ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Математика. Механика. Информатика Вып.3(34)

УДК 517.929

Гладкие решения некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений

В. Б. Черепенников
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН
Россия, 614990, Иркутск, ул. Лермонтова, 130
vbcher@mail.ru

Излагаются результаты исследования скалярного линейного функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа $\dot{x}(t) = a(t)x(t-1) + b(t)x(t/q) + f(t), \quad q > 1$. Основное внимание уделяется начальной задаче с начальной функцией, когда начальное условие задается на начальном множестве. В качестве метода исследования применяется метод полиномиальных квазирешений, который основан на представлении неизвестной функции $x(t)$ в виде полинома степени N. При подстановке этой функции в исходное уравнение возникает невязка $\Delta(t) = O(t^N)$, для которой получено точное аналитическое представление. Тогда под полиномиальным квазирешением понимается точное решение в виде полинома степени N возмущенной на невязку исходной начальной задачи.
Доказано, что если для исследуемой начальной задачи выбрать в качестве начальной функции полиномиальное квазирешение степени N, то порождаемое решение будет иметь в точках стыковки решений гладкость не ниже N.

Ключевые слова: *функционально-дифференциальные уравнения; начальная задача с начальной функцией; полиномиальные квазирешения; гладкие решения.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-3-32-36

Введение

При исследовании математическими методами процессов, происходящих в различных областях науки и техники, во многих случаях в качестве математических моделей таких процессов используются функционально-дифференциальные уравнения. Наиболее исследованными являются линейные функционально-дифференциальные уравнения (ЛФДУ) [1–3]. При изучении решений начальной задачи для таких уравнений широкое распространение получил метод последовательного интегрирования (метод шагов), при котором на начальном множестве, равном запаздыванию, тем или иным способом задается начальная функция. В этом случае решение ЛФДУ сводится к решению последовательности задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений без отклонения аргумента. И если полученные таким образом обыкновенные дифференциальные уравнения удовлетворяют условиям существования единственного решения начальной задачи (например, теореме Пикара), то и решение исследуемого ЛФДУ будет единственным. С другой стороны известно, что, как правило, в точках стыковки решений, т.е. в точках, кратных запаздыванию, решение имеет разрывную производную.

Показано, что если для ЛФДУ запаздывающего типа гладкость решения в последующих точках стыковки возрастает, то для ЛФДУ нейтрального типа разрыв производных сохраняется во всех следующих точках стыковки решений. Это свойство нарушения гладкости решений в точках, кратных запаздыванию, является специфической особенностью ЛФДУ.

В связи с этим достаточно важной является задача изучения класса начальных функций, которые порождают решения исследуемого ЛФДУ, обладающего в точках, кратных запаздыванию, необходимой гладкостью. В свою очередь это позволит корректировать начальную функцию, которая для конкретной прикладной задачи выбирается исходя из априорной информации или находится экспериментальным путем и не является достаточно точной, так, чтобы решение в точках стыковки имело необходимую гладкость.

С этой целью в данной работе применяется метод полиномиальных квазирешений [4–6], который был разработан для исследования начальной задачи с начальной точкой для ЛФДУ различных типов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим начальную задачу с начальной функцией для следующего линейного функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа:

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t-1) + b(t)y(t/q) + \overline{f}(t),$$
$$q > 1, \quad t \in [0, \infty); \tag{1}$$

$$y(t) = g(t), \quad t \in [-1, 0], \tag{2}$$

где

$$g(t) \in C^{\infty}[-1,0], \;\; a(t) = a_0 + a_1 t,$$
$$b(t) = b_0 + b_1 t, \tag{3}$$

$$\overline{f}(t) = \sum_{n=0}^{F} \overline{f}_n t^n. \tag{4}$$

Сформулируем задачу о гладких решениях: определить условия существования и способы нахождения начальной функции $g(t)$, $t \in [-1,0]$, такой, что порождаемое ею решение начальной задачи (1)–(4) обладает в точках, кратных запаздыванию, необходимой гладкостью.

Покажем, что эта задача может быть решена на основе метода полиномиальных квазирешений.

2. Метод полиномиальных квазирешений

Сформулируем начальную задачу с начальной точкой для рассматриваемого уравнения в (1), которое перепишем в виде

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t-1) + b(t)x(t/q) + \overline{f}(t),$$
$$q > 1, \quad x(0) = x_0. \tag{5}$$

Следуя методу полиномиальных квазирешений [4–6] введем полином

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad t \in R. \tag{6}$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{N} n x_n t^{n-1}, \quad x(t-1) = \sum_{n=0}^{N} x_n (t-1)^n = \sum_{n=0}^{N} \tilde{x}_n t^n,$$

$$x(t/q) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{q^n} t^n, \tag{7}$$

где

$$\tilde{x}_n = x_n + \sum_{i=1}^{N-n} \overline{C}_{n+i}^{i} x_{n+i}, \quad n = \overline{1, N-1}; \quad \tilde{x}_N = x_N. \tag{8}$$

Здесь $\overline{C_p^q} = (-1)^q C_p^q$, $C_p^q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ – биномиальные коэффициенты.

При подстановке полиномов (6) и (7) в уравнение (5) возникает некорректность в смысле размерности полиномов. Так, производная $\dot{x}(t)$ имеет размерность $N-1$, слагаемые $a(t)x(t-1)$ и $b(t)x(t/q)$ имеют размерность $N+1$, а $\overline{f}(t)$ – размерность F.

С другой стороны, для того чтобы последний коэффициент x_N в (6) определялся последним коэффициентом $\overline{f}_F$ в (4), необходимо, чтобы в формуле (6) $N = F + 1$. В этом случае в (1) слагаемые $a(t)x(t-1)$ и $b(t)x(t/q)$ будут полиномами степени $F+2$.

Полагая в (4) $N = F + 1$, определим функцию $f(t)$ виде

$$f(t) = \overline{f}(t) + \Delta(t) = \sum_{n=0}^{N+1} f_n t^n, \tag{9}$$

где $f_n = \overline{f}_n$, $n = \overline{0, N-1}$, а невязка $\Delta(t) = f_N t^N + f_{N+1} t^{N+1}$, f_N и f_{N+1} – неизвестные коэффициенты.

С учетом введенных обозначений рассмотрим начальную задачу

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t-1) + b(t)x(t/q) + f(t),$$
$$q > 1, \quad x(0) = x_0. \tag{10}$$

Определение 1. *Задачу* (10) *будем называть согласованной по размерности полиномов относительно задачи* (5).

Подставляя (6) и (7) в (5), методом неопределенных коэффициентов получаем

$$x_1 = a_0\tilde{x}_0 + b_0 x_0 + f_{0,}$$
$$nx_n = \sum_{i=0}^{1}(a_i\tilde{x}_{n-1-i} + b_i\frac{x_{n-1-i}}{q^{n-1-i}}) + f_{n-1}, \quad 2 \le n \le N;$$
$$0 = \sum_{i=0}^{1}(a_i\tilde{x}_{n-1-i} + b_i\frac{x_{n-1-i}}{q^{n-1-i}}) + f_{n-1}, \quad n = N+1, N+2. \qquad (11)$$

Отметим следующее

Замечание 1. *Поскольку степень полинома* $x(t)$ *равна* $F+1$, *это позволяет выбрать степень полинома* $\overline{f}(t)$ *в* (4) *в зависимости от желаемой степени полинома* $x(t)$, *добавляя к* $\overline{f}(t)$ *соответствующее число нулевых членов.*

Определение 2. *Если существует полином степени* $N = F+1$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad t \in R, \qquad (12)$$

тождественно удовлетворяющий начальной задаче (10), *то этот полином будем называть полиномиальным квазирешением (ПК-решением) задачи* (5).

Теорема, устанавливающая условия существовании ПК-решений начальной задачи (5), приведена в [6].

3. Гладкие решения ЛФДУ

Вернемся к начальной задаче (1)–(2), которую перепишем в виде

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t-1) + b(t)y(t/q) + \overline{f}(t),$$
$$q > 1, \quad t \in [0, \infty); \qquad (13)$$
$$y(t) = x^N(t), \quad t \in [-1, 0], \qquad (14)$$

где

$$x^N(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n^N t^n \qquad (15)$$

– полиномиальное квазирешение степени N начальной задачи с начальной точкой (5).

Теорема 1. *Пусть для начальной задачи* (13)–(14) *начальная функция представляет собой полиномиальное квазирешение* $x^N(t)$ *начальной задачи* (5).

Тогда решение задачи (13)–(14) *на отрезке* $[0, T]$, $T > 1$, *порождаемое этой начальной функцией, имеет в точках стыковки решений непрерывные производные не ниже порядка* N.

Доказательство. На первом шаге для $t \in [0,1]$ с учетом начального условия (14) получаем

$$\dot{y}(t) = a(t)x_N(t-1) + b(t)x_N(t/q) + \overline{f}(t),$$
$$q > 1, \quad t \in [0,1]. \qquad (16)$$

Поскольку согласно (3), (4), (6) и (7) правая часть уравнения представляет собой полином степени $N+1$, данное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя это уравнение, находим решение в виде полинома

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N+2} y_n t^n. \qquad (17)$$

Для нахождения коэффициентов y_n подставим (3), (4), (6) и (7) для $x_n = x_n^N$ в (16). Собирая слагаемые при одинаковых степенях t, приходим к рекуррентной формуле

$$y_1 = a_0\tilde{x}_0^N + b_0 x_0^N + f_{0,}$$
$$ny_n = \sum_{i=0}^{1}(a_i\tilde{x}_{n-1-i}^N + b_i\frac{x_{n-1-i}^N}{q^{n-1-i}}) + f_{n-1}, \quad 2 \le n \le N+2. \qquad (18)$$

Из сравнения формул (11) и (17) следует, что

$$y_k = x_k^N, \quad k = \overline{1, N}. \qquad (19)$$

Так как из (15) и (17) вытекает, что при $t = 0$

$$x_n^N = \frac{(x^N(0))^{(n)}}{n!} \text{ и } y_n = \frac{y(0)^{(n)}}{n!}$$

из (19) следует, что в точке $t = 0$ стыковки начальной функции $x^N(t)$ и порождаемого решения $y(t)$ имеет место равенство производных

$$y^{(n)}(0) = (x^N(0))^{(n)}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Для исследуемого ЛФДУ запаздывающего типа (1) это означает, что в последующих точках стыковки решений $t = 1, 2, \ldots$ гарантировано существование N непрерывных производных у порождаемого решения $y(t)$. □

4. Численный эксперимент

Рассмотрим начальную задачу с начальной точкой для функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = (1 + t/2)x(t-1) + (1+t)x(t/2),$$

$$x(0)=1, \quad t\in R. \qquad (20)$$

Определим ПК-решение в виде полинома $x^N(t)=\sum_{n=0}^{N} x_n^N t^n$.

Тогда, согласно *определению 1,* запишем начальную задачу, согласованную по размерности полиномов.

$$\dot{x}(t)=(1+t/2)x(t-1)+(1+t)x(t/2)+ \\ +f_N t^N+f_{N+1}t^{N+1}, \quad x(0)=1.$$

В этом уравнении с учетом замечания 1 и формулы (9)

$$f(t)=\sum_{n=0}^{N+1} f_n t^n, \quad f_n=0,\, n=\overline{0,N-1},$$

а f_N и f_{N+1} – неизвестные коэффициенты, которые определяют невязку в виде

$$\Delta(t)=f_N t^N+f_{N+1}t^{N+1}.$$

Приведем результаты вычислений ПК-решений задачи (20) и соответствующих им невязок начальной задачи, полученные в [6], для $N=4,5,6$.

$$x^4(t)=1+1.3400t+1.0213t^2+0.4600t^3+0.1187t^4,$$

$$\Delta_4(t)=-0.2356t^4-0.0669t^5.$$

$$x^5(t)=1+1.3513t+1.0149t^2+0.4321t^3+0.1598t^4+ \\ +0.0400t^5,$$

$$\Delta_5(t)=-0.0311t^5-0.0213t^6.$$

$$x^6(t)=1+1.3508t+1.0189t^2+04310t^3+ \\ +0.1598t^4+0.0400t^5,$$

$$\Delta_6(t)=-0.0148t^6-0.0023t^7.$$

Исследуем теперь начальную задачу с начальной функцией для уравнения (20), которую запишем в виде

$$\dot{y}(t)=(1+t/2)y(t-1)+(1+t)y(t/2), \quad t\in[0,\infty) \\ y(t)=x^4(t), \quad t\in[-1,0], \qquad (21)$$

где $x^4(t)$ – ПК-решение 4-й степени.

Подставляя в (20)

$$x^4(t-1)=1+1.3400(t-1)+1.0213(t-1)^2+ \\ +0.4600(t-1)^3+0.1187(t-1)^4,$$

$$x^4(t/2)=1+1.3400(t/2)+1.0213(t/2)^2+ \\ +0.4600(t/2)^3+0.1187(t/2)^4$$

и проводя преобразования относительно переменной *t,* приходим к уравнению

$$\dot{y}(t)=1.3400+2.0426t+1.3800t^2+ \\ +0.4748t^3+0.1762t^4+0.0668t^5.$$

Поскольку $x(0)=1$, интегрируя, получаем

$$y(t)=1+1.3400t+1.0213t^2+0.4600t^3+ \\ +0.1187t^4+0.0352t^5+0.0111t^6.$$

Сравнивая ПК-решение $x^4(t)$, определенное для $t\in[-1,0]$ с решением $y(t)$, определенном для $t\in[0,1]$, приходим к выводу, что при $t=0$ в точке стыковки начальной функции и порождаемого решения имеет место равенство производных, т.е.

$$\frac{d(x^4(t))^n}{dt^n}=\frac{dy^n(t)}{dt^n}$$

для $n=\overline{1,4}$.

Следовательно, в последующих точках стыковки решений $t=1,2,...$ гарантировано существование N непрерывных производных у порождаемого решения $y(t)$.

Список литратуры

1. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
4. *Черепенников В.Б.* Полиномиальные квазирешения линейных систем дифференциально-разностных уравнений // Известия вузов. Сер. Математика. 1999. № 10. С. 49–58.
5. *Cherepennikov V.B., Ermolaeva P.G.* Polynomial quasisolutions of linear differential difference equations // Opuscula Mathematica, 2006. 26/3. P. 431–443.
6. *Черепенников В.Б.* Численно-аналитический метод исследования некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений // Сибирский журнал вычислительной математики. Новосибирск, 2013. Т. 16, № 3. С. 275–285.

Smooth solutions of some linear functional differential equations

V. B. Cherepennikov
Melentiev Energy Systems Institute SB RAS; 130, Lermontova st., Irkutsk, 664033, Russia
vbcher@mail.ru

The paper presents the results of studying the scalar linear functional differential equation of a delay type $\dot{x}(t) = a(t)x(t-1) + b(t)x(t/q) + f(t), \quad q > 1.$

The main attention is paid to the initial value problem with the initial function when the initial condition is specified at the initial set. The method of polynomial quasi-solutions, which is based on representation of the unknown function $x(t)$ in the form of a polynomial of degree N, is applied as the research method. Substitution of this function into the original equation results in the residual $\Delta(t) = O(t^N)$, for which a faithful analytical representation is obtained. In this case, the polynomial quasi-solution is understood as the exact solution in the form of the polynomial of degree N disturbed because of the residual of the original initial problem. It is proved that if for the initial value problem under study a polynomial quasi-solution of degree N is chosen as the initial function, then the solution generated will have smoothness of not less than degree N at abutment points.

Keywords: *functional differential equations; initial value problem with initial function; polynomial quasi-solutions; smooth solutions.*