

УДК 519.6

Построение компромиссного набора стратегий в одной линейной дифференциальной игре трех лиц

С. В. Лутманов

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
mpu@psu.ru; (342)239-63-09

Приводится модельный пример, иллюстрирующий алгоритм построения компромиссного набора стратегий в линейной дифференциальной игре трех лиц с существенно более сложной динамикой, чем "простое движение". Показана эффективность этого алгоритма для рассматриваемого случая.

Ключевые слова: компромиссный набор стратегий; равновесие по Нэшу; дифференциальная игра; стабильный мост; экстремальное прицеливание.

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-3-49-55

Введение

В работе [4] автором был предложен один способ рационального поведения игроков, названный им принципом компромисса, для конфликтной ситуации, в которой интерес каждого игрока, помимо минимизации своей платы, состоит еще и в том, чтобы любой из его оппонентов не мог получить результат лучший (меньший) некоторой заданной величины. Предложенный подход состоял в том, что компромиссный набор стратегий игроков обеспечивает каждому игроку значение платы не хуже (не больше) верхней компромиссной оценки. При этом никакое единоличное уклонение игрока от стратегии, предписываемой компромиссным набором, не позволяет ему получить значение платы лучше (меньше) нижней компромиссной оценки.

Реализация указанного набора стратегий осуществлялась путем построения системы гладких потенциалов, представляющих собой непрерывно дифференцируемые функции текущего времени и фазовых координат, производные которых в силу дифференциальных уравнений движения сохраняют постоянный знак. Формализация стратегий игроков и отвечающих им движений соответствовала

подходу, принятому в монографиях Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [1–2] для антагонистических дифференциальных игр и обобщенному на случай игр нескольких лиц А.Ф. Клейменовым в работе [3].

В статье был также рассмотрен пример, иллюстрирующий развиваемую теорию. На взгляд автора приведенный пример не в полной мере использовал возможности изложенного алгоритма, так как динамика игры в этом примере представляла собой лишь "простое движение".

Настоящая работа посвящена построению и исследованию модельного примера, адекватно отражающего возможности алгоритма реализации принципа компромисса на базе построения системы гладких потенциалов.

1. Описание игры

Динамика игры описывается линейным векторным дифференциальным уравнением вида

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Игра заканчивается в момент времени T . Целевыми множествами служат точки в трехмерном пространстве (рис. 1):

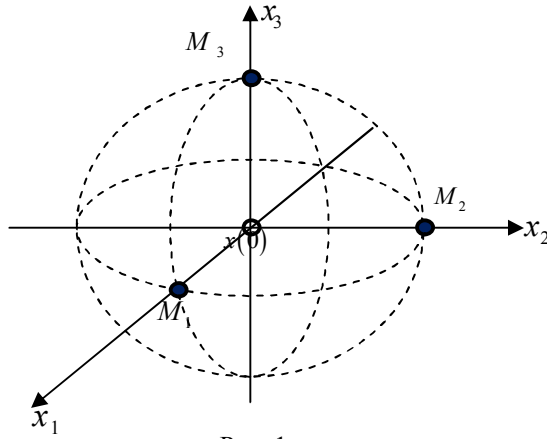


Рис. 1

$$M_i = \begin{pmatrix} m_1^{(i)} \\ m_2^{(i)} \\ m_3^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$m_1^{(1)} = 1, m_2^{(1)} = 0, m_3^{(1)} = 0, m_1^{(2)} = 0, m_2^{(2)} = 1, m_3^{(2)} = 0, \\ m_1^{(3)} = 0, m_2^{(3)} = 0, m_3^{(3)} = 1.$$

На рис. 1 показано расположение целых множеств игроков. Геометрическим ограничением на управления является множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in P = \right. \\ \left. = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \mid p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \leq 1 \right\} \right\}.$$

Заданы нижние компромиссные оценки

$$S_{1*} = 0.8, S_{2*} = 0.8, S_{3*} = 0.8$$

и верхние компромиссные оценки

$$S_1^* = 0.9, S_2^* = 0.9, S_3^* = 0.9.$$

2. Построение гладких потенциалов

Выпишем характеристическое уравнение для системы (1.1) и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$3 - \lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = \pm i.$$

Элементы фундаментальной матрицы

Коши однородной системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

имеют вид

$$x_{11}[t, \tau] = \frac{4}{5} e^{3(t-\tau)} + \frac{1}{5} \cos(t-\tau) - \frac{7}{5} \sin(t-\tau),$$

$$x_{12}[t, \tau] = \frac{2}{5} e^{3(t-\tau)} - \frac{2}{5} \cos(t-\tau) + \frac{14}{5} \sin(t-\tau),$$

$$x_{13}[t, \tau] = \frac{3}{5} e^{3(t-\tau)} - \frac{3}{5} \cos(t-\tau) - \frac{4}{5} \sin(t-\tau),$$

$$x_{21}[t, \tau] = \frac{2}{5} e^{3(t-\tau)} - \frac{2}{5} \cos(t-\tau) - \frac{1}{5} \sin(t-\tau),$$

$$x_{22}[t, \tau] = \frac{1}{5} e^{3(t-\tau)} + \frac{4}{5} \cos(t-\tau) + \frac{2}{5} \sin(t-\tau),$$

$$x_{23}[t, \tau] = \frac{3}{10} e^{3(t-\tau)} - \frac{3}{10} \cos(t-\tau) + \frac{1}{10} \sin(t-\tau),$$

$$x_{31}[t, \tau] = 2 \sin(t-\tau),$$

$$x_{32}[t, \tau] = -4 \sin(t-\tau),$$

$$x_{33}[t, \tau] = \cos(t-\tau) + \sin(t-\tau),$$

Выпишем гладкие потенциалы, отвечающие нижним компромиссным оценкам

$$\varepsilon_{i*}(t, x) =$$

$$= \max \left\{ \max_{\|l\|=1} \left[\langle l, X[T, t]x \rangle - \max_{m \in M_i} \langle l, m \rangle \right] + \alpha_i(T-t), 0 \right\} =$$

$$= \max \left\{ \max_{\|l\|=1} \left[\left\langle \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 x_{1j}[T, t]x_j \\ \sum_{j=1}^3 x_{2j}[T, t]x_j \\ \sum_{j=1}^3 x_{3j}[T, t]x_j \end{pmatrix} \right\rangle \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\max_{m \in M_i} \left\langle \left(\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} m_1^{(i)} \\ m_2^{(i)} \\ m_3^{(i)} \end{array} \right) \right\rangle + \alpha_i (T-t), 0 \Bigg\} = \\
 & = \max \left\{ \max_{\|l\|=1} \left[\sum_{s=1}^3 l_s \left(\sum_{j=1}^3 x_{sj} [T, t] x_j \right) - \sum_{s=1}^3 l_s m_s^{(i)} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha_i (T-t), 0 \right\} = \\
 & = \max \left\{ \max_{\|l\|=1} \left[\sum_{s=1}^3 l_s (z_s(t, x) - m_s^{(i)}) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha_i (T-t), 0 \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$z_s(t, x) = \sum_{j=1}^3 x_{sj} [T, t] x_j, \quad s = 1, 2, 3.$$

Вектор $l^0(t, \tau, x) \in \{l \in R^3 \mid \|l\| = 1\}$, на котором достигается максимум, имеет вид

$$\begin{aligned}
 l^0(t, x) &= \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(i)})^2}} \begin{pmatrix} z_1(t, x) - m_1^{(i)} \\ z_2(t, x) - m_2^{(i)} \\ z_3(t, x) - m_3^{(i)} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тогда для всех $i = 1, 2, 3$ находим

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{i^*}(t, x) &= \max \left\{ \sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(i)})^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha_i (T-t), 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются гладкие потенциалы, отвечающие верхним компромиссным оценкам:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i^*(t, x) &= \max \left\{ \max_{\|l\|=1} \left[\langle l, X[T, t]x \rangle - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \max_{m \in M_i} \langle l, m \rangle + \beta_i (T-t) \right], 0 \right\} = \\
 &= \max \left\{ \sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(i)})^2} + \beta_i (T-t), 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

3. Компромиссное управление

Для формирования неравенств, определяющих набор компромиссных управлений, требуется вычислить частные производные от потенциалов. Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{i^*}(t, x) &= \\
 &= \frac{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(i)}) \cdot \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial t}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(i)})^2}} - \alpha_i, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_i^*(t, x) &= \\
 &= \frac{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(i)}) \cdot \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial t}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(i)})^2}} - \\
 & \quad - \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{i^*}(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_i^*(t, x) = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \varepsilon_{i^*}(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \varepsilon_{i^*}(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon_{i^*}(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \varepsilon_i^*(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \varepsilon_i^*(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon_i^*(t, x) \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(i)})^2}} \times \\
 & \quad \times \sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(i)}) \times \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Выпишем левые части неравенств, определяющие компромиссные управления игроков в каждой текущей позиции (t, x) . В силу (3.1), (3.2) находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{1^*}(t, x) + \\
 & + \min_{u \in P} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{1^*}(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)}) \cdot \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial t}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)})^2}} - \\
 & - \alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)})^2}} \times \\
 & \times \min_{u \in P} \left\langle \sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2 + v_2 + w_2 \\ u_2 + v_2 + w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\
 &= \frac{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)}) \cdot \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial t}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)})^2}} - \alpha_1 + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)})^2}} \times \\
 & \times \left[\left\langle \sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \right. \right. \\
 & \left. \left. \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + x_3 + v_1 + w_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + v_2 + w_2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + v_3 + w_3 \end{pmatrix} \right\rangle - \right. \\
 & \left. \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \left[\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)}) \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_j} \right]^2}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)})^2}} \right], \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{2*}(t, x) + \\
 & + \min_{v \in P} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{2*}(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle = \\
 &= \frac{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(2)}) \cdot \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial t}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(2)})^2}} - \alpha_2 + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(2)})^2}} \times \\
 & \times \left[\left\langle \sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(2)}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \right. \right. \\
 & \left. \left. \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + x_3 + u_1 + w_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + u_2 + w_2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + u_3 + w_3 \end{pmatrix} \right\rangle - \right. \\
 & \left. \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \left[\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(2)}) \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_j} \right]^2}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(2)})^2}} \right], \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{3*}(t, x) + \\
 & + \min_{w \in P} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{3*}(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle = \\
 &= \frac{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(3)}) \cdot \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial t}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(3)})^2}} - \alpha_3 + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(3)})^2}} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\langle \sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(3)}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + x_3 + u_1 + v_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + u_2 + v_2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + u_3 + v_3 \end{pmatrix} \right\rangle - \\
 & \left. \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \left[\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(3)}) \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_j} \right]^2}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(3)})^2}} \right], \quad (3.5) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_1^*(t, x) + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_1^*(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle = \\
 & = \frac{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)}) \cdot \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial t}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)})^2}} - \beta_1 + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)})^2}} \times \\
 & \left\langle \sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 + v_1 + w_1 \\ u_2 + v_2 + w_2 \\ u_2 + v_2 + w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\
 & = \frac{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)}) \cdot \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial t}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)})^2}} - \beta_1 + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)})^2}} \times \\
 & \left\langle \sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(1)}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + x_3 + u_1 + v_1 + w_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + u_2 + v_2 + w_2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + u_3 + v_3 + w_3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (3.6) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_2^*(t, x) + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_2^*(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle = \\
 & = \frac{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(2)}) \cdot \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial t}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(2)})^2}} - \beta_2 + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(2)})^2}} \times \\
 & \left\langle \sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(2)}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + x_3 + u_1 + v_1 + w_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + u_2 + v_2 + w_2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + u_3 + v_3 + w_3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (3.7) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_3^*(t, x) + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_3^*(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle = \\
 & = \frac{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(3)}) \cdot \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial t}}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(3)})^2}} - \beta_3 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(3)})^2}} \times \\
 & \times \left\langle \sum_{s=1}^3 (z_s(t, x) - m_s^{(3)}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_s(t, x)}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + x_3 + u_1 + v_1 + w_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + u_2 + v_2 + w_2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + u_3 + v_3 + w_3 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Система неравенств, из которой определяется компромиссный набор стратегий, имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{1*}(t, x) + \\
 & + \min_{u \in P} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{1*}(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle \geq 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{2*}(t, x) + \\
 & \min_{v \in P} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{2*}(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle \geq 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{3*}(t, x) + \\
 & + \min_{w \in P} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{3*}(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle \geq 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_1^*(t, x) + \\
 & + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_1^*(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle \leq 0, \quad (3.9) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_2^*(t, x) + \\
 & + \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_2^*(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle \leq 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_3^*(t, x) + \\
 & \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_3^*(t, x), Ax + u + v + w \right\rangle \leq 0.
 \end{aligned}$$

Здесь левые части системы неравенств (3.9) вычисляются по формулам (3.2)–(3.8).

4. Численный эксперимент

Численный эксперимент для данного примера проводится по схеме, аналогичной той, которая была применена в работе [4]. В частности, здесь полагается $T = 1$, компромиссные оценки принимаются равными

$$\begin{aligned}
 S_{1*} = 0.8, S_{2*} = 0.8, S_{3*} = 0.8, \\
 S_1^* = 0.9, S_2^* = 0.9, S_3^* = 0.9,
 \end{aligned}$$

а коэффициенты в гладких потенциалах –

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{37}{200} = 0.185, \\
 \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{9}{50} = 0.18.
 \end{aligned}$$

В качестве начальной позиции выбрана точка $(t_0, x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (0, 0, 0, 0)$. Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{1*}(0, 0, 0, 0) = \varepsilon_{2*}(0, 0, 0, 0) = \varepsilon_{3*}(0, 0, 0, 0) = \\
 = 0.815, \\
 \varepsilon_1^*(0, 0, 0, 0) = \varepsilon_2^*(0, 0, 0, 0) = \varepsilon_3^*(0, 0, 0, 0) = \\
 = 0.82.
 \end{aligned}$$

Тогда начальная позиция удовлетворяет неравенствам

$$S_{1*} \leq \varepsilon_{i*}(0, 0, 0, 0) \leq S_i^*, \quad i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим последовательно следующие ситуации:

- а) среди игроков нет уклонистов;
- б) первый игрок уклоняется от компромиссного набора, прицеливаясь на свое целевое множество;
- в) второй игрок уклоняется от компромиссного набора, прицеливаясь на свое целевое множество;
- г) третий игрок уклоняется от компромиссного набора, прицеливаясь на свое целевое множество.

Управления уклонистов выбираем, как и в [4], в виде

$$\begin{aligned}
 u^{ukl}(t, x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (m_s^{(1)} - x_s)^2}} \begin{pmatrix} m_1^{(1)} - x_1 \\ m_2^{(1)} - x_2 \\ m_3^{(1)} - x_3 \end{pmatrix}, \\
 v^{ukl}(t, x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (m_s^{(2)} - x_s)^2}} \begin{pmatrix} m_1^{(2)} - x_1 \\ m_2^{(2)} - x_2 \\ m_3^{(2)} - x_3 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$w^{ijkl}(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{s=1}^3 (m_s^{(3)} - x_s)^2}} \begin{pmatrix} m_1^{(3)} - x_1 \\ m_2^{(3)} - x_2 \\ m_3^{(3)} - x_3 \end{pmatrix}.$$

Длина временного полуинтервала при построении ломаных Эйлера принимается равной $\delta = 0,001$.

Результаты расчетов приведены в таблице, данные которой подтверждают факт принадлежности значения платы i -го игрока промежутку $[S_{i*}, S_i^*]$, $i = 1, 2, 3$ для компромиссного набора стратегий. При этом уклонение игрока от этого набора не привело к достижению игроком-уклонистом величины платы меньшей, чем его нижняя компромиссная оценка (см. таблицу).

Игроки	Нижняя компромиссная оценка	Величина платы при уклонении	Величина платы для компромиссной ситуации	Верхняя компромиссная оценка
Первый игрок	0,8	0,8343	0,8653	0,9
Второй игрок	0,8	0,803	0,9	0,9
Третий игрок	0,8	0,8058	0,9	0,9

Заключение

В статье приведен модельный пример, иллюстрирующий алгоритм построения компромиссного набора стратегий в линейной дифференциальной игре трех лиц с существенно более сложной динамикой, чем в аналогичном примере из работы [4]. Показана возможность применения этого алгоритма для случая линейной динамики игры, не являющейся "простым движением", и его эффективность для этого случая.

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1973. 455 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой М.: Наука, 1985. 520 с.
3. Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, Уральское отделение 1993. 180 с.
4. Лутманов С.В. Реализация принципа компромисса в линейных дифференциальных играх нескольких лиц // Вестник Пермского университета. Математика, механика, информатика. Вып. 4(31). Пермь, 2015. С. 28–35.

Construction of a compromise set of strategies in one linear differential game of three persons

S. V. Lutmanov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
mpu@psu.ru; (342) 239-63-09

The article provides a model example illustrating the algorithm of constructing a compromise set of strategies in a linear differential game of three persons with substantially more difficult dynamics than "simple motion". The efficiency of this algorithm for the case under examination is demonstrated.

Keywords: *compromise set of strategies; Nash equilibrium; differential game; stable bridge; extreme aiming.*