайней мере один элемент* $u\in U_\partial$*; множество таких элементов соответствует совокупности оптимумов, образующих подмножество множества* U_∂.

Замечание. Если $U_\partial=U$ (ограничения на управление отсутствуют), неравенство (15) трансформируется в равенство; аналогичная ситуация рассмотрена в работах [4, 5].

Список литературы

1. *Провоторов В.В., Волкова А.С.* Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж, 2014. 188 с.
2. *Провоторов В.В.* Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Инфор-

матика. Процессы управления. 2014. № 3. С. 154–163.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / пер. с фр. Н.Х. Розова; под ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: Мир, 1972. 414 с.
4. *Подвальный С.Л., Провоторов В.В.* Оптимизация по стартовым условиям параболической системы с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 58, № 4. С. 70–74.
5. *Volkova A.S., Gnilitskaya Yu.A., Provotorov V.V.* On the Solvability of Boundary-Value Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations on Geometrical Graphs. Automation and Remote Control. 2014. Т. 75, № 2. С. 405–412.
6. *Сергеев С.М.* Математическое моделирование сети торговых предприятий // Вестник Воронежского государственного технического университета 2012. Т. 8, № 1. С. 66–71.

Optimal boundary control of the parabolic system with distributed parameters on the graph

V. V. Provotorov[1], Yu. A. Gnilitskaya[2]
[1]Voronezh State University; 1, Universitetskaya ploshchad, Voronezh, 394006, Russia
[2] Zhukovsky – Gagarin Air Force Academy; 54 "A", Starykh Bolshevikov st., Voronezh, 394064, Russia
wwprov@mail.ru, ulpya_al@mail.ru; 89507581514, 89518659684

In this work we consider the case when the state of the differential system with distributed parameters on the graph is determined by a weak solution of the initial boundary value problem on the graph. Such solution belongs to a Sobolev space and satisfies the conditions of transversality in all internal nodes of the graph. The impact on the system and monitoring of the system's state are carried out at the border (in the boundary nodes of the graph) for an arbitrary time variable. The adjoint state of the system is determined by the weak solution of the initial boundary value problem on the graph with the final (by time) condition. The necessary and sufficient conditions for the existence of the single boundary control are obtained. All considerations are given for an arbitrary connected limited directed graph, allowing for the presence of cycles (loops).

Keywords: *differential system on the graph; optimal boundary control; boundary monitoring; adjoint state.*