ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Математика. Механика. Информатика Вып. 3(34)

\

УДК 517.929

Об осциллирующих решениях автономных дифференциальных уравнений с последействием

Т. Л. Сабатулина
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29
TSabatulina@gmail.com; +7(342)2391564

Для автономных дифференциальных уравнений с ограниченным последействием получено необходимое и достаточное условие осцилляции решений в терминах нулей характеристической функции. На основе данного критерия найдены эффективные условия осцилляции решений дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями разной природы.

Ключевые слова: *функционально-дифференциальные уравнения; осцилляция; сосредоточенное запаздывание; распределенное запаздывание.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-3-25-31

Введение

Как показали самые первые исследования уравнений с последействием [1], их решения, начиная с линейных уравнений первого порядка, могут иметь любое (в том числе и бесконечное) множество нулей. Это обстоятельство сделало актуальной задачу отыскания осциллирующих решений уже для скалярных функционально-дифференциальных уравнений. Решение данной задачи было начато с уравнений с сосредоточенным запаздыванием [1–5], которым до сих пор посвящена большая часть исследований (см. монографии [6–8] и библиографию к ним). Для этих уравнений необходимым и достаточным условием осцилляции всех решений является отсутствие вещественных нулей у характеристического квазиполинома [2, 6, 7]. Для уравнения с одним сосредоточенным запаздыванием $\dot{x}(t)+ax(t-h)=0$ на основе этого критерия был найден коэффициентный признак осцилляции: все решения данного уравнения осциллируют тогда и только тогда, когда $ah>\frac{1}{e}$.

С развитием теории функционально-дифференциальных уравнений был найден удобный общий вид линейных автономных уравнений с последействием в форме интеграла Римана–Стилтьеса [9, 10]. Такая запись позволяет рассматривать одновременно и сосредоточенное, и распределенное запаздывание и устанавливать факты, общие для всего класса автономных функционально-дифференциальных уравнений.

В настоящей работе для автономного дифференциального уравнения с ограниченным последействием доказан критерий осцилляции решений в терминах нулей характеристической функции. Полученный результат был применен к уравнениям с двумя запаздываниями различной природы и позволил получить для них эффективные признаки осцилляции.

1. Постановка задачи. Пусть N – множество натуральных; R – вещественных;

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки Российской Федерации (задание №2014/152, проект № 1890).

R_+ – вещественных неотрицательных; C – комплексных чисел.

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение с ограниченным последействием:

$$\dot{x}(t)+\int_0^{\omega} x(t-s)\,dr(s)=0\,,\ t\in R_+\,, \quad (1)$$

где $\omega>0$, функция $r:R_+\to R$ имеет ограниченную вариацию, $r(0)=0$. Интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса. Следуя [11], назовем решением уравнения (1) локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду. При отрицательных значениях аргумента полагаем решение доопределенным заданной начальной функцией.

Определение 1. Будем называть определенную на положительной полуоси непрерывную функцию *осциллирующей*, если она имеет на полуоси неограниченную справа последовательность нулей.

В исследовании уравнения (1) важную роль занимает его характеристическая функция

$$g(p)=p+\int_0^{\omega} e^{-p\xi}\,dr(\xi)\,,\ p\in C\,.$$

2. Основной результат

Теорема 1. *Все решения уравнения* (1) *осциллируют тогда и только тогда, когда функция* g *не имеет вещественных корней*.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [9]. *Любое решение уравнения* (1) *при любом* $\lambda\in R$ *представимо в виде*

$$x(t)=\sum_{\operatorname{Re} p_m\ge\lambda} q_m(t)e^{p_m t}+z(t)\,,\ t\in R_+\,,$$

где сумма берется по всем нулям p_m *функции* g, *для которых* $\operatorname{Re} p_m\ge\lambda$, q_m – *полином, степень которого на единицу меньше кратности корня* p_m, *причем* $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|z_j(t)\right|e^{-\lambda t}=0$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(t)=\sum_{i=1}^{n} R_i\cos(\beta_i t-\varphi_i)\,, \quad (2)$$

где $n\in N$, $R_i>0$, $\beta_i,\varphi_i\in R$, $0<\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n$.

Лемма 2. *Функция* ψ *является осциллирующей.*

Доказательство. Из теоремы Ролля следует, что между двумя нулями дифференцируемой функции лежит нуль ее производной. Значит, если бесконечно дифференцируемая функция осциллирует, то осциллирует любая ее производная.

Рассмотрим функцию

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i}{\beta_i^{4k}}\cos(\beta_i t-\varphi_i)\,.$$

Докажем, что при некотором $k\in N$ функция y является осциллирующей.

Так как $\beta_1<\beta_i$ для любых $i\ge 2$, то можно выбрать k так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{R_1}{\beta_1^{4k}}>\sum_{i=2}^{n}\frac{R_i}{\beta_i^{4k}}\,.$$

Возьмем $\theta_n=\frac{\varphi_1+2\pi n}{\beta_1}$, $n\in N$. Вычислим

$$y(\theta_n)=\frac{R_1}{\beta_1^{4k}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{R_i}{\beta_i^{4k}}\cos(\beta_i\theta_n-\varphi_i)\ge$$

$$\ge\frac{R_1}{\beta_1^{4k}}-\sum_{i=2}^{n}\frac{R_i}{\beta_i^{4k}}>0\,,$$

$$y(\theta_n+\pi)\le-\frac{R_1}{\beta_1^{4k}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{R_i}{\beta_i^{4k}}<0\,.$$

Следовательно, функция y является осциллирующей, а так как $y^{(4k)}(t)\equiv\psi(t)$, то лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1.

Необходимость. Если функция g имеет вещественный корень ζ_0, то уравнение (1) имеет неосциллирующее решение $e^{\zeta_0 t}$.

Достаточность. Известно [9], что:

а) существует такое $\lambda_0\in R$, что функция g не имеет нулей при $\operatorname{Re} p>\lambda_0$;

б) множество нулей функции g конечно в каждой вертикальной полосе на комплексной плоскости.

Следовательно, количество нулей функции g с наибольшей вещественной частью конечно. Обозначим эти нули через p_i, их количество через n, $\operatorname{Re} p_i=\alpha_{\max}$, $\operatorname{Im} p_i=\beta_i$. В силу леммы 1 любое решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t)=e^{\alpha_{\max}t}\sum_{i=1}^{n}\big(A_i(t)\cos(\beta_i t)+$$

$$+B_i(t)\sin(\beta_i t)\big)+\varepsilon(t),$$

где A_i, B_i – полиномы, степени которых на единицу меньше кратности корня p_i, $\left|\varepsilon(t)\right| \le Ne^{\alpha_0 t}$, $\alpha_0 < \alpha_{\max}$. Однако α_0 больше вещественной части нулей функции g, находящихся слева от прямой $\operatorname{Re} p = \alpha_{\max}$.

Обозначим максимальную степень полиномов A_i, B_i, $i = \overline{1,n}$, через m_0, а коэффициенты перед t^{m_0} в этих полиномах – a_i и b_i соответственно. Получаем

$$\frac{x(t)}{t^{m_0}e^{\alpha_{\max}t}} = w(t) + \tilde{\varepsilon}(t),$$

где $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde{\varepsilon}(t) = 0$, $w(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\cos(\beta_i t) + b_i\sin(\beta_i t)\right)$. Очевидно, что функцию w можно привести к виду (2). Тогда по лемме 2 функция ψ осциллирует. Следовательно, функция x также осциллирует. □

3. Уравнение с двумя запаздываниями

Применим теорему 1 к исследованию осцилляции решений следующего уравнения:

$$\dot{x}(t) + bx(t-h) + c\int_{t-\tau}^{t} x(s)\,ds = 0,\ t \in R_+, \quad (3)$$

где $b, c \in R$, $h, \tau > 0$.

Характеристическая функция уравнения (3) имеет вид:

$$g(p) = p + be^{-ph} + c\frac{1-e^{-p\tau}}{p},\ p \in C.$$

Лемма 3. *Пусть при некоторых* $b_0, c_0 \in R$ *и* $h, \tau > 0$, *функция*

$$g_0(p) = p + b_0 e^{-ph} + c_0\frac{1-e^{-p\tau}}{p}$$

имеет хотя бы один вещественный корень.

Тогда для всех $b, c \in R$ *таких, что* $b \le b_0$, $c \le c_0$, *функция* g *также имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. Очевидно, что при всех $\zeta \in R$ справедливо $g(\zeta) \le g_0(\zeta)$. При некотором $\zeta_0 \in R$ справедливо $g_0(\zeta_0) = 0$, поэтому $g(\zeta_0) \le g_0(\zeta_0) = 0$. С другой стороны, $\lim\limits_{\zeta\to+\infty} g(\zeta) = +\infty$. Поэтому функция g имеет хотя бы один вещественный корень. □

Лемма 4. *Если выполнено любое из условий*

а) $h \ge \tau$, $b < 0$,

б) $h < \tau$, $c < 0$,

то функция g *имеет хотя бы один вещественный корень.*

Доказательство. Заметим, что $\lim\limits_{\zeta\to+\infty} g(\zeta) = +\infty$. Помимо этого, если $h \ge \tau$ и $b < 0$ (или $h < \tau$ и $c < 0$), то $\lim\limits_{\zeta\to-\infty} g(\zeta) = -\infty$. Поэтому функция g имеет хотя бы один вещественный корень. □

Лемма 5. *Пусть* $h < \tau$. *Тогда для любых* $b \in R$, $h, \tau > 0$ *найдется такое* $c_0 \in R_+$, *что для любого* $c > c_0$ *функция* g *не имеет вещественных нулей, причем при некотором* $\zeta \in R$ *справедливо*

$$\begin{cases} \zeta + be^{-\zeta h} + c_0\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\zeta} = 0, \\ 1 - bhe^{-\zeta h} + c_0\frac{d}{d\zeta}\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\zeta} = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Из условия $g(\zeta) = 0$ получаем

$$c = -\frac{\zeta + be^{-\zeta h}}{\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\zeta}}.$$

Считая c функцией от ζ, продифференцируем последнее выражение по ζ:

$$\frac{dc}{d\zeta} = -\frac{1-bhe^{-\zeta h}}{\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\zeta}} + \frac{\zeta + be^{-\zeta h}}{\left(\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\zeta}\right)^2}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\zeta}\right).$$

Найдем такое ζ_0, что $\left.\frac{dc}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0} = 0$.

Учитывая $g(\zeta_0) = 0$, получаем $\left.\frac{dg}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0} = 0$.

Наконец, применив лемму 3, имеем $c_0 = c(\zeta_0)$. □

Аналогично лемме 5 доказывается следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть* $h \ge \tau$. *Тогда для любых* $c \in R$, $h, \tau > 0$ *найдется такое* $b_0 \in R_+$, *что для любого* $b > b_0$ *функция* g *не имеет вещественных нулей, причем при некотором* $\zeta \in R$ *справедливо*

$$\begin{cases} \zeta + b_0 e^{-\zeta h} + c\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\zeta} = 0, \\ 1 - b_0 he^{-\zeta h} + c\frac{d}{d\zeta}\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\zeta} = 0. \end{cases}$$

4. Эффективные признаки осцилляции

Леммы 5 и 6 указывают на необходимость исследования системы

$$\begin{cases} \zeta + be^{-\zeta h} + c\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\zeta} = 0, \quad \zeta \in R, \\ 1 - bhe^{-\zeta h} + c\frac{d}{d\zeta}\frac{1-e^{-\zeta\tau}}{\zeta} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Равенства (4) приводят к тому, что

$$b = -\frac{e^{h\zeta}\int_0^\tau (1+\zeta\xi)e^{-\zeta\xi}d\xi}{\int_0^\tau (\xi-h)e^{-\zeta\xi}d\xi}, \quad c = \frac{h\zeta+1}{\int_0^\tau (\xi-h)e^{-\zeta\xi}d\xi}.$$

Эти равенства описывают некоторую кривую $c = c(b)$. Исследуем ее свойства.

Обозначим $\gamma = \frac{h}{\tau}$. Также введем α – положительный корень уравнения

$$e^{-s} = 1 - \frac{s}{2}, \tag{5}$$

$\alpha \approx 1{,}593624...$

Случай $\gamma \ge 1$. Для начала вычислим

$$\frac{db}{d\zeta} = \frac{e^{h\zeta}\int_0^\tau e^{-\zeta\xi}d\xi}{\left(\int_0^\tau (\xi-h)e^{-\zeta\xi}d\xi\right)^2} g_1(\zeta),$$

$$\frac{dc}{d\zeta} = -\frac{g_1(\zeta)}{\left(\int_0^\tau (\xi-h)e^{-\zeta\xi}d\xi\right)^2},$$

где $g_1(\zeta) = -\int_0^\tau \left((h\zeta+1)\xi^2 - h^2\zeta\xi - h^2\right)e^{-\zeta\xi}d\xi$, причем

$$\frac{dg_1(\zeta)}{d\zeta} = (1+h\zeta)\int_0^\tau \xi^2(\xi-h)e^{-\zeta\xi}d\xi.$$

Из леммы 4 вытекает, что если функция g не имеет вещественных корней, то $b \ge 0$. Значит, $\zeta \in \left[-\frac{\alpha}{\tau}, +\infty\right)$.

В рассматриваемом случае $\int_0^\tau \xi^2(\xi-h)e^{-\zeta\xi}d\xi < 0$. Поэтому $\frac{dg_1(\zeta)}{d\zeta} < 0$ при $\zeta > -\frac{1}{h}$, $\frac{dg_1(\zeta)}{d\zeta} > 0$ при $\zeta < -\frac{1}{h}$. Кроме того, $\frac{dg_1}{d\zeta}\left(-\frac{1}{h}\right) = 0$. Тогда функция g_1 возрастает при $\zeta < -\frac{1}{h}$, убывает при $\zeta > -\frac{1}{h}$, а при $\zeta = -\frac{1}{h}$ имеет максимум. Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$g_1\left(-\frac{\alpha}{\tau}\right) = \frac{e^{\alpha}\tau^3}{\alpha^2}(1-\gamma\alpha)(1-\alpha) > 0,$$

$$\lim_{\zeta\to+\infty} g_1(\zeta) = 0.$$

Следовательно, при $\zeta \in \left[-\frac{\alpha}{\tau}, +\infty\right)$ функция g_1 положительна. Значит, $\frac{db}{d\zeta} > 0$ и $\frac{dc}{d\zeta} < 0$, откуда получаем, что $c = c(b)$ при $b \ge 0$ является монотонно убывающей функцией.

Случай $\gamma < 1$. Сначала исследуем уравнение $\int_0^\tau (\xi-h)e^{-\zeta\xi}d\xi = 0$.

Интегрируя левую часть этого уравнения, получаем

$$-\frac{\left(1+(\tau-h)\zeta+e^{\tau\zeta}(h\zeta-1)\right)e^{-\tau\zeta}}{\zeta^2} = 0,$$

которое сводится к исследованию уравнения

$$e^{\theta} = 1 + \frac{\theta}{1-\gamma\theta}. \tag{6}$$

Несложно показать, что уравнение (6) при $\gamma < \frac{1}{2}$ имеет ровно два корня (один из них равен нулю, другой отрицательный – обозначим его θ_2), при $\gamma > \frac{1}{2}$ также имеет ровно два корня (один из них равен нулю, другой положительный – обозначим его θ_1), при $\gamma = \frac{1}{2}$ – один корень, равный нулю. С учетом этого получаем, что неравенство $c \ge 0$ выполняется лишь при следующих значениях ζ:

$\zeta \in \left[-\frac{1}{h}, \frac{\theta_1}{\tau}\right)$ при $\gamma < \frac{1}{2}$, $\zeta \in \left[-\frac{1}{h}, 0\right)$ при $\gamma = \frac{1}{2}$, $\zeta \in \left[-\frac{1}{h}, \frac{\theta_2}{\tau}\right)$ при $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{\alpha}$, $\zeta \in \left(\frac{\theta_2}{\tau}, -\frac{1}{h}\right]$ при $\frac{1}{\alpha} < \gamma < 1$ и $\zeta = -\frac{1}{h}$ при $\gamma = \frac{1}{\alpha}$.

В случае, когда $\gamma = \frac{1}{\alpha}$, $\zeta = -\frac{1}{h}$ оба уравнения системы (4) совпадают и обращаются в равенство

$$bhe + \frac{c\tau^2}{\alpha(2-\alpha)} = 1.$$

Далее полагаем $\gamma \ne \frac{1}{\alpha}$. Перепишем систему (4) (при фиксированном $\gamma < 1$) в виде

$$\begin{cases} be^{-\zeta\gamma} + c\int_0^1 e^{-\zeta\xi}d\xi = -\zeta, \\ -b\gamma e^{-\zeta\gamma} - c\int_0^1 \xi e^{-\zeta\xi}d\xi = -1. \end{cases} \tag{7}$$

Считая b и c функциями от ζ, продифференцируем оба равенства по ζ. Имеем

$$\begin{cases} \frac{db}{d\zeta}e^{-\zeta\gamma}+\frac{dc}{d\zeta}\int_0^1 e^{-\zeta\xi}d\xi=0, \\ \frac{db}{d\zeta}\gamma e^{-\zeta\gamma}+\frac{dc}{d\zeta}\int_0^1 \xi e^{-\zeta\xi}d\xi=b\gamma^2e^{-\zeta\gamma}+c\int_0^1\xi^2e^{-\zeta\xi}d\xi. \end{cases}$$

Очевидно, что $\frac{db}{d\zeta}$ и $\frac{dc}{d\zeta}$ не могут быть одного знака, также невозможно, чтобы только одно из данных выражений обращалось в нуль. Чтобы одновременно выполнялось $\frac{db}{d\zeta}=0$, $\frac{dc}{d\zeta}=0$, необходимо, чтобы $b\gamma^2e^{-\zeta\gamma}+c\int_0^1\xi^2e^{-\zeta\xi}d\xi=0$. Объединяя это условие с системой (7), а затем, исключая b и c, получаем, что

$$\gamma^2\left(\zeta I_1+I_0\right)-\gamma\zeta I_2-I_2=0, \qquad (8)$$

где $I_0=\int_0^1 e^{-\zeta\xi}d\xi$, $I_1=\int_0^1\xi e^{-\zeta\xi}d\xi$, $I_2=\int_0^1\xi^2e^{-\zeta\xi}d\xi$.

Рассматривая уравнение (8) как квадратное относительно γ, убеждаемся, что оно всегда имеет два вещественных решения $\gamma_{1,2}(\zeta)$, так как его дискриминант больше нуля:

$$I_2\left(\zeta^2I_2+4\zeta I_1+4I_0\right)=I_2\int_0^1(\zeta\xi+2)^2e^{-\zeta\xi}d\xi>0.$$

Имеем две функции $\gamma=\gamma_{1,2}(\zeta)$, $\gamma_1(\zeta)>\gamma_2(\zeta)$. Исследуем случай пересечения прямой $\gamma=const$ с $\gamma_1(\zeta)$. Функция $\gamma_1(\zeta)$ имеет горизонтальную асимптоту $\gamma=1$ и единственный минимум в точке $\zeta_0\approx-4{,}639$. Ей соответствует $\gamma_0\approx0{,}866$. При всех $\gamma\in(\gamma_0,1)$ будет две точки пересечения прямой $\gamma=const$ с кривой $\gamma=\gamma_1(\zeta)$. Таким образом, при $\gamma\le\gamma_0$ кривая $c=c(b)$ задается монотонно убывающей функцией, при $\gamma>\gamma_0$ кривая $c=c(b)$ при $c\ge0$ имеет одно самопересечение. Значения $\zeta=\zeta_1$ и $\zeta=\zeta_2$ определяют точку самопересечения, причем получающаяся "петля" лежит ниже кривой $c=c(b)$, построенной при $\zeta\in\left(\frac{\theta_2}{\tau},\zeta_1\right]\cup\left[\zeta_2,-\frac{1}{h}\right]$ (см. рис. 1, второй график). Часть кривой без "петли" задается монотонно убывающей функцией.

Введем

$$\Omega=\begin{cases}\left[-\frac{1}{h},\frac{\theta_1}{\tau}\right), & \text{если } \tau>2h,\\ \left[-\frac{1}{h},0\right), & \text{если } \tau=2h,\\ \left[-\frac{1}{h},\frac{\theta_2}{\tau}\right), & \text{если } \alpha h<\tau<2h,\\ -\frac{1}{h}, & \text{если } \tau=\alpha h,\\ \left(\frac{\theta_2}{\tau},\zeta_1\right]\cup\left[\zeta_2,-\frac{1}{h}\right], & \text{если } h<\tau<\alpha h,\\ \left[-\frac{\alpha}{\tau},+\infty\right), & \text{если } \tau\le h.\end{cases}$$

На плоскости Ouv зададим кривую

$$\Gamma_0(\tau,h)=\left\{\begin{aligned} u&=-\frac{e^{h\zeta}\zeta\left(2-2e^{\tau\zeta}+\tau\zeta\right)}{1+(\tau-h)\zeta+e^{\tau\zeta}(h\zeta-1)},\\ v&=-\frac{e^{\tau\zeta}\zeta^2(1+h\zeta)}{1+(\tau-h)\zeta+e^{\tau\zeta}(h\zeta-1)},\zeta\in\Omega.\end{aligned}\right\}.$$

Определим область $D_0(\tau,h)$ следующим образом. При $\tau\le h$ к области $D_0(\tau,h)$ отнесем все точки (u,v), лежащие выше кривой $\Gamma_0(\tau,h)$, причем $u\ge0$. При $\tau>h$ к области $D_0(\tau,h)$ отнесем все точки (u,v), лежащие выше кривой $\Gamma_0(\tau,h)$, причем $v\ge0$.

На основе изложенного выше получаем следующий результат.

Теорема 2. *Все решения уравнения* (3) *осциллируют тогда и только тогда, когда точка* (b,c) *принадлежит области* $D_0(\tau,h)$.

На рис. 1 изображены три сечения области D_0.

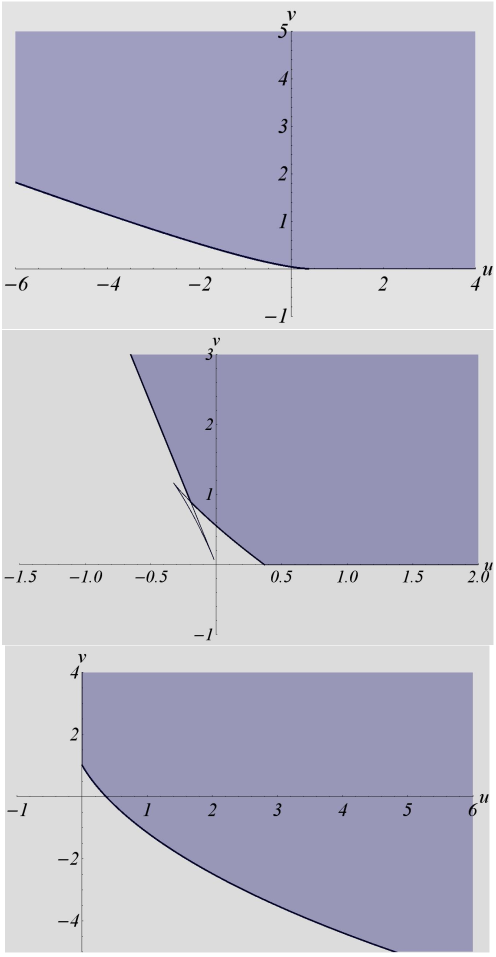

Рис. 1. *Область* $D_0(\tau,h)$ *при* $h=1$, $\tau=4$ *(вверху), при* $h=1$, $\tau=1.08$ *(в середине) и при* $h=0.8$, $\tau=1$ *(внизу)*

Аналогично можно найти условия осцилляции решений следующих уравнений:

$$\dot{x}(t)+bx(t-h)+cx(t-\tau)=0,\ t\in R_+, \quad (9)$$

$$\dot{x}(t)+b\int_{t-h}^{t}x(s)\,ds+c\int_{t-\tau}^{t}x(s)\,ds=0,\, t\in R_+ . \quad (10)$$

В обоих уравнениях $b,c\in R$, $h,\tau\in R_+$. Случай $h=\tau$ содержится в теореме 2, поэтому, не нарушая общности, далее считаем, что $h<\tau$.

На плоскости Ouv зададим кривую

$$\Gamma_1(\tau,h)=\left\{\begin{aligned}&u=\tfrac{1+\zeta\tau}{\tau-h}e^{\zeta h},\\ &v=-\tfrac{1+\zeta h}{\tau-h}e^{\zeta\tau},\zeta\in\left[-\tfrac{1}{h},+\infty\right).\end{aligned}\right\}.$$

К области $D_1(\tau,h)$ отнесем все точки (u,v), лежащие выше кривой $\Gamma_1(\tau,h)$, причем $v\geq 0$.

Теорема 3 [12]. *Все решения уравнения* (9) *осциллируют тогда и только тогда, когда точка* (b,c) *принадлежит области* $D_1(\tau,h)$.

На рис. 2 изображено характерное сечение области D_1.

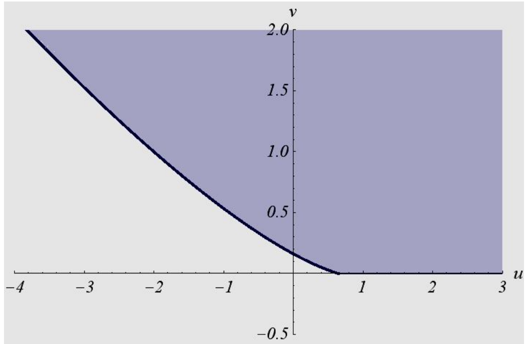

Рис. 2. *Область* $D_1(\tau,h)$ *при* $h=0{,}5$, $\tau=2$

На плоскости Ouv зададим кривую

$$\Gamma_2(\tau,h)=\left\{\begin{aligned}&u=-\frac{\zeta e^{\zeta h}\left(2e^{\zeta\tau}-\zeta\tau-2\right)}{\tau-\tau e^{\zeta h}-h+he^{\zeta\tau}},\\ &v=\frac{\zeta e^{\zeta\tau}\left(2e^{\zeta h}-\zeta h-2\right)}{\tau-\tau e^{\zeta h}-h+he^{\zeta\tau}},\zeta\in\left[-\tfrac{\alpha}{h},+\infty\right),\end{aligned}\right\},$$

где α – положительный корень уравнения (5).

К области $D_2(\tau,h)$ отнесем все точки (u,v), лежащие выше кривой $\Gamma_2(\tau,h)$, причем $v\geq 0$.

Теорема 3. *Все решения уравнения* (10) *осциллируют тогда и только тогда, когда точка* (b,c) *принадлежит области* $D_2(\tau,h)$.

На рис. 3 изображено характерное сечение области D_2.

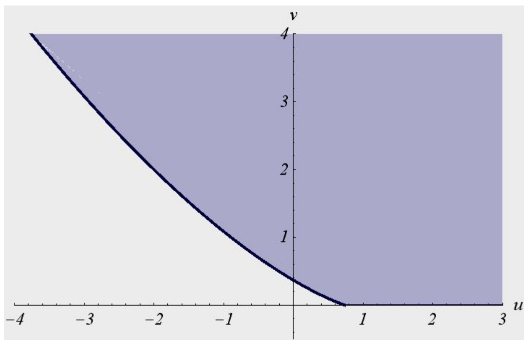

Рис. 3. *Область* $D_2(\tau,h)$ *при* $h=1$, $\tau=2$

5. Некоторые следствия

Сформулируем несколько легко проверяемых достаточных признаков осцилляции.

Следствие 1 [6]. *Пусть* $b,c\in R_+$ *и*

$$bh+c\tau>\tfrac{1}{e}.$$

Тогда все решения уравнения (9) *осциллируют.*

Пусть α – положительный корень уравнения (5). Обозначим $k = \alpha(2-\alpha)$. Тогда $k \approx 0{,}64761\ldots$

Следствие 2. *Пусть* $b, c \in R_+$ *и*

$$bh^2 + c\tau^2 > k.$$

Тогда все решения уравнения (10) *осциллируют.*

Следствие 3. *Пусть* $b, c \in R_+$ *и*

$$bhe + \frac{c\tau^2}{k} > 1.$$

Тогда все решения уравнения (3) *осциллируют.*

Заметим, что признак осцилляции, сформулированный в следствии 3, является точным: при $\frac{\tau}{h} = \alpha$ он является критерием осцилляции всех решений уравнения (3).

Список литературы

1. *Мышкис А.Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом: матем. сб., 1951. Т. 28(70), № 3. С. 641–658.
2. *Трамов М.И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Известия вузов. Математика, 1975, №3. С. 92–96.
3. *Tomaras A.* Oscillatory behaviour of first order delay differential equations. Bull. Austral. Math. Soc., 1978. Vol. 19. P. 183–190.
4. *Ladas G.* Sharp conditions for oscillations caused by delay // Appl. Anal. 1979. Vol. 9. P. 93–98.
5. *Ladde G.S.* Class of functional equations with applications // Nonlinear Anal. 1978, Vol. 2. P. 259–261.
6. *Györi I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations with applications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991.
7. *Erbe L.H., Kong Q., Zhang B.G.* Oscillation theory for functional differential equations. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, 1995.
8. *Agarwal R.P.*, *Berezansky L.*, *Braverman E. et. al.* Nonoscillation theory of functional differential equations with Applications. New York: Springer, 2012.
9. *Зубов В.И.* К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Известия вузов. Математика. 1958, № 6. С. 86–95.
10. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
11. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
12. *Малыгина В.В.* О построении области осцилляции автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015): сб. тр. VIII междунар. конф. 2015. С. 223–225.

On oscillation of solutions to autonomous differential equations with aftereffect

T. L. Sabatulina
Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia
TSabatulina@gmail.com; +7(342)2391564

A necessary and sufficient condition for oscillation of solutions to autonomous differential equations with bounded aftereffect is obtained in terms of zeros of the characteristic function. On the basis of this result, effective conditions for oscillation of solutions to differential equations with two delays of different nature are found.

Keywords: *functional differential equations; oscillation; concentrated delay; distributed delay.*

On the oscillation of solutions for autonomous differential equations with aftereffect

T. L. Sabatulina
Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky ave., Perm, 614990, Russia
TSabatulina@gmail.com; +7(342)2391564

A necessary and sufficient condition of the oscillation of solutions for autonomous differential equations with bounded aftereffect is obtained in terms of zeros of the characteristic function. On the base of this result effective conditions of the oscillation of solutions for differential equations with two delays of different nature are found.

Keywords: *functional differential equations; oscillation; concentrated delay; distributed delay.*