ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Математика. Механика. Информатика Вып. 4(35)

ИСТОРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 51(09)

Комбинаторно-геометрические интерпретации простых конечных групп типа Ли

В. Г. Алябьева
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
alyabieva@rambler.ru

Статья содержит обзор результатов классификации простых конечных групп типа Ли и их комбинаторно-геометрических интерпретаций.

Ключевые слова: *конечные геометрии; конечные простые группы типа ЛИ; комбинаторно-геометрические интерпретации конечных групп.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-4-76-83

Классификация простых конечных групп типа Ли была выполнена в рамках грандиозного проекта – классификации простых конечных групп, которая явилась выдающимся событием не только алгебры XX в., но и, пожалуй, всей современной математики. Итоги классификационной теоремы были объявлены в 1981 г. [4].

Классификационная теорема утверждает, что произвольная простая конечная группа изоморфна некоторой группе из построенного списка, содержащего: 1) циклические группы простого порядка; 2) знакопеременные группы U_n, $n \geq 5$; 3) группы типа Ли; 4) спорадические группы. Циклические группы простого порядка и знакопеременные группы U_n, $n \geq 5$ являются тривиальными примерами простых конечных групп и здесь рассматриваться не будут. Обзор спорадических групп и их интерпретаций дан в статье [1]. Группы типа Ли образуют самый обширный класс простых конечных групп, именно им посвящена статья. Большая часть из них представляет собой конечные аналоги классических простых групп Ли. Именно поэтому мы обращаемся к классификации классических простых групп Ли. При решении классификационной проблемы важную роль играли геометрические интерпретации групп – геометрические системы и системы инцидентностей, имеющие простые группы автоморфизмов. В предлагаемой статье дан обзор геометрических интерпретаций простых конечных групп типа Ли.

Проблемой классификации занималась большая группа математиков, начиная с *Ричарда Брауэра* (Richard Dagobert Brauer, 1901–1977), который начал изучать конечные простые группы с конца 40-х гг. Активные участники классификационного процесса – *Жак Титс* (Jacques Tits) из Коллеж де Франс и *Джон Григгс Томпсон* (John Griggs Thompson) из университета Флориды – стали лауреатами престижной международной премии Абеля за 2008 г. Высокой награды они удостоены *"за фундаментальные достижения в области алгебры, в частности, за создание современной теории групп"* [21]. В пресс-релизе премии отмечалось: "Современная алгебра основывается на двух старинных традициях в математике – искусстве решения уравнений и использовании симметрии, например, в узорах изразцовых плиток в Альхамбре. Эти две традиции соединились в конце восемнадцатого века, когда впервые была выражена мысль о том, что ключ к пониманию даже самых простейших уравнений заложен в симметрии их решений. Эту провидческую мысль в начале девятнадцатого века блестяще реализовали два молодых математика, Нильс Хенрик Абель и Эварист Галуа. Со временем это привело к понятию группы, в котором наиболее ярко схвачена идея симметрии. В двадцатом веке теоретико-групповой подход стал решающим фактором в развитии современной физики, от понимания симметрии кристаллов и до формулировки моделей фундаментальных частиц и сил" [21].

Великолепное и грандиозное здание классификационной теоремы действует воодушевляющим образом на математическое и научное сообщество. Известный математик И.Р. Шафаревич сравнивал классификационную теорему с высшим достижением античной математики – открытием правильных многогранников, соответствующих конечным подгруппам группы движений пространства. Подобно тому, как открытие правильных многогранников содержало знание самых глубоких симметрий, известных античности, так и открытие простых групп Ли в математике нового времени содержит знание самых тонких симметрий, до понимания которых поднялась современная математика. "Точно так же, как Платон считал тетраэдр, октаэдр, куб и икосаэдр формами элементарных составляющих четырех стихий – огня, воздуха, земли и воды (оставляя додекаэдр как символ космоса), так современные физики пытаются при помощи свойств различных простых групп SU(2), SU(3), SU(4), SU(6) найти общие закономерности в многообразии элементарных частиц" [6, с. 207]. И.Р. Шафаревичу вторит отечественный математик Н.А. Вавилов: "На протяжении 25 веков симметрии платоновых тел гипнотизируют математиков. Можно предположить, что и симметрия конечных простых групп и извлечение ее непосредственных следствий будет одной из важнейших задач математики на несколько столетий" [2, с. 9].

Группа является основной фундаментальной классической структурой алгебры. Важность понятия группы для математики в целом сопоставима со значимостью таких понятий как число, функция, множество, отображение, кольцо, топологическое пространство, многообразие. Теория групп возникла в начале XIX в. из трех основных источников: теории чисел, теории алгебраических уравнений и геометрии. Термин "группа" впервые ввел в 1830 г. Эварист Галуа. Его самое замечательное достижение состоит в том, что (в возрасте 16–18 лет!) он получил полный ответ на вопрос о разрешимости уравнений в радикалах. Галуа ввел также понятия поля, нормальной подгруппы, простой и разрешимой группы. В его честь названы многие важнейшие понятия алгебры: группа Галуа, поля Галуа, теория Галуа, соответствие Галуа, когомологии Галуа. Всеобщее внимание к теории групп как к незаменимому инструменту исследований в теории уравнений привлек в 1870 г. "Трактат по теории подстановок и алгебраических уравнений" Камилла Жордана [12]. В этой книге были рассмотрены конечные и дискретные группы, в том числе так называемые конечные простые группы: линейные, симплектические, ортогональные и унитарные группы над конечными полями. Линейную группу над конечным полем рассматривал еще Галуа. Л. Диксон детально изучил эти группы в книге "Линейные группы с представлением в теории полей Галуа" [10] как группы подстановок элементов из полей Галуа.

К. Жордан познакомил с содержанием своей книги молодых математиков Феликса Клейна и Софуса Ли, находившихся в это время в Париже. Первые работы Клейна и Ли относились к геометрии, поэтому они заинтересовались непрерывными группами и их значением для геометрии. В 1872 г. Ф. Клейн опубликовал "Эрлангенскую программу", в которой, подчеркивая значимость теории групп для геометрии, утверждал, что всякая геометрия определяется некоторой группой преобразований и задача каждой геометрии состоит в изучении инвариантов этой группы. Софус Ли, норвежский математик, в 1869–1870 гг. получил стипендию для стажировки в Берлине и Париже, где близко подружился с Клейном. Во время пребывания в Париже он понял основополагающее значение теории групп для математики. Основной темой его исследований стали непрерывные группы и их приложения в геометрии, теории дифференциальных уравнений и механике. По его определению непрерывными группами являются такие группы преобразований геометрических пространств, как, например, группы движений евклидова и неевклидовых пространств, группы вращений этих пространств вокруг точки, группа переносов евклидова пространства, группа подобий этого пространства, группа аффинных преобразований, группы коллинеаций.

С. Ли занялся проблемой интегрируемости дифференциальных уравнений в квадратурах, т.е. выражением решений этих уравнений с помощью интегралов от известных функций. Он подошел к решению этой проблемы аналогично тому, как Галуа решал проблему разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. С каждым обыкновенным дифференциальным уравнением С. Ли связывал непрерывную группу преобразований, "допускаемую этим уравнением", и определял условия, которым должна удовлетворять эта группа, чтобы решение уравнения можно было выразить в квадратурах. Оказалось, что это условие так же, как и условие Галуа, состоит в том, чтобы группа дифференциального уравнения была разрешимой. Для обоснования этой теории необходимо было подробно изложить основные свойства непрерывных групп преобразований и, в частности, разрешимых и простых непрерывных групп. Эту задачу С. Ли выполнил совместно с Фридрихом Энгелем. Они сформулировали следующее определение: непрерывные группы называются *простыми*, если не имеют инвариантных подгрупп меньшей размерности.

В процессе исследования С. Ли построил "инфинитезимальные группы", представляющие собой векторные пространства с операциями сложения и коммутирования векторов. Герман Вейль предложил (1935) называть инфинитезимальные группы *алгебрами Ли.* С. Ли были известны три серии вещественных и комплексных простых групп Ли. Это – группы вещественных и комплексных матриц с определителем 1 (SL_n, CSL_n), вещественных и комплексных ортогональных матриц n-го порядка с определителем 1 (SO_n, CSO_n), группы вещественных и комплексных кососимметрических матриц (Sp_{2n}, CSp_{2n}) порядка $2n$, в которых все элементы верхней половины побочной диагонали равны 1, все элементы нижней половины этой диагонали равны -1, все остальные элементы равны 0. Матрицы первой серии являются матрицами коллинеаций вещественного (P_{n-1}) и, соответственно, комплексного (CP_{n-1}) проективного пространства, матрицы второй серии – матрицами коллинеаций тех же пространств, переводящих в себя гиперквадрики, матрицы третьей серии – матрицы пространств p_{2n-1} и CP_{2n-1}, переводящие в себя линейные комплексы прямых этих пространств. В 1935 г. Геоман Вейль назвал пространство CP_{2n-1} *комплексным симплектическим пространством*, а соответствующую группу коллинеаций – *симплектической группой.*

Эли Картан [9] доказал, что существуют четыре бесконечные серии простых локально неизоморфных групп Ли: $A_n(n \geq 1)$, $B_n(n \geq 2)$, $C_n(n \geq 3)$, $D_n(n \geq 4)$ и назвал их *сериями больших классов.*

В изложении интерпретаций простых групп мы используем терминологию и обозначения, относящиеся как к матричному представлению групп, так и представлению их в виде групп преобразований векторных пространств. Если G – группа матриц, то подгруппа матриц с определителем, равным единице, обозначается через $SG(S$ – от слова "специальная"). Фактор-группы G и SG по их центрам обозначаются PG и PSG (P от слова "проективная").

Группы класса A_n локально изоморфны группам CSL_{n+1} комплексных унимодулярных матриц; группы классов B_n и D_n – соответственно CO_{2n+1} и CO_{2n} – группам комплексных матриц, сохраняющих квадратичную форму; группы класса C_n – группам CSy_{2n} симплектических комплексных матриц, сохраняющих кососимметрическую билинейную форму. Киллинг показал [13], что кроме этих комплексных простых групп, есть еще особые простые группы размерностей 14, 52, 78, 133 и 248, которые Картан позднее назвал классами G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Картан доказал, что иных простых комплексных групп Ли нет. Число вещественных простых групп Ли больше, чем комплексных, так как одну и ту же комплексную форму могут иметь несколько неизоморфных вещественных форм. Картан нашел (1914) все вещественные простые группы Ли четырех больших классов и построил их классификацию. Так, группы SL_n являются вещественными группами серии A_n, группы SO_{2n1} и $SO_{2n+1,l}$ являются вещественными группами серии B_n группы Sp_{2n} являются вещественными группами серии C_n, группы SO_{2n} и $SO_{2n,l}$ являются вещественными группами серии D_n.

В 1955 г. К. Шевалле в статье "О некоторых простых группах" [7] указал общий способ получения простых групп как групп автоморфизмов алгебр Ли. Конструкция Шевалле выполняется над произвольным полем, которое, в частности, может быть конечным. Рассмотрим множество $\boldsymbol{A}$ всех линейных комбинаций базисных коэффициентов из $\boldsymbol{F_q}$, $q = p^n$, p – простое число. Так как структурные константы алгебры $\boldsymbol{A}$ относительно базиса Шевалле все целочисленны, то можно определить в $\boldsymbol{A}$ умножение, где целые коэффициенты берутся по модулю p. Это умножение превращает $\boldsymbol{A}$ в алгебру Ли над полем $\boldsymbol{F_q}$. Матрица линейных преобразований алгебры Ли в базисе Шевалле в качестве элементов имеет многочлены с целыми коэффициентами. Пусть эти целые коэффициенты взяты по модулю p. Это превратит элементы матрицы в элементы поля Галуа $\boldsymbol{F_q}$. Группа $\boldsymbol{F_q}G$ Шевалле типа G над полем $\boldsymbol{F_q}$ порождается автоморфизмами алгебры, заданными матрицами описанного типа. На этом пути получаются конечные группы Шевалле $\boldsymbol{F_q}A_n$, $\boldsymbol{F_q}B_n$, $\boldsymbol{F_q}C_n$, $\boldsymbol{F_q}D_n$, $\boldsymbol{F_q}G_2$, $\boldsymbol{F_q}F_4$, $\boldsymbol{F_q}E_6$, $\boldsymbol{F_q}E_7$, $\boldsymbol{F_q}E_8$. Шевалле доказал, что группы $\boldsymbol{F_q}G$ все простые, за исключением $\boldsymbol{F_2}A_1$, $\boldsymbol{F_3}A_1$, $\boldsymbol{F_2}B_2$, $\boldsymbol{F_2}G_2$.

Р. Стейнберг упростил (1959) доказательства простоты групп, построенных Шевалле. Р. Ри отождествил [14] группы Шевалле типов A_n, B_n, C_n, D_n с классическими группами. Группа $\boldsymbol{F_q}A_n$ $(n\geq 1)$ есть линейная группа. Если $\boldsymbol{F_q}GL_n$ – группа всех невырожденных квадратных матриц порядка n над $\boldsymbol{F_q}$, то пусть $\boldsymbol{F_q}SL_n$ – подгруппа матриц с определителем, равным 1, тогда $\boldsymbol{F_q}A_n$ совпадает с $\boldsymbol{F_q}PSL_n$ – факторгруппой группы $\boldsymbol{F_q}SL_n$ по ее центру. Группа $\boldsymbol{F_q}B_n$ $(n\geq 2)$ есть ортогональная группа над $\boldsymbol{F_q}$, $q=p^k$, $p\neq 2$. Если $\boldsymbol{F_q}\boldsymbol{O}_{2n+1}$ – группа всех преобразований векторного пространства размерности $2n+1$ над $\boldsymbol{F_q}$, сохраняющих квадратичную форму $f=x_1x_2+x_3x_4+\ldots+x_{2n+1}^2$, то пусть $\boldsymbol{F_q}\Omega_{2n+1}$ коммутант группы $\boldsymbol{F_q}\boldsymbol{O}_{2n+1}$, тогда $\boldsymbol{F_q}B_n$ совпадает с группой $\boldsymbol{F_q}P\Omega_{2n+1}$ – факторгруппой $\boldsymbol{F_q}\Omega_{2n+1}$ по центру. Группа $\boldsymbol{F_q}C_n$, $n\geq 3$, есть симплектическая группа над $\boldsymbol{F_q}$. Если $\boldsymbol{F_q}Sp_{2n}$ – группа всех невырожденных преобразований векторного пространства четной размерности $2n$, сохраняющих невырожденную билинейную форму

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{n+i} - y_i x_{n+i}),$$

то пусть $\boldsymbol{F_q}PS_{2n}$ – факторгруппа группы $\boldsymbol{F_q}Sp_{2n}$ по её центру, тогда $\boldsymbol{F_q}C_n$ совпадает с $\boldsymbol{F_q}PS_{2n}$. Группа $\boldsymbol{F_q}D_n$, $n\geq 4$, есть ортогональная группа четной размерности над полем $\boldsymbol{F_q}$. Если $\boldsymbol{F_q}\boldsymbol{O}_{2n}$ – группа невырожденных линейных преобразований векторного пространства размерности $2n$ над $\boldsymbol{F_q}$, сохраняющих квадратичную форму $f=x_1x_2+x_3x_4+\ldots+x_{2n-1}x_{2n}$, то пусть $\boldsymbol{F_q}\Omega_{2n}$ – коммутант группы $\boldsymbol{F_q}\boldsymbol{O}_{2n}$, тогда $\boldsymbol{F_q}D_n$ совпадает с $\boldsymbol{F_q}P\Omega_{2n}$ – факторгруппой группы $\boldsymbol{F_q}\Omega_{2n}$ по ее центру. Группы $\boldsymbol{F_2}PSp_4$ и $\boldsymbol{F_2}P\Omega_5$ изоморфны между собой и изоморфны симметрической группе S_6, а поэтому не просты. Группа $\boldsymbol{F_q}P\Omega_4$ изоморфна $\boldsymbol{F_q}PSL_2\times\boldsymbol{F_q}PSL_2$.

На пути, предложенном Шевалле, не строятся две серии простых конечных групп типа Ли: унитарные группы и второй класс ортогональных групп четной размерности. Группа внутренних автоморфизмов простой группы Шевалле G изоморфна группе G. Рассматривая внешние автоморфизмы групп Шевалле, Стейнберг (1960) обратил внимание на автоморфизмы *графа* группы. Граф группы $\boldsymbol{F_q}A_n$, $n\geq 2$, имеет автоморфизм второго порядка σ: $\sigma(i)=n+1-i$, где $i=1,\ldots, n$. Граф группы $\boldsymbol{F_q}D_n$, $n\geq 4$, тоже обладает автоморфизмом σ второго порядка: $\sigma(i)=i$ для $i\leq n-2$, $\sigma(n-1)=n$, $\sigma(n)=n+1$. Для группы $\boldsymbol{F_q}D_n$ симметрии графа образуют группу, изоморфную симметрической группе S_3. Граф группы $\boldsymbol{F_q}E_6$ обладает симметрией σ порядка 2: для $i\neq 6$, $\sigma(i)=5+1-i$, $\sigma(6)=6$. Граф группы E_7, а также групп E_8, B_n, $n>2$, A_1, C_n, $n>2$, имеет лишь тождественный автоморфизм, связанный с графом. Граф группы $\boldsymbol{F_q}B_2$ имеет симметрию порядка 2, однако, наличие в группе $\boldsymbol{F_q}B_2$ автоморфизма, связанного с графом, как оказалось, зависит от того, имеет ли поле $\boldsymbol{F_q}$ характеристику 2 или нет. Граф группы $\boldsymbol{F_q}G_2$ тоже имеет симметрию порядка 2, однако наличие в $\boldsymbol{F_q}G_2$ автоморфизма, связанного с графом группы, зависит от того, будет ли поле $\boldsymbol{F_q}$ иметь характеристику 3. Граф группы $\boldsymbol{F_q}F_4$ имеет симметрию порядка 2, группа $\boldsymbol{F_q}F_4$ имеет автоморфизм, связанный с автоморфизмом графа, если $\boldsymbol{F_q}$ имеет характеристику 2.

Стейнберг (1959) предложил видоизменить процедуру Шевалле, что привело к построению новых простых групп – вариаций Стейнберга групп Шевалле. Пусть $\boldsymbol{F_q}G$ – произвольная группа Шевалле, допускающая связанный с графом автоморфизм α. Пусть $\boldsymbol{F_q}G$ допускает связанный с полем $\boldsymbol{F_q}$ автоморфизм β того же порядка, что и α. Рассмотрим композицию этих автоморфизмов $\alpha\beta=\gamma$. Если u – подгруппа группы $\boldsymbol{F_q}G$, порожденная всеми автоморфизмами алгебры $\boldsymbol{A}$ с положительными корнями, а v, соответственно, отрицательными корнями, то тогда u' и v' – множества элементов, соответственно, в u и v, которые остаются на месте при действии автоморфизма σ (неподвижные элементы подгрупп u и v). Обозначим через G' подгруппу группы $\boldsymbol{F_q}G$, порожденную u' и v'. За одним исключением, группы G' имеют строение, близкое к строению групп Шевалле. Стейнберг назвал группы Шевалле группами нормального типа, а группы G' группами *скрученного* типа. На этом пути строятся группы скрученного типа $\boldsymbol{F}q^2\,A_n^1$ $(n\geq 2)$, $\boldsymbol{F}q^2\,D_n^1$ $(n\geq 4)$, $\boldsymbol{F}q^2\,E_6^1$ (группа $\boldsymbol{F_4}A_2^1$ представляет исключение, она является разрешимой группой порядка 72), имеющие автоморфизмы, связанные с автоморфизмом графа порядка 2. Группы скрученного типа $\boldsymbol{F}q^2\,D_4^1$ имеют автоморфизм порядка 3, связанный с графом, и автоморфизм, связанный с автоморфизмом поля порядка 3. Стейнберг отожествил группу $\boldsymbol{F}q^2\,A_2^1$ с классической унитарной группой $\boldsymbol{F}q^2\,PSU_{n+1}$, которая определяется следующим образом. Пусть V – векторное пространство размерности $n+1$ над полем $\boldsymbol{F}q^2$. Пусть $\bar{a}$ – a^q для каждого $a\in$ $\boldsymbol{F}q^2$. Тогда множество неподвижных точек в поле $\boldsymbol{F}q^2$ при действии автоморфизма $a\to\bar{a}$ совпадает с $\boldsymbol{F_q}$. Пусть $\boldsymbol{F}q^2\,GU_{n+1}$ – группа всех невырожденных линейных преобразований пространства V, сохраняющих эрмитову форму $f(x,y)=\sum_{i=1}^{n+1}x_i\bar{y}_i$. Если $\boldsymbol{F}q^2\,SU_{n+1}$ – подгруппа преобразований с определителем, равным 1, то $\boldsymbol{F}q^2\,PSU_{n+1}$ есть факторгруппа группы $\boldsymbol{F}q^2\,SU_{n+1}$ по ее центру. Группа $\boldsymbol{F_4}PSU_{n+1}$ – разрешимая группа порядка 72. Группа $\boldsymbol{F}q^2\,D_n^1$ совпадает со вторым классом ортогональных групп $\boldsymbol{F_q}P\Omega_{2n}^1$ четной размерности. Группа $\boldsymbol{F_q}P\Omega_{2n}^1$, $n\geq 2$, определяется так.

Пусть V – векторное пространство четной размерности $2n$ над полем $\boldsymbol{F_q}$. Группа $\boldsymbol{F}_qO_{2n}^1$ есть группа невырожденных линейных преобразований пространства V, сохраняющих квадратичную форму

$$f'=x_1x_2+x_3x_4+\ldots\alpha x_{2n-1}^2+\beta x_{2n-1}x_{2n}+\gamma x_{2n}^2,$$

где $\alpha x_{2n-1}^2+\beta x_{2n-1}x_{2n}+\gamma x_{2n}^2$ – многочлен, неприводимый над $\boldsymbol{F_q}$. Пусть $\boldsymbol{F}_q\Omega_{2n}^1$ – коммутант группы $\boldsymbol{F}_qO_{2n}^1$, тогда $\boldsymbol{F_q}P\Omega_{2n}^1$ – факторгруппа группы $\boldsymbol{F}_qO_{2n}^1$ по ее центру. При этом $\boldsymbol{F_q}P\Omega_4^1$ изоморфна группе $\boldsymbol{F}q^2\,SL_1$. На этом пути строятся новые группы $\boldsymbol{F}q^2\,E_6^1$ и $\boldsymbol{F}q^3\,D_4^2$, ранее не известные. Независимо от Стейнберга новые простые группы были построены Ж. Титсом [17] и Херцигом.

Имеются еще три семейства групп Шевалле $\boldsymbol{F_2}^{n}B_2$, $\boldsymbol{F_2}^{n}F_4$, $\boldsymbol{F_3}^{n}G_2$, которые обладают нетривиальными автоморфизмами, связанными с графом, но методами Стейнберга для них не удалось получить новые группы скрученных типов. В 1960 г. М. Судзуки [15], [16] открыл новую серию простых групп порядков $q^2(q-1)(q^2+1)$, где $q=2^{2n+1}$, исследуя группы, в которых централизатор каждого неединичного элемента нильпотентен. Узнав о результатах Судзуки, Ри нашел способ интерпретировать группы, построенные Судзуки, как скрученные типы $\boldsymbol{F}_qB_2^1$ над $\boldsymbol{F_q}$. Используя процедуру, предложенную Судзуки, Ри доказал для групп G_2 и F_4 существование скрученных типов $\boldsymbol{F}_qG_2^1$, $q=3^{2n+1}$, и $\boldsymbol{F}_qF_4^1$, $q=2^{n+1}$, n – произвольное натуральное число.

После перечисленных исследований простые конечные группы Шевалле нормального и скрученного типа стали называть *простыми группами типа Ли*.

Еще при построении простых групп типа Ли геометрические соображения играли большую роль. При дальнейшем исследовании простые группы типа Ли получили многочисленные геометрические интерпретации. В 50-х годах XX столетия Титс предложил [18], [19] общую идею построения геометрий инцидентности, связанных с простыми и полупростыми группами Ли и обобщающих понятие проективной плоскости. Под *геометрией инцидентности* ранга r Титс понимал множество E, разбитое на непустые части $E_1, E_2, \dots, E_r$. Элементы из E_i называются объектами i-ого рода данной геометрии. Между элементами разных родов определено симметричное отношение инцидентности. Примером такой геометрии является проективная геометрия. Другим примером такой геометрии будет следующая. Пусть G – линейная алгебраическая группа над полем F, которое либо конечно, либо алгебраически замкнуто, либо не имеет характеристики. Пусть E – множество всех максимальных параболических подгрупп группы G над полем F. Пусть $E=\bigcup_{i=1}^{r}E_i$ – разбиение E на классы сопряженных подгрупп. Подгруппы из E_i объявляются объектами i-ого рода геометрии $I(G,F)$. При этом две максимальные параболические подгруппы считаются инцидентными, если их пересечение содержит максимальную разрешимую подгруппу. Группа G, действуя на E посредством внутренних автоморфизмов, сохраняет отношение инцидентности. Каждой геометрии инцидентности Титс сопоставляет диаграмму-граф, в которой вершины сопоставляются классам E_i сопряженных параболических подгрупп. Две вершины графа i и j соединяются ребром кратности, равной $d_{i,j}-d_e-2$ (снабженной стрелкой, если $d_{i,j}-d_e-2>1$), где $d_{i,j}$ – размерность пересечения E_i и E_j, d_e – размерность E. Язык диаграмм Титс усовершенствовал в своей работе 1974 г. Позднее Бьюкенаут [8] так охарактеризовал эти работы Титса: "Титс дал геометрическую интерпретацию всех простых групп Ли. Каждая из его геометрий характеризуется определённой диаграммой. В этом – одна из наиболее очаровательных особенностей этой теории. Эти замечательные и простые изображения с огромным потенциалом информации могут хорошо проявиться как части универсального языка. Титсом создан настоящий геометрический рай".

Для конечных простых групп типа Ли классов A_n, B_n, C_n, D_n построены также геометрические интерпретации на языке конечных неевклидовых геометрий. Подобно тому, как в вещественном и комплексном проективных пространствах вводятся квадрики и рассматриваются коллинеации, сохраняющие квадрики, можно и в конечном проективном пространстве рассмотреть квадрики. В конечном проективном пространстве $\boldsymbol{F}_qP_n$ существуют три невырожденные квадрики:

f_1: $x_0x_1+\dots+x_{2m}^2=0$, при $n=2m$;

f_2: $x_0x_1+x_2x_3+\dots x_{2m}x_{2m+1}=0$, при $n=2m+1$;

f_3: $x_0x_1+x_2x_3+\dots+x_{2m-2}x_{2m-1}+x_{2m}^2-gx_{2m+1}^2=0$,

где g – неквадрат поля $\boldsymbol{F}_q$, или

f_3: $x_0x_1+x_2x_3+\dots$

$+\alpha x_{2m}^2+\beta x_{2m}x_{2m+1}+\gamma x_{2m+1}^2=0$,

где $\alpha x_{2m}^2+\beta x_{2m}x_{2m+1}+\gamma x_{2m+1}^2$ – многочлен, неприводимый над $\boldsymbol{F}_q$. Число точек квадрик, соответственно, равно: $card\ f_1=(q^m-1)/(q-1)$, $card\ f_2=(q^{m+1}-1)/(q-1)$, $card\ f_3=(q^{m+1}-1)(q^m+1)/(q-1)$. В конечном проективном пространстве $\boldsymbol{F}_qP_n$ квадрики f_1, f_2, f_3 обладают k-мерными плоскими образующими (при $k=0$ – точками, при $k=1$, $k<m-1$, – прямолинейными образующими), число которых известно для квадрик каждого типа. Множество точек пространства $\boldsymbol{F}_qP_{2m}$, не принадлежащих квадрике f_1, образует эллиптическое пространство $\boldsymbol{F}_qS_{2m}$; множество точек пространства $\boldsymbol{F}_qP_{2m+1}$, не принадлежащих квадрике f_3 и, соответственно, квадрике f_2, образуют гиперболическое пространство $\boldsymbol{F}_qS'_{2m+1}$ и, соответственно, эллиптическое пространство $\boldsymbol{F}_qS_{2m+1}$. Квадрики f_1, f_2, f_3 называют абсолютами пространств. Коллинеации, преобразующие в себя абсолюты эллиптических или гиперболических пространств, называются движениями этих пространств. Симплектическим пространством $\boldsymbol{F}_qSp_{2m+1}$ называется проективное пространство $\boldsymbol{F}_qP_{2m+1}$, в котором задана нуль-система $u_i=\sum_j a_{ij}x_j$ с неособенной матрицей. Симплектическими преобразованиями пространства называются коллинеации, перестановочные с нуль-системой. Группы коллинеаций конечного проективного пространства, группы движений эллиптических, гиперболических, симплектичских конечных пространств являются конечными группами типа Ли. Дж.

Фаулкнер построил [11] над октавными расширениями конечных полей эрмитовы эллиптические плоскости, фундаментальными группами которых являются простые группы $\mathbf{F}_qF_4$ и $\mathbf{F}_qE_6$. Простые группы $\mathbf{F}_qG_2$ являются группами автоморфизмов для октавных расширений конечных полей.

Итоги классификации простых конечных групп типа ли приведены в таблице [5].

Конечные группы типа Ли

Группы	**Порядок группы**	**Иные обозначения группы**
$A_l(q),\ l \geq 1$	$\frac{1}{НОД(l+1,q-1)} q^{\frac{l(l+1)}{2}} \prod_{i=2}^{l+1}(q^i-1)$	$PL_{l+1}(q)$
$B_l(q),\ l \geq 2$	$\frac{1}{НОД(2,q-1)} q^{l^2} \prod_{i=1}^{l}(q^{2i}-1)$	$P\Omega_{2l+1}(q)$
$C_l(q),\ l \geq 3$	$\frac{1}{НОД(2,q-1)} q^{l^2} \prod_{i=1}^{l}(q^{2i}-1)$	$PSp_{2l}(q)$
$D_l(q),\ l \geq 4$	$\frac{1}{НОД(4,q^l-1)} q^{l(l-1)}(q^l-1) \prod_{i=1}^{l-1}(q^{2i}-1)$	$P\Omega_{2l}^{+}(q)$
$G_2(q)$	$q^6(q^6-1)(q^2-1)$	$E_2(q)$
$F_4(q)$	$q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)\ (q^2-1)$	–
$E_6(q)$	$\frac{1}{НОД(3,q-1)} q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)\times$ $\times(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)$	–
$E_7(q)$	$\frac{1}{НОД(2,q-1)} q^{63}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)\times$ $\times(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)$	–
$E_8(q)$	$q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)\times$ $\times\ (q^{14}-1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)$	–
${}^2A_l(q^2),\ l \geq 2$	$\frac{1}{НОД(l+1,q+1)} q^{\frac{l(l+1)}{2}} \prod_{i=2}^{l+1}(q^i-(-1)^i)$	$PSU_{l+1}(q)$
${}^2D_l(q^2),\ l \geq 4$	$\frac{1}{НОД(4,q^l+1)} q^{l(l-1)}(q^l+1) \prod_{i=2}^{l-1}(q^{2i}-1)$	$P\Omega_{2l}^{-}(q)$
$E_6(q)$	$\frac{1}{НОД(3,q+1)} q^{36}(q^2-1)(q^5+1)\times$ $\times(q^6-1(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)$	–
${}^3D_4(q^3)$	$q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$	
${}^2B_2(q)$	$q^2(q-1)(q^2+1),\ q=2^{2n+1}$	$S_z(q)$
${}^2G_2(q)$	$q^3(q-1)(q^3+1),\ q=3^{2n+1}$	$R_1(q)$
${}^2F_4(q)$	$q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1),\ q=2^{2n+1}$	$R_2(q)$

Список литературы

1. *Алябьева В.Г.* Геометрия спорадических групп // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 4(12). С. 81–85.
2. *Вавилов Н.А.* Простые алгебры Ли, простые алгебраические группы и простые конечные группы / В кн. Математика XX века. Взгляд из Петербурга. 2010 / под ред. А. М. Вершика. С. 8–47.
3. *Галуа Э.* Сочинения. М., Л.: Гл. ред. общетехнической и технико-теоретической литературы, 1936.
4. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
5. *Кондратьев А.С.* Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Уро РАН, 2009.
6. *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры. Ижевск: Ижев. республ. типогр., 1999.
7. *Шевалле К.* О некоторых простых группах // Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 1958. 2:1. С. 3–53.
8. *Buekenhout F.* Diagrams for geometries and groups// Journal of Combinatorial Theory. 1979. Vol. 27, № 2. P. 121–151.
9. *Cartan É.* Sur la structure des groupes de transformations finis et continus // Oeuvres complètes. Paris. 1894. Vol. 1. P. 137–287.
10. *Dickson L.E.* Linear groups with an exposition of the Galois field theory. Leipzig: Teubner, 1901. N.Y.: Dover, 1958.
11. *Faulkner J.R.* Octonion planes defined by quadric Jordan algebras // Memoirs of the American mathematical society. 1970, №104. P. 1–71.
12. *Jordan C.* Traite´ des substitutions et des équations algébriques. Paris: Gauthier-Villars, 1957. 667 p.
13. *Killing W.* Gie Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen// Math. Ann. 1888. Bd. 31. S. 252–290; 1889. Bd. 33. S. 1–48; 1889. Bd. 34. S. 57–122; 1890. BD. 36. S. 161–189.
14. *Ree R.* On some simple groups defined by C. Chevalley // Transactions of the American mathematical society. 1957. V. 84. P. 392–400.
15. *Suzuki M.* A new type of simple groups of finite order // Proceedings of the National academy of sciences of the United States of America. Washington. 1960. Vol. 46. P. 868–870.
16. *Suzuki M.* On a class of doubly transitive groups // Annals of mathematics / 1962(2). Vol. 75. P.105–145.
17. *Tits J.* Les "formes réelles" des groupes de type E_6 // Seminaire Bourbaki / Exposé 162. Paris, 1958.
18. *Tits J.* Groupes algebriques semi-simples et géométries associées // Algebraical and topological foundations of geometry / Proceedings of Colloquium. Oxford, London, New York, Paris: Pergamon Press. 1962. P. 175–192.
19. *Tits J.* Groupes simples et géométries associées // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, August, 1962. Stockholm, 1963. P. 197–221.
20. *Вавилов А.Н.* Конкретная теория групп. URL:http://www.caam.rice.edu/~yad1/miscellaneous/References/ Math/Groups/grouint.pdf (дата обращения: 18.10.2016).
21. URL:http://www.abelprize.no/c53860/binfil/download.php?tid=54348 (дата обращения: 20.10.2016). Академия Норвегии приняла решение присудить Абелевскую премию за 2008 г.

Combinatorial-geometric interpretations of finite simple groups of Lie type

V. G. Alyabieva
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
alyabieva@rambler.ru

The article presents the results of classifying finite simple groups of Lie type and their combinatorial-geometric interpretations. Interpretations of finite simple Lie groups are automorphism groups of finite geometries and incidence systems.

Keywords: *finite simple groups of Lie type; groups of geometric transformations; classifications of finite simple groups; interpretations of finite simple groups.*

Combinatorial-geometric interpretation of finite simple groups of Lie type

V. G. Alyabieva
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
alyabieva@rambler.ru

The article contains an overview of the results of the classification of finite simple groups Lie type and combinatorial and geometric interpretations. Interpretations of finite simple Lie groups are the automorphism groups of finite geometries and the incidence systems

Keywords: *finite simple groups of Lie type; groups of geometric transformations; the classifications of the finite simple groups; interpretations of finite simple groups.*