

УДК 539.3

## Волны в цилиндрической оболочке с вязкой жидкостью

И. И. Сафаров, М. Х. Тешаев, З. И. Болтаев

Бухарский инженерно-технологический институт  
Республика Узбекистан, 105017, Бухара, ул. К. Муртазаева, 15  
safarov54@mail.ru, (+99893) 625-08-15

Рассматривается распространение собственных крутильных и продольно-поперечных волн в бесконечной по длине вязкоупругой цилиндрической оболочке с вязкой жидкостью. Амплитуды колебаний считаются малыми, что позволяет записать основные соотношения оболочки и жидкости в рамках линейной теории механики сплошных сред. После некоторых несложных операций получена система дифференциальных уравнений первого порядка с комплексными коэффициентами, которая решается методом ортогональной прогонки с сочетанием метода Мюллера на комплексной арифметике. Получены численные результаты комплексных значений фазовой скорости от волнового числа.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка; жидкость; ортогональная прогонка; фазовая скорость; волновое число; трансцендентное уравнение.

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-3-82-93

### Введение

Задача о распространении волн в цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью, имеет важное прикладное значение. Явление распространения волнообразного движения жидкости в упругих цилиндрических оболочках привлекало внимание многих исследователей [1–7]. В этих работах, посвященных волновым процессам в системе "упругая цилиндрическая оболочка – идеальная жидкость", используются классические и уточненные уравнения оболочек, рассмотрено влияние радиальных и продольных инерционных сил, учтена средняя плотность потока жидкости или газа. В работах [8–10] проводится анализ закономерностей волнового процесса в упругой оболочке с вязкой жидкостью в рамках модели линеаризованных уравнений гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости. Полученные дисперсионные уравнения выражаются при помощи асимптотических формул, т.е. через специальные функции [11, 12]. Тогда дисперсионное уравнение сводится к трансцендентному или алгебраическому уравнению, которые легко решаются.

В настоящей работе система "цилиндрическая оболочка–жидкость" рассматривается

как диссипативно-неоднородная механическая система [13, 14], уравнения которой решаются численно методом ортогональной прогонки с сочетанием метода Мюллера на комплексной арифметике [15, 16].

### Постановка задачи

Рассматривается бесконечная по длине вязкоупругая цилиндрическая оболочка радиуса  $R$  с постоянной толщиной  $h_0$ , плотностью  $\rho_0$ , коэффициентом Пуассона  $\nu_0$ , заполненная в вязкую жидкость с плотностью  $\rho_0^*$ . Колебания такой оболочки под внутренней нагрузкой, плотность которой обозначим в цилиндрической системе  $(r, \theta, z)$  координат  $\vec{p}(p_r, p_\theta, p_z)$  соответственно, можно описать, следуя уравнению [17]:

$$L\vec{u} - \int_0^t LR_E(t-\tau)\vec{u}(\vec{r}, \tau)d\tau = \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0 h_0} \vec{p} + \rho_0 \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь  $L$  – матрица дифференциальных операторов теории оболочек. Размерность матрицы  $L$  – различна для различных теорий обо-

лочек. Коэффициент Пуассона для оболочек, подчиняющихся гипотезе Кирхгофа–Лява, можем записать:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1-\nu_0}{2R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{1+\nu_0}{2R_1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} & \nu_0 \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1+\nu_0}{2R_1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} & \frac{1+\nu_0}{2} (1+4a) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (1+a) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - a(2-\nu_0) \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \theta} - \frac{a}{R_1^2} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\ \frac{\nu_0}{R_1} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - a(2-\nu_0) \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \theta} - \frac{a}{R_1^2} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} & \frac{1}{R_1^2} + a \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \end{pmatrix},$$

где  $a = h_0^2 / 12R_1^2$ ,  $R_1 = R + \frac{h_0}{2}$ ,  $\vec{u} = \vec{u}(u_r, u_\theta, u_z)$  – вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки, причем для оболочек Кирхгофа–Лява он имеет размерность, равную трем ( $u_r = u$ ;  $u_\theta = v$ ;  $u_z = w$ ). Для оболочек типа Тимошенко размерность вектора  $\vec{u}$  равно пяти и матрица дифференциальных операторов –  $L(5 \times 5)$  [18]. Здесь кроме осевого, окружного и нормального перемещений добавляются еще углы поворота нормали к срединной поверхности в осевом и окружном направлениях;  $R_E(t - \tau)$  – ядро релаксации;  $E_0$  – мгновенный модуль упругости [19]. На функцию влияния  $R_E(t - \tau)$  накладываются обычные требования интегрируемости, непрерывности (кроме  $t = \tau$ ), знако-определенности и монотонности:

$$R > 0, \quad \frac{dR(t)}{dt} \leq 0, \quad 0 < \int_0^\infty R(t) dt < 1.$$

Амплитуды колебаний считаются малыми, что позволяет записать основные соотношения в рамках линейной теории механики сплошных сред. Систему линеаризованных уравнений движения вязкой баротропной жидкости можно представить в виде [8, 9, 20]:

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nu^* \Delta \vec{g} + \frac{1}{\rho_0^*} \text{grad } P - \frac{\nu^*}{3} \text{grad } \text{div } \vec{g} = 0 \quad (2, a)$$

$$\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \text{div } \vec{g} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial \rho^*} = a_0^2, a_0 = \text{const}. \quad (2, б)$$

При  $R_1 = R + \frac{h_0}{2}$ ,  $\dot{u}_z = \mathcal{G}_z$ ,  $\dot{u}_r = \mathcal{G}_r$ ,  $\dot{u}_\theta = \mathcal{G}_\theta$ ,

$$p_z = -p_{rz}, p_\theta = -p_{r\theta}, p_r = -p_{rr}, \quad (2, c)$$

где

$$p_{rz} = \mu^* \left( \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial z} \right);$$

$$p_{rr} = -p + \lambda^* \left( \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial z} + \frac{\mathcal{G}_r}{r} \right) + 2\mu^* \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r};$$

$$p_{r\theta} = \mu^* \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial r} - \frac{\mathcal{G}_\theta}{r} \right).$$

Здесь в уравнениях (2, а, б, с)  $\vec{g} = \vec{g}(\mathcal{G}_r, \mathcal{G}_\theta, \mathcal{G}_z)$  – вектор скорости частиц жидкости;  $\rho^*$  и  $\vec{p}$  – возмущение плотности и давление в жидкости;  $\rho_0^*$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $\nu^*$ ,  $\mu^*$  – кинематический и динамический коэффициенты вязкости; для второго коэффициента вязкости  $\lambda^*$  принято соотношение  $\lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*$ ;  $p_{rz}, p_{rr}, p_{r\theta}$  – составляющие тензора напряжений в жидкости. Соотношения (1) и (2 а, б, с) представляют собой замкнутую систему соотношений гидровязкоупругости для цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость.

Кроме того, подлежат исследованию совместные колебания оболочки и жидкости, гармонические по осевой координате  $z$  и экспоненциально затухающие по времени либо гармонические по времени и затухающие по  $z$ .

### Методы решения

Принимаем интегральные члены в (1) малыми, тогда функции  $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{\psi}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_r t}$ , где  $\vec{\psi}(\vec{r}, t)$  – медленно меняющаяся функция

по времени,  $\omega_R$  – действительная константа. Далее применяем процедуру замораживания [21], тогда интегро-дифференциальное уравнение (1) принимает следующий вид:

$$L[1 - \Gamma^C(\omega_R) - i\Gamma^S(\omega_R)] \bar{u} = \frac{(1 - \nu_0^2)}{E_0 h_0} \bar{p} + \rho_0 \frac{(1 - \nu_0^2)}{E_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\Gamma^C(\omega_R) = \int_0^\infty R(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau,$$

$$\Gamma^S(\omega_R) = \int_0^\infty R(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau,$$

соответственно, косинус и синус образы Фурье ядра релаксации материала,  $\omega_R$  – действительная величина.

В качестве примера вязкоупругого материала примем трехпараметрическое ядро релаксации [22]  $R(t) = Ae^{-\beta t} / t^{1-\alpha}$ .

Раскрывая уравнения (2) и (3) в координатной форме, нетрудно заметить, что соотношения (2)–(3) распадаются на независимые краевые задачи:

– крутильные колебания:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2p_{r\theta}}{r} + \frac{\partial p_{\theta z}}{\partial z} &= \rho_0^* \ddot{\theta}, \\ p_{r\theta} &= \mu^* \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\theta}{r} \right), \quad p_{\theta z} = \mu^* \frac{\partial \theta}{\partial r}, \\ r = R_1: \quad \bar{G} h_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - (\rho_0 h i i_\theta \pm \sigma_\varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\bar{G} = \frac{\bar{E}}{2(1 + \nu_0)},$$

$$r = 0: \quad p_{r\theta} = 0,$$

где  $\bar{E} = E_0(1 - \Gamma^C(\omega_R) - i\Gamma^S(\omega_R))$ ;

– продольно-поперечные колебания:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{p_{rr} - p_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} &= \\ = \rho_0^* \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial t} \frac{\partial p_{rz}}{\partial r} + \frac{p_{rz}}{r} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} &= \rho_0^* \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial t} \\ = \rho_0^* \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial t} \frac{\partial p_{rz}}{\partial r} + \frac{p_{rz}}{r} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} &= \rho_0^* \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial t} \end{aligned}$$

$$p_{rr} = -p + \lambda^* k_\eta \operatorname{div} \bar{\mathcal{G}} + 2\mu^* \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r},$$

$$p_{\theta\theta} = -p + \lambda^* \operatorname{div} \bar{\mathcal{G}} + 2\mu^* \frac{\mathcal{G}_r}{r}; \quad (5)$$

$$p_{zz} = -p + \lambda^* \operatorname{div} \bar{\mathcal{G}} + 2\mu^* \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial z};$$

$$p_{rz} = \mu^* \left( \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial z} \right),$$

$$p_{r\theta} = \mu^* \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial r} + \frac{\mathcal{G}_r}{r} \right)$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \bar{\mathcal{G}} = 0,$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathcal{G}} = \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} + \frac{\mathcal{G}_r}{r} + \frac{\partial \mathcal{G}_z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = a_0^2,$$

$$\begin{aligned} r = R_1: \quad \bar{D} \frac{\partial^4 u_r}{\partial z^4} + \frac{\bar{C}}{R_1} \left( \frac{u_r}{R_1} + \nu_0 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + p_{rr} + \\ + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0, \end{aligned}$$

$$\bar{C} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - (p_{rz} \pm \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}) = 0,$$

$$r = 0: \quad p_{rz} = 0, \quad u_r = 0,$$

где  $\bar{D} = \bar{E} h_0^3 / (12(1 - \nu_0^2))$ ,  $\bar{C} = \bar{E} h_0 / (1 - \nu_0^2)$ .

Пусть волновой процесс периодичен по  $z$  и затухает по времени, тогда задается действительное волновое число  $k$ , а комплексная частота является искомым собственным значением. Решения краевых задач (4)–(5) для основных неизвестных, удовлетворяющие наложенным выше ограничениям на зависимость по времени и координате  $z$ , следует искать в виде [14, 23]

$$\begin{aligned} (p_{rr}, p_{rz}, p_{r\theta}, \bar{u}, \bar{\mathcal{G}})^T = \\ = \sum_m (\sigma_{rm}(r, \theta, z, t), \tau_{zm}(r, \theta, z, t), \\ \tau_{\varphi m}(r, \theta, z, t), \bar{u}_m(r, \theta, z, t), \bar{\mathcal{G}}_m(r, \theta, z, t))^T, \end{aligned} \quad (6, a)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_m(r, \theta, z, t) &= \bar{u}_m \{W_m, V_m, U_m\}^T, \\ \bar{\mathcal{G}}_m(r, \theta, z, t) &= \bar{\mathcal{G}}_m \{\mathcal{G}_{rm}, \mathcal{G}_{\theta m}, \mathcal{G}_{zm}\}^T. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Выражение (6, a) представим в виде} \\ (\sigma_{rm}(r, \theta, z, t), \tau_{zm}(r, \theta, z, t), \tau_{\varphi m}(r, \theta, z, t))^T = \end{aligned} \quad (6, б)$$

$$= (\sigma_r \cos(m\theta), \tau_z \cos(m\theta), \tau_\varphi \sin(m\theta))^T e^{i(kz - i\omega t)},$$

$$(\bar{u}_m(r, \theta, z, t), \bar{\mathcal{G}}_m(r, \theta, z, t))^T =$$

$$= (w \cos(m\theta), v \sin(m\theta), u \cos(m\theta)),$$

$$\mathcal{G}_r \cos(m\theta), \mathcal{G}_\theta \cos(m\theta), \mathcal{G}_z \cos(m\theta))^T e^{i(kz - i\omega t)}, \quad (6, в)$$

где  $\sigma_r, \tau_z, \tau_\varphi, W_m, V_m, U_m, \mathcal{G}_r, \mathcal{G}_\theta, \mathcal{G}_z$  – амплитудная комплексная вектор-функция;  $\kappa$  – волновое число;  $c$  – фазовая скорость;  $\omega$  – комплексная частота;  $m$  – окружное волновое число (число окружных волн), принимающее значения  $m = 1, 2, 3 \dots$ . Случай  $m = 0$  – осесимметричные колебания. Такой подход позволит искать решение задачи для каждого фиксированного значения окружного волнового числа  $m$  независимо.

Для выяснения их физического смысла рассмотрим два случая:

1)  $\kappa = \kappa_R; c = c_R + ic_I$ , тогда решение (4) и (5) имеют вид синусоиды по  $z$ , амплитуда которой затухает по времени;

2)  $\kappa = \kappa_R + i\kappa_I; c = c_R$ , тогда в каждой точке  $z$  колебания установившиеся, но по  $z$  затухают.

Суперпозиция решений (6) образует экспоненциально затухающую по времени стоячую волну, которая описывает собственные колебания жидкости и цилиндрической оболочки конечной длины с краевыми условиями. При бесконечной длине оболочки по аналогии указанный тип движения (6) будем называть **собственными или свободными** колебаниями.

В случае стационарного по времени и затухающего по координате процесса, наоборот, известной является действительная частота  $\omega$ , а искомым – комплексное волновое число  $k$ . В отличие от собственных, эти колебания условимся называть **установившимися**. Действительные части величин  $\omega$  в первом случае, и  $k$  во втором имеют физический смысл частот процесса по времени и координате соответственно. Мнимые части – скорость затухания волновых процессов по времени, и  $Z$  соответственно [14, 23]. Степень затухания волнового процесса на временном периоде характеризуется логарифмическим декрементом

$$\delta_c = 2\pi |\operatorname{Im} \omega| / \operatorname{Re} \omega, \quad (7, a)$$

аналогично пространственный декремент равен

$$\delta_y = 2\pi |\operatorname{Im} k| / \operatorname{Re} k. \quad (7, б)$$

Можно ввести также понятие фазовых скоростей распространения собственных и установившихся движений  $c_0 = \frac{\operatorname{Re} \omega}{R}, c_c = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k}$ .

Подставляя решения (6) в систему дифференциальных уравнений (4)–(5) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

с комплексными коэффициентами, которая решается методом ортогональной прогонки Годунова с сочетанием метода Мюллера [16] в комплексной арифметике.

### Крутильные колебания

После выполнения в (5) замены переменных (6, а, б, с) разрешающие соотношения, описывающие стационарные крутильные колебания системы "оболочка–жидкость", формулируются в виде спектральной краевой задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_\varphi}{dr} &= -(\rho_0^* \omega^2 - i\mu^{*2} \kappa^2 \omega) \mathcal{G}_\theta - \frac{2\tau_\varphi}{r}, \\ \frac{dv}{dr} &= \frac{\mathcal{G}_\theta}{r} + \frac{i}{\omega \mu^*} \tau_\varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

$$r = R_1 : h_0 (\overline{G} k^2 - k \rho_0 \omega^2) \mathcal{G}_\theta \pm \tau_\varphi = 0,$$

$$r = 0 : \tau_\varphi = 0.$$

Исследуем сначала колебания жидкости в неподвижных жестких цилиндрических оболочках. Тогда уравнения (8) можно преобразовать к одному уравнению относительно перемещения  $\mathcal{G}_\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{G}_\theta}{dr^2} + \frac{d\mathcal{G}_\theta}{r dr} + \left(-k^2 + i \frac{\omega}{v^*} - \frac{1}{r^2}\right) \mathcal{G}_\theta &= 0; \\ v^* &= \frac{\mu^*}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение уравнения (9) имеет вид

$$v = A_1 J_1 \left( r \sqrt{-k^2 + i \frac{\omega}{v^*}} \right) + B_1 N_1 \left( r \sqrt{-k^2 + i \frac{\omega}{v^*}} \right), \quad (9, a)$$

где  $J_1$  и  $N_1$  – функции Бесселя и Неймана, соответственно, первого рода и первого порядка;  $A_1$  и  $B_1$  – произвольные постоянные. Ограниченно при  $r=0$  решение уравнения (9, а) имеет вид

$$v = A_1 J_1 \left( r \sqrt{-k^2 + i \frac{\omega}{v^*}} \right). \quad (10)$$

Учитывая неподвижность оболочки, получаем дисперсионное уравнение

$$J_1 \left( R_1 \sqrt{-k^2 + i \frac{\omega}{v^*}} \right) = 0, \quad (11)$$

$$\text{откуда} \quad \omega_n = -i(v^* k^2 + \Gamma_n^2) \quad (12)$$

в случае собственных колебаний, и

$$k_n = \sqrt{-\frac{\Gamma_n^2}{v^*} + i\frac{\omega}{v^*}} \quad (13)$$

в случае установившихся колебаний. Здесь через  $\Gamma_n$  обозначены корни функции Бесселя, отнесенные к  $R$ . Как видно из формул (12)–(13), собственные движения всегда апериодичны по времени [14], в то время как установившиеся движения носят колебательный характер. А узловые точки перемещаются со скоростью  $c_n = \omega / \text{Re } k$ , монотонно возрастающей от нуля до бесконечности с увеличением  $\omega$  или вязкости  $v^*$ . Эти характерные особенности движения вязкой среды будут проявляться в последующих более сложных примерах.

Рассмотрим теперь соотношения (8) для случая внутреннего расположения жидкости. Эта задача решается в специальных функциях математической физики [24]. Тогда имеем дисперсионное уравнение

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \frac{\omega v^*}{a^3 \tilde{p} \tilde{h} R_1^2} + (z \frac{J_0(z)}{J_1(z)} - 2) = 0, \quad (14)$$

которое впервые было получено в работе А. Гузя [8]. Здесь введены новые обозначения:

$$\tilde{p} = \frac{\rho^*}{\rho_0}; \tilde{h} = \frac{h}{R_1}; z = R_1 \sqrt{-k^2 + i\frac{\omega}{v^*}}; a = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}}$$

– скорость волны сдвига оболочки. Непосредственное решение уравнения (14) наталкивается на определенные трудности, вызванные необходимостью вычисления функции Бесселя комплексного аргумента. Поэтому исследуем (14) с помощью асимптотических представлений этих функций при малых и больших аргументах  $z$ . Малость  $z$  имеет место при низкочастотных колебаниях. Согласно известным разложениям  $J_0$  и  $J_1$ , их степенные ряды имеют вид:

$$J_0 = 1 - \frac{z^2}{4} = \dots; J_1(z) = \frac{z}{2} (1 - \frac{z^2}{8} + \dots). \quad (15)$$

Удерживая в разложениях (15) только первые члены, получаем

$$-k^2 + \frac{\omega}{a^2} = 0$$

– дисперсионное уравнение крутильных колебаний сухой оболочки или заполненной идеальной жидкостью. Сохраняя в (15) по два первых члена, имеем уравнение

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + i\frac{\omega v^*}{4a^2 \tilde{p} \tilde{h}} (k^2 - i\frac{\omega}{v^*}) = 0. \quad (16)$$

Корень уравнения (16) в случае установившихся колебаний определяется выражением

$$k = \frac{\omega}{a} \left[ \left( 1 + \frac{1}{4\tilde{p}\tilde{h}} \right) / \left( 1 - \frac{\omega v^*}{4a^2 \tilde{p}\tilde{h}} \right) \right]^{1/2}. \quad (17)$$

Физическая интерпретация уравнения (17) приводится ниже. Рассмотрим теперь ситуацию, когда  $z$  достаточно велико, что соответствует высокочастотным колебаниям и малой вязкости. В этом случае асимптотические формулы для функции Бесселя имеют вид

$$J_0(z) \cong \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right), \quad (18)$$

$$J_1(z) \cong \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right).$$

Исходя из (16) и (17) нетрудно показать, что вполне достаточно большой положительной мнимой части  $z$ :  $J_0(z)/J_1(z) \cong -i$ . (19)

Подставляя (19) в (14) и дополнительно предполагая малость  $v^*$  по сравнению с величиной  $\frac{\omega}{k^2}$ , получим приближенное дисперсионное уравнение, которое также приводится в работе [8]:

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{a^3} \left( 1 + \sqrt{\frac{v^*}{\omega}} \frac{\tilde{p}}{\tilde{h} R_1} \frac{l+i}{1,41} \right) = 0. \quad (20)$$

Откуда, при стремлении коэффициента вязкости  $v^*$  к нулю (а также при стремлении  $\omega$  к бесконечности), имеем тривиальный результат  $\frac{\omega}{k} \rightarrow a$ , который был получен при малых  $\omega$  из уравнения (17).

Отметим, что уравнение (20) неприемлемо при больших вязкостях. В данном случае фазовая скорость  $c$  неограниченно возрастает с ростом  $\omega$ . Рассмотренный пример свидетельствует о несогласованности различных асимптотических оценок в области средних частот колебаний.

Таким образом, при анализе волновых процессов асимптотическими методами в первом приближении не удастся установить границы применимости полученных формул, а также оценить погрешность вычислений. В настоящей работе для решения спектральных задач используется непосредственное численное интегрирование разрешающих соотношений типа (8) с помощью метода ортогональной прогонки в комплексной арифметике. Такой подход позволяет избежать указанных

выше затруднений, связанных с вычислением функций Бесселя комплексного аргумента.

В результате проведенного численного исследования было установлено, что задача о собственных колебаниях (8) допускает не более одного комплексного значения  $\omega$ , соответствующего колебаниям оболочки вместе с прилегающими к ней слоями жидкости. Остальные найденные собственные значения оказались чисто мнимыми. Они соответствуют аperiodическим движениям жидкости при почти неподвижной оболочке.

### Продольно-поперечные колебания

Рассматриваются стационарные продольно-поперечные колебания оболочки, заполненной жидкостью, которые в соответствии с (5)–(6) могут быть описаны системой четырех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_r}{dr} &= -\frac{\vartheta_r}{r} - ik\vartheta_z - p, \\ \frac{d\vartheta_z}{dr} &= -ik\vartheta_r + \frac{1}{v^*\omega}\tau_z, \\ \frac{d\sigma_r}{dr} &= -\rho_0^*\omega^2\vartheta_r + 2i\mu^*\omega\left(\frac{d\vartheta_r}{dr} - \frac{\vartheta_r}{r}\right) - ik\tau_z, \\ \frac{d\tau_z}{dr} &= -\rho_0^*\omega^2\vartheta_z + 2\mu^*\omega k\left(\frac{d\vartheta_r}{dr} - ik\vartheta_z\right) - ik\sigma_r - \frac{\tau_z}{r}. \end{aligned} \quad (21)$$

С краевыми условиями

$$r=0: \quad \vartheta_r=0, \quad \tau_z=0;$$

$$r=R_1: \quad \bar{D}\nabla^4 u + \frac{\bar{C}}{R_1} \left( \frac{u}{R_1} + iv_0 k w \right) + \sigma_r - \rho_1 h \omega^2 u = 0;$$

$$\bar{C}(iv_0 k \frac{u}{R_1} - \nabla^2 u) - \tau_z + \rho_0 h_0 \omega^2 w = 0.$$

(22)

Величина  $p$  в первом уравнении системы (21) определяется через основные неизвестные согласно выражению

$$p = \frac{-\sigma_r + 2i\mu^*\omega \left( iku + \frac{\vartheta_r}{r} \right)}{\rho_0 c_0^2 - i\omega(k + 2\mu^*)}.$$

Спектральная задача (21), (22), как и в случае продольно-поперечных колебаний, решается методом ортогональной прогонки. Для нахождения корней характеристического уравнения используется метод Мюллера.

### Численные результаты

**1. Крутильные колебания.** Рассмотрим вариант собственных колебаний, когда оболочка заполнена жидкостью. Параметры обо-

лочки и коэффициенты вязкости приняты следующими:

$$h = 0,05; \quad \rho_0 = 40; \quad v_0 = 0,25,$$

$$h = 8,021 \cdot 10^{-4}; \quad \mu^* = 7,071 \cdot 10^{-4}; \quad C_0 = \infty, \quad ,$$

$$A = 0,048; \quad \beta = 0,05; \quad \alpha = 0,1.$$

На рис. 1 и рис. 2 приведены соответственно дисперсионные кривые в зависимости ( $\text{Re } \omega$ ,  $\text{Im } \omega$ ) от волнового числа  $k$ -первой моды, у которой коэффициенты демпфирования наименьшие. В соответствии с нумерацией графиков были заданы четыре различных значения коэффициента  $\mu^*$ :

1) 0,0009; 2) 0,0018; 3) 0,15; 4) 0,018.

Легко заметить характерное отличие в поведении дисперсионных кривых 1, 2 и 3, 4 (рис. 1). В последних двух случаях существует такое значение волнового числа, начиная с которого некоторая величина  $\omega$  принимает лишь чисто мнимые значения. Это соответствует аperiodическим движениям системы. Для кривых 1, 2 с меньшим коэффициентом вязкости действительная часть собственных значений  $\text{Re } \omega$  отлично от нуля при любых волновых числах, а декремент затухания имеет конечный предел на бесконечности. При этом, чем больше коэффициент вязкости, тем раньше начинаются аperiodические движения (кривые 3, 4) и тем выше предел декремента затухания (кривые 1, 2). Отсюда следует, что существует минимальное критическое значение коэффициента вязкости  $\mu_k^*$ , выше которого в зоне высоких волновых чисел первой моды появляются аperiodические движения. В результате численного эксперимента было установлено, что критическое значения коэффициента вязкости  $\mu_k^*$ , находится в пределах  $[0,0120 \ 0,0125]$

Следовательно, при малых волновых числах наблюдается линейная зависимость собственной формы  $v$  от радиуса, т. е. в движение вовлечена вся масса жидкости. По мере роста  $k$  центральная часть жидкости начинает "не успевать" за колебаниями оболочки, что приводит к локализации амплитуд. При этом скорость локализации зависит от вязкости жидкости (рис. 3, а, б). Если локализация происходит медленно, тогда начиная с некоторого  $k$  (вследствие роста напряжений  $p_{z\varphi}$ ) собственные движения становятся аperiodическими (кривые 3, 4). Если же средняя по объему амплитуда колебаний жидкости убы-

вадет достаточно быстро, то движения всегда будут сохранять колебательный характер (кривые 1, 2) (рис. 1 и рис. 2). При этом большие волновые числа напряжения  $p_{r\varphi}$  преобладают над напряжениями  $p_{z\varphi}$ , и увеличиваются по мере увеличения локализации. В силу последнего обстоятельства коэффициент демпфирования всегда растет с ростом  $k$  (рис. 2). Линейная зависимость формы  $\mathcal{Q}$  от радиу-

са при малых  $k$  свидетельствует также о выполнении гипотезы плоских сечений, на которой основана элементарная теория вязкоупругих стержней [14].

Таким образом, на основе обсуждения численных результатов установлено, что в случае сравнительно малой вязкости результаты расчета хорошо согласуются с асимптотическими решениями уравнения Гузя на высоких частотах.

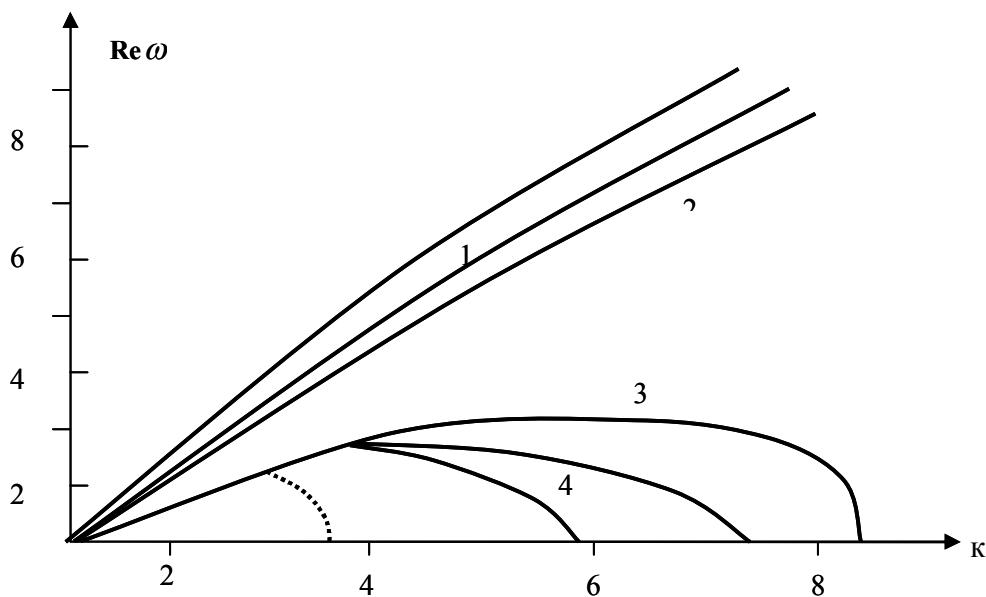


Рис. 1. Зависимость  $Re \omega$  от волнового числа  $k$  для крутильных колебаний

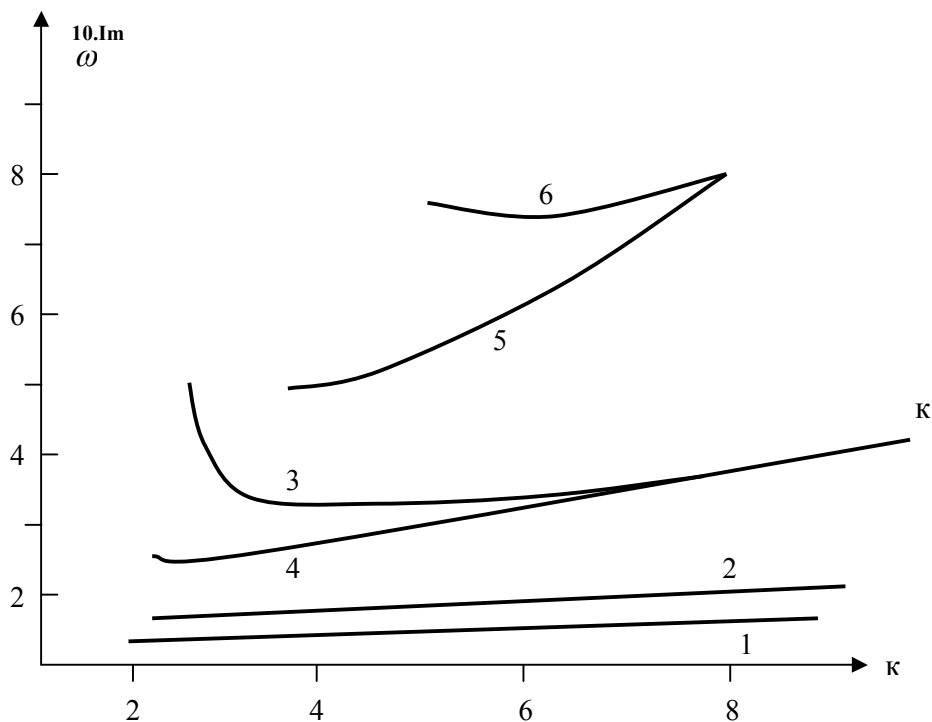
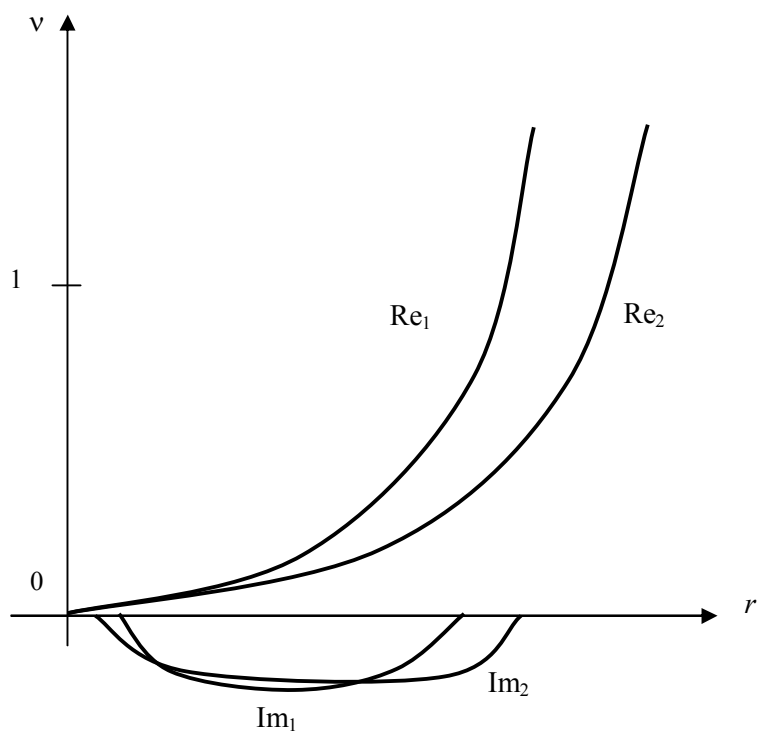
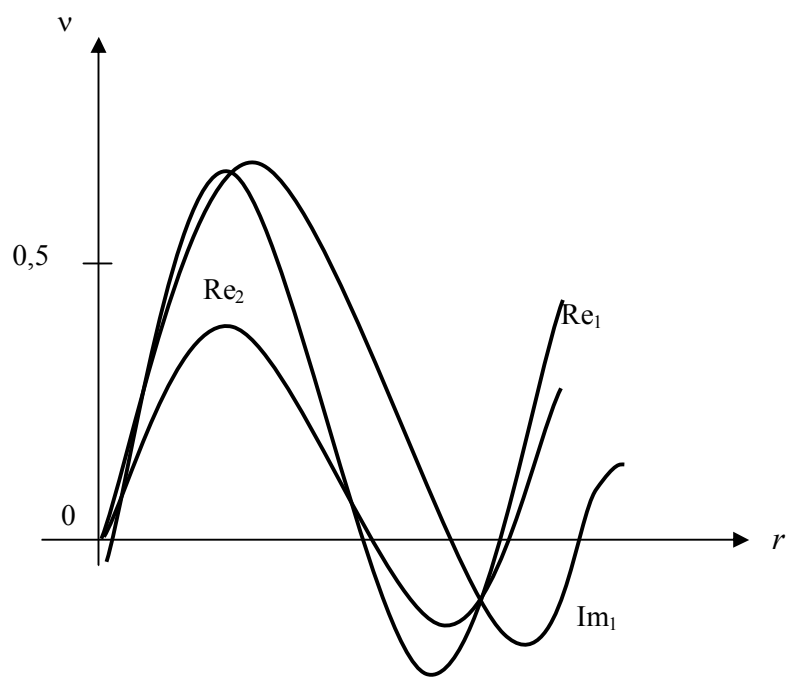


Рис. 2. Зависимость  $Im \omega$  от волнового числа  $k$  для крутильных колебаний



а)



б)

Рис. 3. Зависимость  $v$  от волнового числа  $r$  для крутильных колебаний  
а)  $\omega = 2$ ,  $\eta = 0,018$ -первая форма; б)  $\omega = 2$ ,  $\eta = 0,018$ -вторая форма



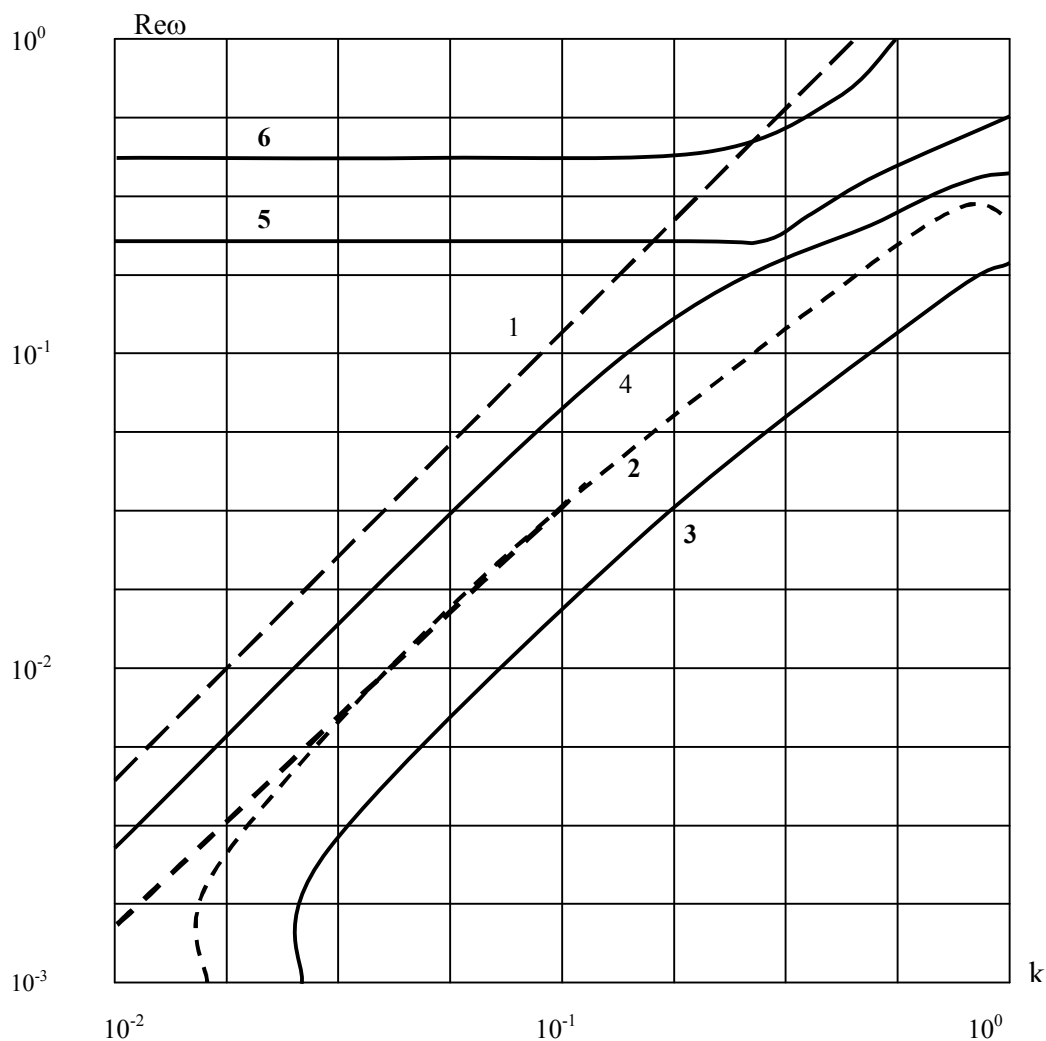


Рис. 4. Зависимости реальной частоты  $Re \omega$  от волновых чисел  $k$

$\omega$	1	2	3
5	8,976+i1,996	8,625+i2,259	8,955+i1,135
10	17,118+i2,132	16,927+i1,744	17,015+i1,958

В таблице приведены комплексные волновые числа первой моды, полученные методом ортогональной прогонки (колонка 1), путем непосредственного решения уравнения (14) с помощью асимптотических представлений (18) (колонка 2). А также результаты решения уравнения (20) (колонка 3).

## 2. Продольно-поперечные колебания

Приведем результаты численного исследования собственных колебаний. На рис. 4 и рис. 5 показаны дисперсионные кривые зависимости  $Re \omega$  и  $|\text{Im } \omega|$  от волнового числа  $k$  ( $C_0 = \infty$  в случае несжимаемой (штрих-

пунктирные линии) и сжимаемой жидкости ( $C_0=0,1$  сплошные линии)).

Параметры оболочки и коэффициенты вязкости приняты следующими:

$$h = 0,05; \rho_0 = 8; \nu_0 = 0,25,$$

$$h = 8,021 \cdot 10^{-4}; \mu^* = 7,071 \cdot 10^{-4}; C_0 = \infty,$$

$$A = 0,048; \beta = 0,05; \alpha = 0,1.$$

Здесь приводятся результаты в безразмерных величинах.

Для несжимаемой жидкости существуют две моды, соответствующие преимущественно продольным (кривая 3) и преимущественно поперечным (кривая 4) колебаниям оболочки, с комплексными собственными значениями. Кривым 5 и 6 соответствует вязкоупругая оболочка с сжимаемой жидкостью. Все остальные собственные движения имеют мнимые собственные значения, то есть апе-

риодичны по времени. Пунктирными линиями на рис. 4 обозначены дисперсионные кривые, соответствующие колебаниям оболочки с идеальной несжимаемой жидкостью. При введении вязкости частота колебаний первой моды снижается, по-видимому, за счет вовлечения в движение дополнительных масс жидкости в пограничном слое, а у второй моды появляется критическое волновое число, ограничивающее область колебательных движений снизу. В работе С.В. Васина, В.В. Миколоюка [25], использующего асимптотические методы решения, последний эффект обнаружить не удалось. Собственные движения оболочки и вязкой сжимаемой жидкости имеют бесконечное число мод.

На рис. 4, 5 приводятся дисперсионные кривые для первых четырех мод с минимальными частотами колебаний (кривые 3, 4, 5, 6), (кривые 3, 4, 5, 6 в порядке возрастания величины  $\text{Re } \omega$ ). Сравнивая кривые 1, 2 и 3, 4 между собой, можно убедиться, что вторая несколько уступает.

Первая мода колебаний системы "оболочка – сжимаемая жидкость" для выбранных параметров удовлетворительно описывается моделью несжимаемой жидкости в области волновых чисел  $k < 1$  (это дает основание при исследовании указанной системы в первом приближении пренебречь сжимаемостью жидкости).

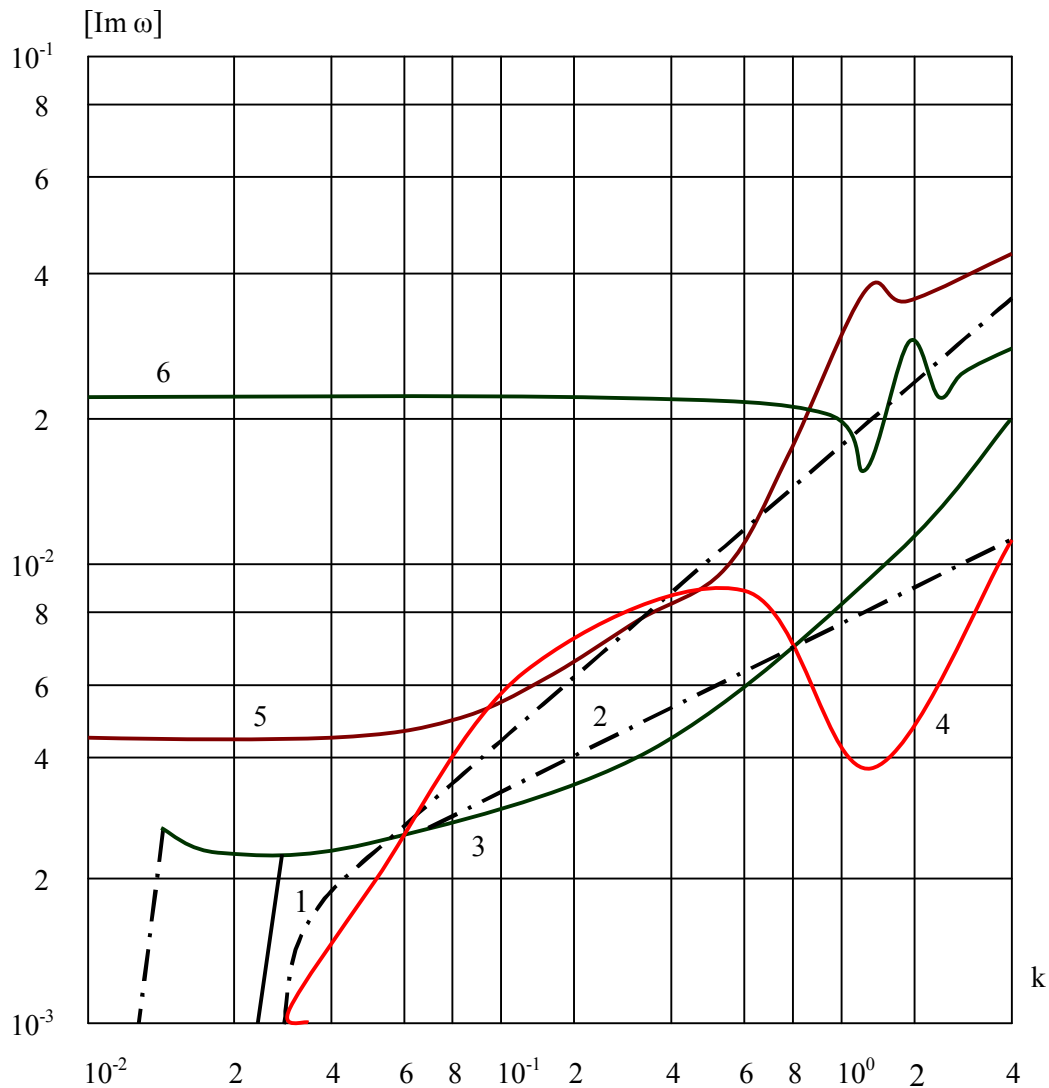


Рис. 5. Зависимость  $\text{Im } \omega$  от волнового числа  $k$

## Выводы

1. Численное исследование показало, что критическое значение  $V_k$  не зависит от вязкости жидкости, но с ростом величины  $\mu^*$  ослабевает зависимость колебаний коэффициента Пуассона, а отношение  $(\max im \omega) / (\min im \omega) \rightarrow 1$  и собственная форма  $U$  становятся плоскими. Однако в некоторых частных случаях, а именно при большой вязкости или при критическом значении коэффициента Пуассона, можно предложить способ оценки собственной частоты, основанной на стержневой модели.

2. При определении малой вязкости, частоты обеих мод механической системы близки между собой в низкочастотной области, а при высоких частотах фазовая скорость первой моды стремится к скорости в сухой оболочке. Коэффициенты демпфирования растут почти линейно, причем у второй моды этот коэффициент всегда больше, чем у первой.

3. Учет вязких свойств оболочки увеличивает на 5 % ÷ 10 % реальные и мнимые части значений фазовых скоростей.

## Список литературы

1. *Тер-Акопянц Г.Л.* Об уточнении результатов влияния жидкости на распространение волн в упругой цилиндрической оболочке // *Фундаментальные исследования. Технические науки.* № 10. 2013. С. 516–520.
2. *Sorokin S.V.* Fluid-Structure Interaction and Structural Acoustics. Book of Lecture Notes. Technical University of Denmark, 1997. 188 p.
3. *Morand H., Ohayon R.* Fluid Structure Interaction. Wiley. 1995. 220 p.
4. *Everstine G.C.* Finite Element Formulations of Structural Acoustic Problems // *Computers & Structures.* 1997. Vol. 65, № 3. P. 307–321
5. *Фролов К.В., Антонов А.Н.* Колебания оболочек в жидкости. М.: Наука, 1983. 365 с.
6. *Амензаде Р.Ю., Салманова Г.М., Муртуззаде Т.М.* Пульсирующее течение жидкости в оболочке с учетом эффекта жесткости внешней среды // *Bakı universitetinin xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası.* 2013. № 1. С. 70–78.
7. *Амензаде Р.Ю.* Неосесимметричное колебание идеальной жидкости в упругой оболочке // *ДАН СССР.* Т. 229, № 3. 1976. С. 566–568.
8. *Гузь А.Н.* Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью // *Прикладная механика.* 1980. 16, № 10. С. 10–20.
9. *Шурук Г.И.* К вопросу о распространении неосесимметричных волн в гидроупругой системе оболочка – вязкая жидкость // *Системные технологии.* 3(62). С. 76–81.
10. *Мокеев В.В., Павлюк Ю.С.* О приближенном учете сжимаемости жидкости в задачах гидроупругости // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 1999. № 5. С. 85–95.
11. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова Думка, 1981. 284 с.
12. *Справочник по специальным функциям /* под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
13. *Сафаров И.И.* Колебания и волны в диссипативно неодородных средах и конструкциях. Ташкент: Фан, 1992. 250 с.
14. *Бозоров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И.* Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. СО РАН, Новосибирск, 1966. 188с.
15. *Годунов С.К.* О численных решениях краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи математических наук.* 1961. Т. 16, вып. 3. С. 171–174.
16. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с.
17. *Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И.* Волновые процессы в механическом волноводе. LAP. LAMBERT Academic publishing (Германия). 2012. 217 с.
18. *Перцев А.К., Платонов Э.Г.* Динамика оболочек и пластин: (нестационарные задачи). Л.: Судостроение, 1987. 316 с.
19. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
20. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа (задача аэроупругости). М.: Наука, 1976. 416 с.

21. Филатов А., Сунчалиев Р.М. О некоторых методах исследования нелинейных задач теории вязкоупругости // ДАН СССР. 1972. Т. 206, № 1. С. 201–203.
22. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976.
23. Каюмов С.С., Сафаров И.И. Распространение и дифракция волн в диссипативно-неоднородных цилиндрических деформируемых механических систем. Ташкент: ФАН, 2002. 214 с.
24. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
25. Васин С.В., Миколюк В.В. Свободные колебания соосных цилиндрических оболочек, разделенных вязкой жидкостью // Гидроаэромеханика и теория упругости. 1983. № 3. С. 108–116.

## Waves in a cylindrical shell with a viscous fluid

I. I. Safarov, M. Kh. Teshaeв, Z. I. Boltaev

Bukhara Engineering-Technological Institute; 15, K. Murtazayeva st., Bukhara, 105017, Uzbekistan  
safarov54@mail.ru; (+99893) 625–08–15

The paper considers the propagation property of torsional waves and longitudinal and transverse waves in a viscoelastic cylindrical shell which is infinite in length and contains a viscous fluid. The amplitudes of oscillations are considered to be small, which allows us to record the basic relationships of the membrane and fluid in the linear theory of continuum mechanics. Having performed some uncomplicated operations, we obtain a system of first order differential equations with complex coefficients, which can be solved by combining the orthogonal shooting method with Muller's method in complex arithmetic. Numerical results for complex values of the phase velocity of the wave number are obtained.

**Keywords:** *cylindrical shell; liquid; orthogonal sweep; phase velocity; wave number; transcendental equation.*

## The waves in cylindrical shell with a viscous fluid

I. I. Safarov, M. Ch. Teshaeв, Z. I. Boltaev

Bukhara engineering-technological institute;  
15, K. Murtazoyeva st., Buchara, 105017, Uzbekistan  
safarov54@mail.ru; (+99893) 625–08–15

The propagation property of torsional and longitudinal and transverse waves in an infinite in length viscoelastic cylindrical shell with a viscous fluid is considered. The amplitudes of the oscillations considered to be small, which allows you to record the basic relationships membrane and fluid in the linear theory of continuum mechanics. After some not complex operations, a system of first order differential equations with complex coefficients, which can be solved by a combination of orthogonal shooting method of Muller in the complex arithmetic. Numerical results of complex values of the phase velocity of the wave number is obtained.

**Keywords:** *cylindrical shell; liquid; orthogonal sweep; the phase velocity; wave number; a transcendental equation.*