

УДК 519.21:681.5.072

Применение функций Христового для анализа стохастических дифференциальных уравнений в частных производных в неограниченной области

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

В работе представлены методика и компьютерный алгоритм применения системы ортонормированных на всей действительной оси функций Христового, замкнутых относительно операций умножения и дифференцирования, для анализа стохастических дифференциальных уравнений в частных производных в неограниченной области на примере семейства уравнений Кортевега–де Фриза. Представлены результаты вычислений стохастических характеристик решения одного из этих уравнений, выполненных в среде пакета Mathematica.

Ключевые слова: стохастическая система; моделирование; дифференциальное уравнение в частных производных; приближенное аналитическое решение; функции Христового; моментные функции.

Введение

Быстрый рост вычислительной мощности в течение последних десятилетий дает возможность моделировать и прогнозировать сложные физические процессы, происходящие в технических устройствах, природе, обществе и др. Между тем в математических моделях большинства физических процессов мы сталкиваемся с неопределенностью из-за неполноты моделей, ошибок измерений и отсутствия знаний, связанных

с входными данными моделей. Случайные и стохастические дифференциальные уравнения с частными производными (СлДУвЧП, СДУвЧП) дают возможность включения неточных данных и внешних и/или внутренних возмущений в математические модели для последующего компьютерного моделирования. Эти уравнения позволяют описать влияние входных неопределенностей и случайных флуктуаций на характеристики состояния систем и в процессе обработки результатов моделирования дают возможность количественно оценить это влияние на функционирование исследуемых систем.

Однако дополнительная информация, представляемая моделями со случайными коэффициентами, приводит к дополнитель-

© Полосков И. Е., 2016

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-96019), а также Минобразования и науки России (Задание № 2014/153).

ным затратам. Соответствующие ДУвЧП формулируются в физической области в сочетании с выборочным пространством, порожденным случайными параметрами, и поэтому при анализе требуют значительных по объему вычислений. В последние десятилетия проводятся широкие научные исследования в области прикладной математики для разработки эффективных вычислительных средств для анализа СДУвЧП и СДУвЧП.

Случайные явления в системах с распределенными параметрами (системах с бесконечным числом степеней свободы) вызывают значительный интерес исследователей и практиков. Например, большое число работ посвящено анализу напряженно-деформируемого состояния и вибраций пластин и оболочек [1], случайных колебаний упругих стержней [2], машиностроительных конструкций [3], элементов оборудования [4], транспортных систем [5]; изучению случайного деформирования и колебаний в упруго-пластических материалах [6–8], стохастических режимов в лазерах [9] и химической технологии [10], движения волн (в том числе сейсмических) в случайно неоднородных средах [11–14], изменения статистических характеристик полей в гидромеханике [15–17]; исследованию процессов распространения звука [18], просачивания [19], в полимерах [20], композитах [21], молекулярных [22], микромеханических [23] и наномеханических [24] системах. Кроме того, важно решение проблем, связанных со случайными колебаниями зданий, в т.ч. при землетрясениях [25, 26], оптимальным приемом сигналов [27], устойчивостью вибраций [28], флуктуационной электродинамикой [14], горением [29] и др.

Например, в последнее время в гидродинамике стали рассматриваться все более сложные физико-химические и биологические явления на микроскопическом уровне, в т.ч. системы, для которых значимые взаимодействия происходят на разных уровнях [30]. На молекулярном уровне жидкости не являются детерминированными: состояние жидкости постоянно меняется и является стохастическим даже в условиях термодинамического равновесия. Поскольку модели-

рование жидкостей приводит на микроуровень, то случайные тепловые флуктуации играют все более важную роль при описании состояния жидкости, особенно при исследовании систем, в которых: а) микроскопические флуктуации приводят к макроскопическими явлениями типа развития неустойчивостей; б) тепловые флуктуации управляют движением взвешенных микрообъектов в сложных жидкостях. Некоторые примеры, в которых спонтанные флуктуации могут существенно повлиять на динамику системы, включают распад капель в струях, броуновские молекулярные моторы, конвекцию Рэлея–Бенара, течения Колмогорова, неустойчивость Рэлея–Тейлора, горение, детонацию, развитие фронта реакции и др.

Важность решения подобных задач для систем, возмущаемых нерегулярными силами и моментами, очевидна, в частности, в области техники и технологии (это связано с необходимостью уменьшения веса и стоимости конструкций, повышения надежности функционирования объектов при параметрических флуктуациях и др.).

Далее в настоящей работе дается обзор методов исследования стохастических систем с распределенными параметрами, постановка задачи, описывается используемый теоретический аппарат, а затем представляется методика и компьютерный алгоритм применения системы ортонормированных на всей действительной оси функций Христово для анализа СДУвЧП в неограниченной области на примере семейства уравнений Кортевега–де Фриза.

1. Постановка задачи

Рассмотрим семейство СДУвЧП типа Кортевега–де Фриза (КдФ-уравнение):

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \alpha U(x, t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x^3} = \Xi(x, t), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + \alpha U(x, t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x^3} - \gamma U(x, t) = \Xi(x, t) \quad (1.2)$$

(КдФ-уравнение с демпфированием),

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \alpha U(x,t) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + \\ + \beta \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x^3} - \gamma U(x,t) = \\ = \nu \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \Xi(x,t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

(уравнение Бюргерса–Кортевега–де Фриза, БКдФ-уравнение) с начальным условием

$$U(x,0) = U^0(x). \quad (1.4)$$

В уравнениях (1.1)–(1.4) $U(x,t)$ – неизвестное случайное поле, определенное на полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, причем

$$\text{l.i.m.}_{|x| \rightarrow +\infty} U(x,t) = 0$$

(l.i.m. – предел в среднем квадратичном); $U^0(x)$ – случайная функция с известными характеристиками; $\nu > 0$, α , β , γ – постоянные; $\Xi(x,t)$ – случайное поле, представляющее собой внешний шум.

Детерминированные формы КдФ-уравнения представляют собой универсальные модели для описания одномерных нелинейных волн в различных средах.

Наша задача состоит в вычислении основных статистических характеристик случайного поля $U(x,t)$ – функций математического ожидания и ковариации.

2. Методы анализа систем, описываемых СДУвЧП

Хорошо известно, что изучение динамики даже линейных стохастических систем с распределенными параметрами вызывает значительные трудности. С еще более сложными проблемами исследователи сталкиваются при анализе нелинейных объектов и систем с параметрическими возмущениями. При этом одним из наиболее часто применяемых подходов является построение моделей таких систем в форме пространственно-временных векторных марковских полей [32].

Математические модели пространственно-временных физических, химических, биологических и других систем, возмущаемых случайными шумами, часто строятся в виде стохастических дифференциальных уравнений с частными производных

(СДУвЧП) [33–37]. СДУвЧП содержат случайность, например в форме флуктуирующих сил, неопределенных параметров, случайных внешних возмущений и граничных условий. Уже давно признана необходимость учета подобных стохастических эффектов при моделировании сложных систем. Например, наблюдается повышенный интерес к математическому моделированию сложных явлений в виде СДУвЧП в климатологии, биофизике, физике конденсированных сред, материаловедении, информационных системах, машиностроении, электротехнике, а также в приложениях финансовой математики. Включение стохастических факторов в математические модели привело к новым интересным математическим задачам на стыке теории динамических систем, дифференциальных уравнений в частных производных и теории вероятностей. Проблемы, возникающие в контексте стохастического динамического моделирования, вдохновили сложные темы исследований о взаимодействии между неопределенностями, нелинейностями и многими масштабами. Они также мотивировали разработку эффективных численных методов для моделирования случайных явлений.

Для СДУвЧП решение можно рассматривать либо как одномерное случайное поле, удовлетворяющее многопараметрическому стохастическому обыкновенному дифференциальному уравнению (СОДУ), либо как стохастический процесс, индексированный параметром t , принимающий значения в бесконечномерном функциональном пространстве и являющийся решением бесконечномерного СОДУ [37].

Методы анализа стохастических аналогов классических линейных уравнений математической физики (параболических, гиперболических, колебаний балок, пластин и др.) [1, 25, 38] основаны на разложении решений уравнений в ряды по неслучайным собственным функциям соответствующих задач. При этом возможны два варианта: а) явное представление решений в виде рядов Фурье; б) расчет зависящих от времени коэффициентов при собственных функциях как решений систем ОДУ. В обоих вариантах далее следует вычисление необходи-

мых вероятностных характеристик решений исходных задач по стандартным формулам.

При решении несложных нелинейных задач, когда с достаточной точностью можно воспользоваться собственными функциями линеаризованных уравнений, схема решения соответствует второму варианту, рассмотренному в предыдущем абзаце. При этом основные трудности связаны с построением системы нелинейных СОДУ для коэффициентов разложения высокого порядка, что необходимо для получения приближенного решения исходной задачи с требуемой точностью.

Известно, что серьезные исследования в областях, связанных с анализом нелинейных СДУвЧП, начались относительно недавно (с начала 1970-х гг.) и были направлены на установление условий корректности постановки задач, устойчивости, эргодичности, существования инвариантной меры и др.

Основные теоретические подходы анализа СДУвЧП включают *теорию мартингалов*, *полугрупповой анализ* и *вариационные методы* [39].

При изучении линейных систем с распределенными параметрами, как правило, ограничиваются использованием методов корреляционного анализа [1, 2, 40]. При анализе же нелинейных объектов необходим подход, основанный на теории случайных марковских процессов. Но для использования этой теории требуется предварительная дискретизация задачи (обычно используются различные конечно-разностные схемы, методы Галёркина с разложением по формам свободных упругих колебаний и Фурье) и редукция к конечному числу степеней свободы, что вносит в задачу необратимую погрешность [25, 32].

Другим инструментом решения подобных задач является использование характеристических функционалов (ХФ) для случайных полей [11, 14]. Методика здесь состоит в выводе уравнений в функциональных производных для ХФ [41], а затем, после представления ХФ в виде ряда по моментам, в построении бесконечной цепочки зацепляющихся уравнений для этих моментов. Но данная методика сложна, громоздка и плохо приспособлена для решения практических задач.

Как и для анализа СОДУ, методы статистического моделирования (Монте-Карло, ММК) являются самыми общими, наиболее распространенным и применимыми для численного анализа любых стохастических систем с распределенными параметрами. Методы Монте-Карло концептуально просты и удобны в применении. Но несмотря на значительные усилия специалистов в направлении повышения их эффективности и универсальности [42–44], включая разработку многоуровневых методов Монте-Карло [45, 46], вследствие того, что: 1) при применении ММК для достижения требуемой точности необходимо генерировать большое количество реализаций возмущающих случайных полей, а следовательно, и полей, описывающих состояние исследуемых систем; 2) для правильного моделирования мелко-масштабных эффектов требуется использовать мелкую сетку [47], – основным недостатком ММК остается необходимость выполнения огромного объема расчетов, особенно для крупномасштабных проблем. Поэтому методы статистического моделирования по-прежнему используются в основном для проверки других подходов.

Рассмотрим некоторые приближенные методы исследования СДУвЧП. Сразу же необходимо заметить, что, как правило, такие методы являются комбинированием двух или более различных схем, а некоторые основаны на прямом переносе схем анализа систем, описываемых СОДУ, на область исследования процессов в сплошной среде, например, метод возмущений, представленный в монографиях [21, 48, 49], – аналог процедур стохастической теории чувствительности.

Весьма популярен в последнее время метод *полиномиального хаотического разложения* (ПХР, polynomial chaos expansion, а также Wiener Chaos expansion, Fourier-Hermite expansion), впервые представленный в монографии [48] как инструмент решения стационарных задач механики сплошной среды. Как и при анализе СОДУ, этот метод включает представление случайных величин на основе базиса ПХР и вывод соответствующих дискретных уравнений для коэффициентов разложения с помощью метода Галёркина.

Стохастические методы конечных элементов [48, 49] (СМКЭ) применяются для анализа сложных систем различного назначения, подверженных влиянию неопределенностей, которые моделируются как случайные поля. Эти методы аналогичны по своей концепции схемам детерминированных конечных элементов в том, что эти два класса методов аппроксимируют входные и выходные параметры в терминах конечномерных разложений в ряды и используют соотношения ортогональности для того, чтобы получить уравнения для расчета неизвестных характеристик системы. В стохастическом случае входные возмущения являются случайными полями с известными вероятностными или статистическими описаниями, а скалярные произведения определяются через математические ожидания. Основным преимуществом такого подхода является возможность реализации алгоритма в виде внешнего окаймления (цикла) вокруг детерминированных процедур. Таким образом, данный подход является разумным расширением традиционных детерминированных схем [50].

Аналогично СМКЭ, такие схемы, как стохастические методы *Галёркина* [51] и различные его варианты, *конечных объемов* [30], *коллокаций* [52], являются переносом соответствующих детерминированных идей на стохастические задачи.

Стохастические конечно-разностные методы (СКРМ) [53] также являются результатом прямого переноса детерминированных КРМ [54] на область стохастических задач и приводят к двум основным вариантам построения схем расчетов: 1) применению конечных разностей для аппроксимации частных производных и по временной, и по пространственным переменным, после чего следуют вычисления значений неизвестного векторного случайного поля по явным или неявным соотношениям; 2) использование конечных разностей только для аппроксимации частных производных по пространственным переменным, что приводит к необходимости численного интегрирования систем СДУ, описывающих поведение узловых значений поля во времени. Лучший выбор схемы зависит от того, как дискрети-

зации нелинейностей и других членов взаимодействует между собой. Здесь традиционный подход с учетом дискретизации отдельно каждого члена в уравнении непригоден. Чтобы найти лучшую дискретизацию, необходимо учесть сложное взаимодействие всех слагаемых в СДУвЧП.

Регулярное ортогональное разложение (proper orthogonal decomposition, POD) [55, 56] – один из важнейших современных методов анализа стохастических явлений, позволяющий получать малоразмерные приближенные описания поведения сложных объектов и нашедший применение при решении многих инженерных задач (колебания конструкций, хаотическая динамика, поведение реакторов, микроэлектромеханические системы, турбулентные течения жидкости, океанография, аэродинамика, идентификация процессов и управление в химической технологии, обработка изображений, анализ сигналов, сжатие данных и др.). Основой такого описания является построение эмпирических собственных функций, которые обеспечивают наиболее эффективный способ отображения доминирующих компонентов бесконечномерного процесса с помощью малого числа "мод" [57]. Модификациями POD являются методы biorthogonal decomposition (BOD) [58], complex orthogonal decomposition (COM) [59] и reduced-order modeling (ROM) [60].

Исходя из современных воззрений, считается, что POD состоит из трех методов: разложения Карунена–Лоэва (Karhunen–Loeve decomposition, KLD) [61], анализа главных компонент (principal component analysis, PCA) [62] и сингулярного разложения (singular value decomposition, SVD) [63]. При этом показано (см. также ссылки в [57]), что при определенных условиях эти методы (асимптотически) эквивалентны.

Метод моментов применяется как альтернатива высокочувствительным с вычислительной точки зрения схемам, связанным с прямым использованием статистического моделирования. В рамках этого метода получают систему детерминированных ДУвЧП [64], решением которой являются моментные функции (как правило, первых двух порядков) случайных полей, определяющих состо-

яние системы. При необходимости используется какая-либо схема замыкания. Тем не менее, вычислительные затраты для этого метода при решении крупномасштабных проблем остаются по-прежнему высокими.

Кроме того, отметим еще следующие схемы: использование случайных сплайнов [65]; разложение Неймана [48]; применение вейвлетов в качестве пространственных базисов [66] и функциональных рядов Винера–Эрмита в сочетании с методами: а) конечных объемов в комбинации с итерациями Пикара; б) возмущений совместно с разложением по собственным функциям [67]; алгоритм *переменяющихся наименьших квадратов* [68]; комбинация стандартной процедуры Галёркина и неявного метода Эйлера–Маруямы [69]; сочетание методов Рунге–Кутта (Мильштейна) и конечных разностей по пространству [70]; комбинация потраекторной аппроксимации на основе стохастического экспонентного интегратора с галёркинской пространственной дискретизацией [71] и симбиоз того же интегратора со спектральным методом Галёркина [72]; полудискретная схема Мильштейна по времени в сочетании с галёркинскими приближениями по пространству [73]; метод усреднения [74]; метод прямых при дискретизации по пространству в комбинации с полиномиальной аппроксимацией по времени [75], тот же метод в сочетании с конечными разностями [76], а также с собственными функциями однородной линейной задачи [77]; разложение решения в ряд Тейлора [78].

3. Схема решения задачи

Пусть $\{\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ – действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, определяемым оператором математического ожидания; $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathcal{P})$ – вероятностное пространство с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ ($T < +\infty$), на котором определены случайные поля $U(x, t)$ и $\Xi(x, t)$.

Пусть $\{e_\ell(x)\}$ ($\ell = 1, 2, \dots$) – полная ортонормированная система базисных функций в пространстве \mathbb{H} . Тогда для поля $U(x, t)$

можно воспользоваться представлением

$$U(x, t) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} U_\ell(t) e_\ell(x), \quad (3.1)$$

где $\{U_\ell(t)\}$ – семейство случайных процессов – коэффициентов разложения. Если предположить, что случайное поле $\Xi(x, t)$ является формальной производной по времени цилиндрического винеровского процесса $\mathcal{W}(x, t)$ [31], то его проекцию на линейное подпространство пространства \mathbb{H} , образованное линейной оболочкой системы $\{e_\ell(x)\}$, можно записать так:

$$\Xi^*(x, t) \equiv \mathcal{V}(x, t) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} V_\ell(t) e_\ell(x), \quad (3.2)$$

где $\{V_\ell(t)\}$ – семейство коррелированных белых гауссовских шумов со следующими свойствами:

$$\mathcal{E}[V_\ell(t)] = 0, \quad \mathcal{E}[V_k(t) V_\ell(t')] = \sigma_{k\ell} \delta(t - t'),$$

$\mathcal{E}[\dots]$ – оператор математического ожидания; $\sigma_{k\ell}$ – известные постоянные; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака; $k, \ell = 1, 2, \dots$. Использование равенства (1.4) дает начальные условия:

$$U_\ell(0) = U_\ell^0, \quad \ell = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где случайные величины $\{U_\ell^0\}$ являются коэффициентами разложения:

$$U^0(x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} U_\ell^0 e_\ell(x). \quad (3.4)$$

Уравнения (1.1)–(1.3) могут быть записаны в следующей форме:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \mathcal{A}[x, t; U, U'_x, U''_{xx}, \dots] + \Xi(x, t), \quad (3.5)$$

где \mathcal{A} – нелинейный оператор. Поэтому, если, следуя методу Галёркина, в представлениях для $U(x, t)$ и $\mathcal{V}(x, t)$ ограничиться конечным числом слагаемых M , подставить соответствующие отрезки рядов $\hat{U}_M(x, t)$ и $\hat{\Xi}_M^*(x, t)$ вместо $U(x, t)$ и $\Xi(x, t)$ в уравнение (3.5), последовательно домножить обе части полученного уравнения на $e_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, M$), в затем проинтегрировать по

\mathbb{R} , то теоретически можно получить замкнутую систему СОДУ для случайных процессов $\{\widehat{U}_\ell(t)\}$ ($\ell = 1, 2, \dots, M$):

$$\frac{d\widehat{U}_k(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}[x, t; \widehat{U}_M, \widehat{U}'_{Mx}, \widehat{U}''_{Mxx}, \dots] \times e_k(x) dx + V_k(t). \quad (3.6)$$

Для построения уравнений (3.6) на практике необходимо иметь возможность без особых усилий вычислять интеграл в правой части этого уравнения, что в общем случае является достаточно сложной задачей. С другой стороны, облегчить процедуру может учет конкретной структуры уравнения (3.5) и выбор системы базисных функций $\{e_\ell(x)\}$ с необходимыми свойствами.

Обратимся к уравнениям (1.1)–(1.3). В эти уравнения неизвестное поле и его производные входят в целых положительных степенях, а шумовое поле – аддитивно, т.е. уравнения (1.1)–(1.3) имеют полиномиальную структуру, как и многие другие детерминированные уравнения современной математической физики (Гинзбурга–Ландау, Бюргерса, колебаний нелинейной струны в проблеме Ферми–Пасты–Улама, Курамото–Сивашинского, Фишера, Буссинеска, мелкой воды, Максвелла–Блоха, Клейна–Гордона, Ламе, Хироты, трехмерного трехволнового резонансного взаимодействия, распространения звука в газе, Свифта–Хоэнберга, Колмогорова–Петровского–Пискунова и др.).

Поэтому для приближенного аналитического построения решений таких, а также стохастических уравнений сходной структуры в неограниченных областях хотелось бы иметь ортонормированные системы функций, которые, во-первых, достаточно быстро убывают при стремлении аргумента к бесконечности, а во-вторых, замкнуты относительно операций умножения и дифференцирования. Это обеспечило бы возможность преобразования выражения $\mathcal{A}[x, t; \widehat{U}_M, \widehat{U}'_{Mx}, \widehat{U}''_{Mxx}, \dots]$ в конечную линейную комбинацию базисных функций, а затем позволило вычислить интегралы, используя только свойства ортонормированности базисных функций.

Но проблема в том, что среди хорошо

известных систем функций необходимые отсутствуют. Например, единственная классическая система ортонормированных на всей действительной оси функций Эрмита [79] обладает первым свойством и не имеет второго. Заметим при этом, что широко рекламируемые и используемые в последнее время вейвлеты [80] для рассматриваемой области сводятся к тем же функциям Эрмита при соответствующем линейном преобразовании аргумента (а ряды по ним – это одна из форм рядов Фурье), и следовательно, при их применении, как и первых, при приближении квадратов и парных (а при необходимости и тройных, четверных и т.д.) произведений этих функций требуется дополнительное перераспределение в функциональные ряды по ним же [81], что не улучшает условий работы с ними.

Интересным семейством функций, обладающих указанными выше свойствами, является малоизвестная система функций Христова [82], которая и используется ниже для аппроксимации решений СДУВЧП. Альтернативные, такие же нечасто встречающиеся в научной литературе семейства функций Хиггинса и Бойда можно найти в работах [83] и [84, 85] соответственно.

Итак, в качестве базисных в рамках данного исследования будем использовать функции Христова, соотношения для которых выглядят следующим образом ($n \geq 0$):

$$S_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{S}_n, \quad C_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{C}_n, \quad (3.7)$$

$$\tilde{S}_n(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x^{2k-1} (-1)^{n+k} C_{2n+1}^{2k-1}}{(x^2 + 1)^{n+1}},$$

$$\tilde{C}_n(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x^{2k-2} (-1)^{n+k+1} C_{2n+1}^{2k-2}}{(x^2 + 1)^{n+1}}.$$

Исследуя свойства этих функций, можно заметить, что рассматриваемая система состоит из двух подпоследовательностей, образованных из нечетных $\{S_n(x)\}$ и четных $\{C_n(x)\}$ функций и ведущих себя на бесконечности как $1/x$ и $1/x^2$ соответственно. Более того, эта система является ортонормированной и полной в пространстве

$\mathbb{L}^2(-\infty, +\infty)$ [82], а ее замкнутость относительно операций умножения и дифференцирования следует из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}\tilde{S}'_n &= \frac{1}{2}[n\tilde{C}_{n-1} - (2n+1)\tilde{C}_n + (n+1)\tilde{C}_{n+1}], \\ \tilde{C}'_n &= -\frac{1}{2}[n\tilde{S}_{n-1} - (2n+1)\tilde{S}_n + (n+1)\tilde{S}_{n+1}], \\ x\tilde{S}'_n &= \frac{1}{2}[n\tilde{S}_{n-1} - \tilde{S}_n - (n+1)\tilde{S}_{n+1}], \\ x\tilde{C}'_n &= \frac{1}{2}[n\tilde{C}_{n-1} - \tilde{C}_n - (n+1)\tilde{C}_{n+1}], \\ \tilde{S}_n\tilde{S}_k &= \frac{1}{4}[\tilde{C}_{n+k+1} - \tilde{C}_{n+k} + \tilde{C}_{n-k} - \tilde{C}_{n-k-1}], \\ \tilde{C}_n\tilde{C}_k &= \frac{1}{4}[-\tilde{C}_{n+k+1} + \tilde{C}_{n+k} + \tilde{C}_{n-k} - \tilde{C}_{n-k-1}], \\ \tilde{S}_n\tilde{C}_k &= \frac{1}{4}[-\tilde{S}_{n+k+1} + \tilde{S}_{n+k} + \tilde{S}_{n-k} - \tilde{S}_{n-k-1}], \\ \tilde{S}_n^2 &= \frac{1}{4}[\tilde{C}_{2n+1} - \tilde{C}_{2n} + 2\tilde{C}_0], \\ \tilde{C}_n^2 &= \frac{1}{4}[-\tilde{C}_{2n+1} + \tilde{C}_{2n} + 2\tilde{C}_0], \\ \tilde{S}_{-n} &= \tilde{S}_{n-1}, \quad \tilde{C}_{-n} = -\tilde{C}_{n-1}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Назовем, вид функций (3.7) "классическим" (по аналогии с классическими полиномами). Но применение соотношений (3.7), (3.8) может встретить такие же трудности, как и использование классических функций Эрмита [86], которые, как и рассматриваемые, ортонормальны на всей действительной оси. А именно, их линейная комбинация, состоящая из относительно небольшого числа слагаемых (с переменными коэффициентами), достаточно хорошо приближает исследуемую характеристику явления (массу, концентрацию вещества и т.д.), если "форма" этой характеристики не претерпевает существенных изменений за период исследования. В противном случае качество аппроксимации быстро падает.

Для случая функций Эрмита (например, в задаче о приближенном вычислении плотности вероятности [87]) был найден выход в использовании "стандартизованных" функций, имеющих аргумент вида

$$x = \frac{y - a(t)}{s(t)}$$

(с соответствующим усложнением в многомерном случае), где $a(t)$ и $s(t)$ – функции, отслеживающие сдвиг и изменение формы и выбираемые из каких-либо соображений (например, получаемые в процессе параллельных расчетов, причем для плотности вероятности функции $a(t)$ и $s(t)$ – математическое ожидание и стандарт распределения).

Если теперь обратиться к функциям Христово и их свойствам, то из равенств (3.8) легко сделать вывод, что техника использования "стандартизованного" варианта возможна и здесь, причем, например, при изучении движения волн в качестве $a(t)$ можно выбирать их фазовую или групповую скорость.

Перечисленные выше свойства, а также дополнительные замечания показывают пригодность системы функций (3.7), (3.8) для вычисления приближенных аналитических решений уравнений как детерминированных ДУВЧП, так и СДУВЧП с полиномиальными нелинейностями. Как результат этих рассуждений, зафиксируем формы базисных функций ($\ell \geq 1, k \geq 0$):

$$e_\ell(x) = \begin{cases} S_k(x), & \ell = 2k + 1, \\ C_k(x), & \ell = 2k + 2, \end{cases}\tag{3.9}$$

а также запишем соотношения для необходимых стохастических характеристик поля $U(x, t)$:

$$m_U(x, t) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} m_{U\ell}(t) e_\ell(x),\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}C_{UU}(x_1, t_1; x_2, t_2) &= \\ &= \sum_{\ell, k=1}^{+\infty} C_{Uk\ell}(t_1, t_2) e_k(x_1) e_\ell(x_2),\end{aligned}\tag{3.11}$$

где $m_U(x, t)$ – функция математического ожидания, $C_{UU}(x_1, t_1; x_2, t_2)$ – ковариационная функция,

$$m_{U\ell}(t) = \mathcal{E}[U_\ell(t)],$$

$$C_{Uk\ell}(t_1, t_2) = \mathcal{E}[\dot{U}_k(t_1)\dot{U}_\ell(t_2)],$$

$$\dot{U}_\ell(t) = U_\ell(t) - m_{U\ell}(t).$$

Заметим, что для базисных функций выбранного типа число M разумнее выбирать четным.

4. Уравнения для коэффициентов разложения

Указанные уравнения будем строить, ориентируясь на структуру СДУвЧП (1.3) как самого общего. Для такого построения перенесем все члены из левой части в правую, за исключением производной по времени, и преобразуем нелинейность:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = & \gamma U(x, t) + \nu \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} - \\ & - \beta \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial U^2(x, t)}{\partial x} + \\ & + \Xi^*(x, t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Проанализируем структуру искомых уравнений. Несложно увидеть, что после подстановки форм приближенного решения и шума в СДУвЧП (4.1) и проведения всех возможных преобразований каждый член последнего "отправит" в уравнение для $U_k(t)$ одно слагаемое, являющееся коэффициентом при $e_k(x)$. Попробуем выделить такие слагаемые. При этом, принимая в учет свойства функций Христовы, имеет смысл строить отдельно уравнения для коэффициентов $U_{1k}(t)$ при $S_k(x)$ и $U_{2k}(t)$ при $C_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, M^*$ ($M^* = M/2 - 1$).

Единственное слагаемое, остающееся в левой части в обоих случаях, – это производная $\dot{U}_{1k}(t)$ или $\dot{U}_{2k}(t)$. В правой части СДУвЧП (4.1) такие же простейшие слагаемые соответствуют первому и последнему термам: это $R_{11k} = \gamma U_{1k}(t)$, $R_{21k} = \gamma U_{2k}(t)$ и $R_{15k} = V_{1k}(t)$, $R_{25k} = V_{2k}(t)$.

Второму терму в СДУвЧП (4.1) будут соответствовать слагаемые (здесь и далее аргумент t у случайных функций $U_{ik}(t)$ для большей компактности формул опускается)

$$\begin{aligned} R_{12k} = & \frac{\nu}{4} [k(1-k)U_{1,k-2} + 4k^2U_{1,k-1} - \\ & - 2(1+3k+3k^2)U_{1k} + 4(1+k)^2U_{1,k+1} - \\ & - (k+1)(k+2)U_{1,k+2}] \end{aligned} \quad (4.2)$$

и

$$\begin{aligned} R_{22k} = & \frac{\nu}{4} [k(1-k)U_{2,k-2} + 4k^2U_{2,k-1} - \\ & - 2(1+3k+3k^2)U_{2k} + 4(1+k)^2U_{2,k+1} - \\ & - (k+1)(k+2)U_{2,k+2}]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

То же самое третьему терму:

$$\begin{aligned} R_{13k} = & -\frac{\beta}{8} [k(k-1)(k-2)U_{2,k-3} - \\ & - 3k(k-1)(2k-1)U_{2,k-2} + \\ & + 3k(5k^2+1)U_{2,k-1} - \\ & - 2(2k+1)(5k^2+5k+3)U_{2k} + \\ & + 3(k+1)(5k^2+10k+6)U_{2,k+1} - \\ & - 3(k+1)(k+2)(k+3/2)U_{2,k+2} + \\ & + (k+1)(k+2)(k+3)U_{2,k+3}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

и

$$\begin{aligned} R_{23k} = & -\frac{\beta}{8} [-k(k-1)(k-2)U_{1,k-3} + \\ & + 3k(k-1)(2k-1)U_{1,k-2} - \\ & - 3k(5k^2+1)U_{1,k-1} + \\ & + 2(2k+1)(5k^2+5k+3)U_{1k} - \\ & - 3(k+1)(5k^2+10k+6)U_{1,k+1} + \\ & + 3(k+1)(k+2)(k+3/2)U_{1,k+2} - \\ & - (k+1)(k+2)(k+3)U_{1,k+3}]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теперь обратимся к четвертому нелинейному члену. Для получения информации о его вкладе выделим составляющие его выражения:

$$\begin{aligned} U^2(x, t) = & \\ = & \frac{2}{\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} [U_{1k} \tilde{S}_k(x) + U_{2k} \tilde{C}_k(x)] \right]^2 = \\ = & \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k [U_{1\ell} U_{1,k-\ell} \tilde{S}_\ell(x) \tilde{S}_{k-\ell}(x) + \\ & + 2U_{1\ell} U_{2,k-\ell} \tilde{S}_\ell(x) \tilde{C}_{k-\ell}(x) + \\ & + U_{2\ell} U_{2,k-\ell} \tilde{C}_\ell(x) \tilde{C}_{k-\ell}(x)], \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^k U_{1\ell} U_{1,k-\ell} \tilde{S}_\ell(x) \tilde{S}_{k-\ell}(x) = & \\ = & \begin{cases} \frac{1}{4} U_{10}^2 [\tilde{C}_0(x) + \tilde{C}_1(x)], & k = 0, \\ r_{11}, & k = 1, \\ r_{11} + r_{12}, & k = k_1, \\ r_{11} + r_{13}, & k = k_2, \end{cases} \quad (4.7) \\ r_{11} = & \frac{1}{2} U_{10} U_{1k} [-\tilde{C}_{k-1}(x) + \tilde{C}_{k+1}(x)], \end{aligned}$$

$$r_{12} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(k-1)/2} U_{1i} U_{1,k-i} [-\tilde{C}_{k-2i-1}(x) + \tilde{C}_{k-2i}(x) - \tilde{C}_k(x) + \tilde{C}_{k+1}(x)],$$

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{4}, & i = k - i, \\ \frac{1}{2}, & i \neq k - i, \end{cases} \quad p \in \mathbb{N},$$

$$k_1 = 2p + 1, \quad k_2 = 2p, \quad k_3 = 2p - 1.$$

$$r_{13} = \sum_{i=1}^{k/2} c_i U_{1i} U_{1,k-i} [-\tilde{C}_{k-2i-1}(x) + \tilde{C}_{k-2i}(x) - \tilde{C}_k(x) + \tilde{C}_{k+1}(x)],$$

$$\sum_{\ell=0}^k U_{1\ell} U_{2,k-\ell} \tilde{S}_\ell(x) \tilde{C}_{k-\ell}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} U_{10} U_{20} [\tilde{S}_0(x) - \tilde{S}_1(x)], & k = 0, \\ r_{21} + r_{22}, & k = k_3, \\ r_{21} + r_{23}, & k = k_2, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$r_{21} = \frac{1}{4} U_{10} U_{2k} [\tilde{S}_{k-1}(x) - \tilde{S}_{k+1}(x)],$$

$$r_{22} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k U_{1i} U_{2,k-i} [\tilde{S}_{k-2i-1}(x) - \tilde{S}_{k-2i}(x) + \tilde{S}_k(x) + \tilde{S}_{k+1}(x)],$$

$$r_{23} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k U_{1i} U_{2,k-i} [\tilde{C}_{k-2i-1}(x) - \tilde{C}_{k-2i}(x) + \tilde{C}_k(x) - \tilde{C}_{k+1}(x)],$$

$$\sum_{\ell=0}^k U_{2\ell} U_{2,k-\ell} \tilde{C}_\ell(x) \tilde{C}_{k-\ell}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} U_{20}^2 [3\tilde{C}_0(x) - \tilde{C}_1(x)], & k = 0, \\ r_{31}, & k = 1, \\ r_{31} + r_{32}, & k = k_1, \\ r_{31} + r_{33}, & k = k_2, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$r_{31} = \frac{1}{2} U_{20} U_{2k} [-\tilde{C}_{k-1}(x) + 2\tilde{C}_k(x) - \tilde{C}_{k+1}(x)],$$

$$r_{32} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(k-1)/2} U_{2i} U_{2,k-i} [-\tilde{C}_{k-2i-1}(x) + \tilde{C}_{k-2i}(x) + \tilde{C}_k(x) - \tilde{C}_{k+1}(x)],$$

$$r_{33} = \sum_{i=1}^{k/2} c_i U_{2i} U_{2,k-i} [-\tilde{C}_{k-2i-1}(x) + \tilde{C}_{k-2i}(x) + \tilde{C}_k(x) - \tilde{C}_{k+1}(x)],$$

Теперь соотношения (4.7)–(4.9) необходимо еще один раз продифференцировать по x , что облегчается симметрией индексов в соотношениях для производных (3.8). В результате этих выкладок можно выделить искомые коэффициенты R_{14k} и R_{24k} при функциях $S_k(x)$ и $C_k(x)$ в представлении нелинейного слагаемого в правой части уравнения (4.1). Но получающиеся выражения еще более громоздки, чем приведенные, а поэтому представлять их здесь не имеет никакого смысла.

К тому же несложно установить, что в общем и даже в огромном большинстве частных случаев получить уравнения для $U_{1k}(t)$ и $U_{2k}(t)$ в явном виде не представляется возможным, так как их прямое построение затруднено вследствие сложности и громоздкости промежуточных выкладок, что не позволяет выписать замкнутый вид необходимых для численных расчетов правых частей системы ОДУ относительно коэффициентов $U_{1k}(t)$ и $U_{2k}(t)$. Это приводит к необходимости компьютерной автоматизации генерирования таких уравнений (построению на компьютере символьных представлений правых частей этих уравнений при любом разумном M) на основе применения современных систем аналитических вычислений [88].

Итак, система СОДУ для случайных коэффициентов $U_{ik}(t)$ будет иметь следующий вид:

$$\dot{U}_{ik}(t) = g_{ik}(U_1, U_2) + R_{i5k} \equiv \sum_{j=1}^5 R_{ijk}, \quad (4.10)$$

$$i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots, M^*.$$

5. Схема расчетов и результаты вычислений

Используя предложенный основной алгоритм, были проведены расчеты переходного процесса, описываемого уравнением (4.1)

при следующих значениях параметров задачи:

$$M = 62, \quad M^* = 30, \quad \alpha = 0.01, \\ \beta = 0.001, \quad \gamma = -0.5, \quad \nu = 0.01.$$

Правые части для системы СОДУ, решением которой являются неизвестные случайные функции $U_{1k}(t)$ и $U_{2k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots, M^*$), были сгенерированы с помощью программы на входном языке пакета Mathematica [89]. В среде этого пакета проводились и остальные вычисления.

Для приближенного расчета стохастических характеристик $U_{1k}(t)$ и $U_{2k}(t)$ на данном этапе исследований был выбран метод статистического моделирования (статистических испытаний, Монте-Карло) [90], а в качестве численного интегратора – схема Эйлера–Маруямы [91].

Рассмотрим основные положения этой части вычислительной процедуры. Для этого введем следующие обозначения:

$$t_p = ph, \quad p = 0, 1, \dots, K, \quad 0 < h \ll 1,$$

– временная сетка, h – ее постоянный шаг, $\mathbf{X}(t) = \text{col}(U_{10}(t), U_{10}(t), \dots, U_{1M^*}(t), U_{20}(t), U_{21}(t), \dots, U_{2M^*}(t), \{W_\ell(t)\})$ – семейство винеровских процессов, формальными производными которых являются белые шумы $\{V_\ell(t)\}$, $\mathbf{X}_p = \mathbf{X}(t_p)$, $\mathbf{W}_p = \mathbf{W}(t_p)$, $\widehat{\mathbf{X}}_p$, $\widehat{\mathbf{W}}_p$ – оценки $\mathbf{X}(t_p)$ и $\mathbf{W}(t_p)$ соответственно,

$$\Delta \mathbf{W}_p = \mathbf{W}(t_{p+1}) - \mathbf{W}(t_p), \\ \Delta \widehat{\mathbf{W}}_{ip}^{[q]} = \widehat{\mathbf{W}}_{i,p+1}^{[q]} - \widehat{\mathbf{W}}_{ip}^{[q]} = \sqrt{\Delta t_p} \widehat{\mathbf{Z}}_{ip}^{[q]}, \\ \widehat{\mathbf{Z}}_{ip}^{[q]} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad i = \overline{1, M},$$

q ($1 \leq q \leq N$) и $N \gg 1$ – номер моделирования и число моделирований соответственно, $\widehat{\mathbf{x}}_p^{[q]}$, $\widehat{\mathbf{x}}^{0[q]}$, $\Delta \widehat{\mathbf{w}}_p^{[q]}$ – результаты разыгрывания случайных векторов \mathbf{X}_p , \mathbf{X}^0 и $\Delta \mathbf{W}_p$ в q -м моделировании,

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}(t)) = \text{col}[g_{10}(\mathbf{X}(t)) \quad \dots \quad g_{1M^*}(\mathbf{X}(t)) \\ g_{20}(\mathbf{X}(t)) \quad \dots \quad g_{2M^*}(\mathbf{X}(t))],$$

причем для получения реализаций стандартно распределенных нормальных величин использовались встроенные средства пакета Mathematica.

Схема Эйлера–Маруямы для СОДУ использовалась в следующей форме:

$$\widehat{\mathbf{x}}_{p+1}^{[q]} = \widehat{\mathbf{x}}_p^{[q]} + \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}_p^{[q]}) h + \Sigma \Delta \widehat{\mathbf{W}}_p^{[q]}, \quad (5.1)$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{MM}),$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, K - 1,$$

$$\widehat{\mathbf{X}}_0^{[q]} = \widehat{\mathbf{X}}^{0[q]}, \quad q = 1, 2, \dots, N$$

(порядок строгой сходимости равен $1/2$, слабой сходимости – 1).

По результатам численного интегрирования оценка математического ожидания \mathbf{m}_{Xp} вектора \mathbf{X}_p после получения N реализаций определялась из выражения

$$\widehat{\mathbf{m}}_{Xp} = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N \widehat{\mathbf{x}}_p^{[q]},$$

а оценки элементов его ковариационной матрицы – следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{K}}_{Xp_{ij}} = \frac{1}{N-1} \sum_{q=1}^N (\widehat{x}_{pi}^{[q]} - \widehat{m}_{Xpi}) (\widehat{x}_{pj}^{[q]} - \widehat{m}_{Xpj}), \\ i, j = 1, 2, \dots, M.$$

С учетом выбора неслучайного начального случайного поля $U^0(x)$ при расчетах в процессе статистического моделирования использовались следующие параметры:

$$N = 1000, \quad h = 0.001, \quad K = 20000, \\ m_{U10}^0 = 0.1, \quad m_{U11}^0 = -0.05, \quad m_{U12}^0 = -0.025, \\ m_{U20}^0 = 0.1, \quad m_{U21}^0 = -0.05, \quad m_{U22}^0 = 0.025, \\ m_{Uij}^0 = 0.0 \text{ для } i = 1, 2 \text{ и остальных } j, \\ \sigma_{1kk} = 0.01 e^{-0.5k}, \quad \sigma_{2kk} = 0.005 e^{-0.4k}, \\ \sigma_{ik\ell} = 0, \quad i = 1, 2, \quad k, \ell = 0, 1, \dots, M^*, \quad k \neq \ell.$$

Результаты расчетов отображены на рис. 1 (профили поля математических ожиданий в моменты времени $t = 0.0$ (0.2) 2.0) и 2 (то же, но для поля дисперсии), причем на первом рисунке центральная часть кривой, соответствующей $t = 0.0$, находится выше остальных, а на втором совпадает с осью абсцисс.

Заключение

В продолжение исследований предполагается сравнить оценки, полученные на основе результатов применения метода ста-

стистического моделирования, с вычислением необходимых характеристик на основе построения системы ОДУ для моментных функций.

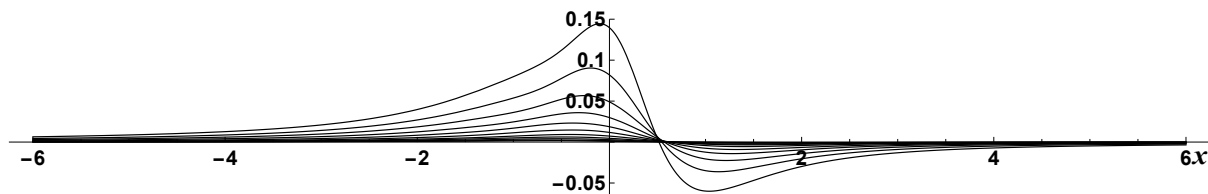


Рис.1

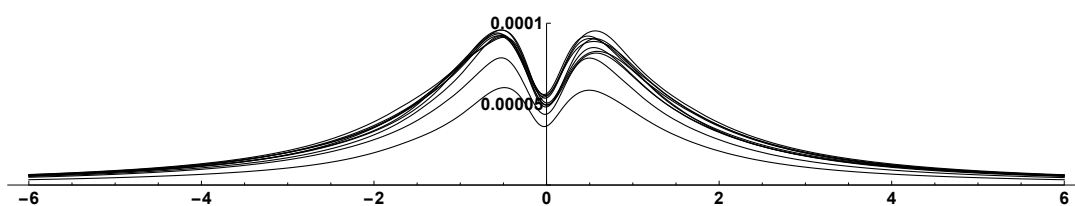


Рис.2

Список литературы

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
2. *Светлицкий В.А.* Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1991. 320 с.
3. *Николаенко Н.А., Ульянов С.В.* Статистическая динамика машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 368 с.
4. *Коненков Ю.К., Давтян М.Д.* Случайные механические процессы в оборудовании машин. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
5. *Макеев В.П., Грищенко Н.И., Павлюк Ю.С.* Статистические задачи динамики упругих конструкций. М.: Наука, 1984. 232 с.
6. *Bucher C.* Computational analysis of randomness in structural mechanics. London: Taylor & Francis, 2009. XVIII, 230 p.
7. *Макаров Б.П.* Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. М.: Машиностроение, 1983. 264 с.
8. *Пальмов В.А.* Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.
9. *Ланда П.С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983. 320 с.
10. *Кафаров В.В., Дорохов И.Н., Липатов Л.Н.* Системный анализ процессов химической технологии. М.: Наука, 1982. 344 с.
11. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
12. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. В 2-х т. М.: Мир, 1980. Т. 1. 280 с.; 1981. Т. 2. 317 с.
13. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966. 404 с.
14. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978. Ч. 2. Случайные поля. 464 с.
15. *Вишик М.И., Фурсиков А.В.* Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980. 442 с.
16. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 640 с.; 1967. Ч. 2. 720 с.

17. *Ortiz de Zàrate J.M., Sengers J.V.* Hydrodynamic fluctuations in fluids and fluid mixtures. Amsterdam: Elsevier, 2006. X, 309 p.
18. *Ohayon R., Soize C.* Structural acoustics and vibration mechanical models: Variational formulations and discretization. London: Academic Press, 1998. X, 424 p.
19. *Kulasiri D., Venvoerd W.* Stochastic dynamics: modeling solute transport in porous media. Amsterdam: Elsevier, 2002. XII, 239 p.
20. *den Hollander F.* Random polymers. Berlin: Springer, 2009. XIII, 258 p.
21. *Kamiński M.M.* Computational mechanics of composite materials: sensitivity, randomness, and multiscale behaviour. London: Springer, 2005. XVII, 418 p.
22. *Haile J.M.* Molecular dynamics simulation: elementary methods. New York: Wiley, 1992. XVIII, 489 p.
23. *Ostoja-Starzewski M.* Microstructural randomness and scaling in mechanics of materials. New York: Taylor & Francis, 2008. XXV, 471 p.
24. *Radons G., Rumpf B., Schuster H.G.* (eds.) Nonlinear dynamics of nanosystems. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2010. XX, 455 p.
25. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1982. 351 с.
26. *Balendra T.* Vibration of buildings to wind and earthquake loads. Berlin: Springer, 1993. X, 149 p.
27. *Шмелев А.Б.* Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей. М.: Изд-во МФТИ, 1998. 208 с.
28. *Potapov V.D.* Stability of stochastic elastic and viscoelastic systems. New York: Wiley, 1999. 275 p.
29. *Schwarz A., Janicka J.* (eds.) Combustion noise. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. XVII, 291 p.
30. *Donev A., Vanden-Eijnden E., Garcia A.L., Bell J.B.* On the accuracy of finite-volume schemes for fluctuating hydrodynamics // Communications in Applied Mathematics and Computational Science. 2010. Vol. 5, № 2. P. 149–197.
31. *Budhiraja A., Dupuis P.* A variational representation for positive functionals of a Hilbert space // Probability and Mathematical Statistics. 2000. Vol. 20, № 1. P. 39–61.
32. *Гончаренко В.М.* О случайных колебаниях упругих тел и теория марковских процессов // Прикладная механика. 1991. Т. 27, № 8. С. 95–100.
33. *Chow P.-L.* Stochastic partial differential equations. Boca Raton: CRC, 2015. XII, 314 p.
34. *Da Prato G.* Kolmogorov equations for stochastic PDEs. Basel: Springer, 2004. VII, 182 p.
35. *Duan J., Wang W.* Effective dynamics of stochastic partial differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2014. XII, 270 p.
36. *Lord G.J., Powell C.E., Shardlow T.* An introduction to computational stochastic PDEs. New York: Cambridge University Press, 2014. XVII, 503 p.
37. *Walsh J.B.* An introduction to stochastic partial differential equations // École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV 1984: Lecture Notes in Mathematics, № 1180. Berlin: Springer, 1986. P. 265–439.
38. *Elishakoff I.* Probabilistic theory of structures. 2nd ed. Mineola (NY): Dover, 1999. XVII, 492 p.
39. *Liu W., Röckner M.* Stochastic partial differential equations: An introduction. Cham: Springer, 2015. VI, 266 p.
40. *Wan F.Y.M.* Linear partial differential equations with random forcing // Studies in Applied Mathematics. 1972. Vol. 51, № 2. P. 163–178.
41. *Hopf E.* Statistical hydrodynamics and functional calculus // Journal of Rational Mechanics and Analysis. 1952. Vol. 1, P. 87–123.
42. *Polhemus N.W., Cakmak A.S.* Simulation of earthquake ground motion using ARMA models // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. 1981. Vol. 9, № 4. P. 343–354.
43. *Shinozuka M.* Structural response variability // Journal of Engineering Mechanics (ASCE). 1987. Vol. 113, № 6. P. 825–842.

44. Spanos P.D., Mignolet M.P. Z-transform modeling of P-M wave spectrum // Journal of Engineering Mechanics (ASCE). 1986. Vol. 112, № 8. P. 745–759.
45. Cliffe K.A., Giles M.B., Scheichl R., Teckentrup A.L. Multilevel Monte Carlo methods and applications to elliptic PDEs with random coefficients // Computing and Visualization in Science. 2011. Vol. 14, № 1. P. 3–15.
46. Giles M.B. Multilevel Monte Carlo path simulation // Operations Research. 2008. Vol. 56, № 3. P. 607–617.
47. Hou T.Y., Luo W., Rozovskii B., Zhou H.-M. Wiener chaos expansions and numerical solutions of randomly forced equations of fluid mechanics // Journal of Computational Physics. 2006. Vol. 216, № 2. P. 687–706.
48. Ghanem R., Spanos P.D. Stochastic finite elements: a spectral approach. New York: Springer, 1991. XI, 222 p.
49. Kamiński M.M. The stochastic perturbation method for computational mechanics. Chichester: Wiley, 2013. XVIII, 330 p.
50. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: Its basis and fundamentals. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.
51. Cao T., Yin L. Spectral Galerkin method for stochastic wave equations driven by space-time white noise // Communications on Pure and Applied Analysis. 2007. Vol. 6, № 3. P. 607–617.
52. Li H., Zhang D. Probabilistic collocation method for flow in porous media: Comparisons with other stochastic methods // Water Resources Research. 2007. Vol. 43, № 9. 13 p.
53. Bell J.B., Garcia A.L., Williams S.A. Numerical methods for the stochastic Landau–Lifshitz Navier–Stokes equations // Physical Review E. 2007. Vol. 76, № 1. 016708. 12 p.
54. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики: учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 700 с.
55. Chatterjee A. An introduction to the proper orthogonal decomposition // Current Science. 2000. Vol. 78, № 7. P. 808–817.
56. Holmes P., Lumley J.L., Berkooz G. Turbulence, coherent structures, dynamical systems, and symmetry. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. XVIII, 420 p.
57. Liang Y.C., Lee H.P., Lim S.P., Lin W.Z., Lee K.H., Wu C.G. Proper orthogonal decomposition and its applications – Part I: theory // Journal of Sound and Vibrations. 2002. Vol. 252, № 3. P. 527–544.
58. Dewit T.D., Pecquet A.L., Vallet J.C. The biorthogonal decomposition as a tool for investigation fluctuations in plasmas // Physics of Plasmas. 1994. Vol. 1, № 10. P. 3288–3300.
59. Feeny B.F. A complex orthogonal decomposition for wave motion analysis // Journal of Sound and Vibrations. 2008. Vol. 310, № 1–2. P. 77–90.
60. Burkardt J., Gunzburger M., Lee H.-Ch. POD and CVT-based reduced-order modeling of Navier–Stokes flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2006. Vol. 196, № 1–3. P. 337–355.
61. Maccone C. Deep space flight and communications: Exploiting the Sun as a gravitational lens. Berlin: Springer, 2009. XXXIV, 402 p.
62. Principal component analysis – Engineering applications / P. Sanguansat (ed.). Rijeka: InTech, 2012. X, 218 p.
63. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
64. Fox R.O. Quadrature-based moment methods for polydisperse multiphase flows // Stochastic Methods in Fluid Mechanics / J.-P. Minier, S. Chibbaro (eds.). Wien: Springer; Udine: CISM, 2014. P. 87–136.
65. Chang J., Wang R., Jing Y. Random splines and random empirical mode decomposition // Journal of Information and Computing Science. 2010. Vol. 7, № 10. P. 2155–2164.
66. Gittelsohn C.J. Adaptive wavelet methods for elliptic partial differential equations

- with random operators // *Numerische Mathematik*. 2014. Vol. 126, № 3. P. 471–513.
67. *El-Beltagy M.A., Al-Mulla N.A.* Solution of the stochastic heat equation with nonlinear losses using Wiener–Hermite expansion // *Journal of Applied Mathematics*. 2014. Vol. 2014. Article ID 843714. 9 p.
68. *Doostan A., Iaccarino G.* A least-squares approximation of partial differential equations with high-dimensional random inputs // *Journal of Computational Physics*. 2009. Vol. 228, № 12. P. 4332–4345.
69. *Lord G., Shardlow T.* Post processing for stochastic parabolic partial differential equations // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2007. Vol. 45, № 2. P. 870–889.
70. *Wang X., Gan S.* A Runge–Kutta type scheme for nonlinear stochastic partial differential equations with multiplicative trace class noise // *Numerical Algorithms*. 2013. Vol. 62, № 2. P. 193–223.
71. *Kloeden P.E., Lord G.J., Neuenkirch A., Shardlow T.* The exponential integrator scheme for stochastic partial differential equations: Pathwise error bounds // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2011. Vol. 235, № 5. P. 1245–1260.
72. *Wang X.* An exponential integrator scheme for time discretization of nonlinear stochastic wave equation // *Journal of Scientific Computing*. 2015. Vol. 64, № 1. P. 234–263.
73. *Lang A., Chow P.-L., Potthoff J.* Almost sure convergence of a semidiscrete Milstein scheme for SPDE’s of Zakai type // *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*. 2010. Vol. 82, № 3. P. 315–326.
74. *Cerrai S., Freidlin M.* Averaging principle for a class of stochastic reaction–diffusion equations // *Probability Theory and Related Fields*. 2009. Vol. 144, № 1/2. P. 137–177.
75. *Kolkovska E.K.* On the Burgers equation with a stochastic stepping-stone noisy term // *Journal of Mathematical Sciences*. 2004. Vol. 121, № 5. P. 2645–2652.
76. *McDonald S.* Finite difference approximation for linear stochastic partial differential equations with method of lines // MPRA Paper No. 3983. 2007. 18 p. URL: mpra.ub.uni-muenchen.de/3983/1/MPRA_paper_3983.pdf (дата обращения: 12.06.2016).
77. *Roberts A.J.* Resolving the multitude of microscale interactions accurately models stochastic partial differential equations // *LMS Journal of Computation and Mathematics*. 2006. Vol. 9. P. 193–221.
78. *Jentzen A., Kloeden P.E.* Taylor approximations for stochastic partial differential equations. Philadelphia: SIAM, 2011. XIV, 220 p.
79. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.
80. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001. 464 с.
81. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Исследование нелинейных стохастических систем с применением языка ФОРМАК // *Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы*. Пермь, 1984. С. 105–111.
82. *Christov C.I.* A complete orthogonal system of functions in $L^2(-\infty, \infty)$ space // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1982. Vol. 42, № 6. P. 1337–1344.
83. *Higgins J.R.* Completeness and basis properties of sets of special functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1977. X, 134 p.
84. *Boyd J.P.* Spectral methods using rational basis functions on an infinite interval // *Journal of Computational Physics*. 1987. Vol. 69, № 1. P. 112–142.
85. *Boyd J.P.* The orthogonal rational functions of Higgins and Christov and algebraically mapped Chebyshev polynomials // *Journal of Approximation Theory*. 1990. Vol. 61, № 1. P. 98–105.
86. *Качмарж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958. 507 с.
87. *Богуславский И.А.* Статистический анализ многомерных систем при использовании полиномов Эрмита многих переменных // *Автоматика и телемеханика*. 1969. № 7. С. 36–51.
88. *Полосков И.Е.* Системы аналитических вычислений. Общие сведения, структу-

- ра и приложения / учеб. пособ. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013. 660 с.
89. *Mangano S.* Mathematica cookbook. Sebastopol (CA): O'Reilly, 2010. XXIV, 800 p.
90. *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1971. 328 с.
91. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer, 1992. XXXV, 632 p.

Application of the Christov's functions for an analysis of stochastic partial differential equations in a unbounded region

I. E. Poloskov

Perm State University, 614990, Perm, Bukirev st., 15
polosk@psu.ru; (342) 239 65 60

This paper presents a methodology and a computer algorithm for application of a system of the Christov's functions, which are orthonormal on the whole real axis and closed under operations of multiplication and differentiation, for an analysis of stochastic partial differential equations in a unbounded region on the example of the family of Kordeveg-de Vries equations. We demonstrate results of calculations of stochastic characteristics for solution of one equation from the family. These results were obtained in the environment of Mathematica package.

Keywords: *stochastic system; modeling; partial differential equation; approximate analytical solution; the Christov's functions; moment functions.*