

УДК 517.91

Построение приближенного решения одного класса нелинейных уравнений методом осциллирующей функции

Р. А. Рекка¹, Е. Ю. Рекка², Ю. Ю. Фролов²

¹Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

²Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Комсомольский проспект, 29
Yrsyrsfrolov@gmail.com; +79128849908

Дается построение приближенного решения одного класса нелинейных уравнений 2-го порядка с начальными условиями методом осциллирующих функций.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения; метод осциллирующих функций.

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-3-21-24

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x'' + f(x, x') + a(t)g(x) = r(t), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = c, \quad x'(t_0) = b. \quad (2)$$

Модель таких уравнений рассматривалась в работе Jack Wacki [1], она описывает реакции, происходящие в атомных реакторах.

Предполагается, что известны оценки для точного решения $x(t)$ и производной $x'(t)$

$$c - A \leq x(t) \leq c + A,$$

$$b - B \leq x'(t) \leq b + B.$$

Функции $f(x, x'), g(x), a(t), r(t)$ непрерывно – дифференцируемые в области (D) :

$$t_0 \leq t \leq T,$$

$$c - A - \varepsilon \leq x(t) \leq c + A + \varepsilon,$$

$$b - B - \varepsilon_1 \leq x'(t) \leq b + B + \varepsilon_1,$$

где ε_1 – наперед заданные оценки погрешности построения приближенного решения.

Предполагаем, что в области (D) имеют место оценки:

$$\begin{aligned} |f(x, x')| &\leq M_1, \quad \left| \frac{\partial f(x, x')}{\partial x} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial f(x, x')}{\partial x'} \right| \leq M_3, \\ \left| \frac{dr(t)}{dt} \right| &\leq M_4, \quad |r(t)| \leq M_5, \quad |g(x)| \leq N_1, \\ \left| \frac{dg(x)}{dx} \right| &\leq N_2, \quad |a(t)| \leq A_1, \quad \left| \frac{da(t)}{dt} \right| \leq A_2. \end{aligned}$$

Приближенное решение $x_N(t)$ уравнения (1) с условиями (2) будем строить на отрезке $[t_0, T]$, разбив его на N частей точками $t_k, k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$, где

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{N-1} = T.$$

Приближенное решение на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ находим в виде

$$\begin{aligned} x_N(t) &= \\ &= \begin{cases} \frac{a_k}{2}(t - t_k)^2 + b_k(t - t_k) + c_k, & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ 0, & t \notin [t_k, t_{k+1}] \end{cases} \end{aligned}$$

Коэффициенты b_0 и c_0 находим из начальных условий: $c_0 = c, b_0 = b$; коэффициенты c_k и b_k находим из условия непрерывности $x_N(t)$ и $x'_N(t)$ в точках $t = t_k$, получим формулы:

$$c_k = \frac{a_{k-1}}{2}h^2 + b_{k-1}h + c_{k-1},$$

$$b_k = a_{k-1}h + b_{k-1}, \\ k = 1, 2, \dots, N-1, \quad h = t_{k+1} - t_k.$$

Коэффициенты a_k находим из условия осциллируемости невязки

$$\begin{aligned} \psi_N(t, a_k) = x''_N + f(x_N, x'_N) + \\ + a(t)g(x_N) - r(t) = a_k + f\left(\frac{a_k}{2}(t - \right. \\ \left. - t_k)^2 + b_k(t - t_k) + c_k, a_k(t - t_k) + b_k\right) + \\ + a(t)g\left(\frac{a_k}{2}(t - t_k)^2 + b_k(t - t_k) + c_k\right) - \\ - r(t), \end{aligned}$$

т.е. из условия

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_N(t, a_k) dt = 0 \quad (3) \\ (k = 0, 1, 2, \dots, N-1).$$

(Метод осциллирующих функций, см. [2]).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \overline{g'_x} &= g'_x(x + \theta_1(x - x_N)), \quad \overline{f'_x} = \\ &= f'_x(x + \theta_2(x - x_N), x'_N(t)), \\ \overline{f'_x} &= f'_x(x_N, x'_N + \theta_3(x'_N - x'_N)), \\ 0 &< \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1. \end{aligned}$$

Из условия (3), применяя первую теорему о среднем интегральном исчислении, получим

$$\begin{aligned} a_k = \\ \frac{-a(\xi_k)g(b_k(\xi_k - t_k) + c_k) - f(b_k(\xi_k - t_k) + c_k, b_k) + r(\xi_k)}{1 + \overline{f'_x}(\xi_k - t_k)^2 + \overline{f'_x}(\xi_k - t_k) + a(\xi_k)\overline{g'_x}(\xi_k - t_k)^2} \\ t_{k-1} < \xi_k < t_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \end{aligned}$$

Постоянные a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) могут быть определены, если

$$\begin{aligned} 1 + \overline{f'_x}(\xi_k - t_k)^2 + \overline{f'_x}(\xi_k - t_k) + \\ + a(\xi_k)\overline{g'_x}(\xi_k - t_k)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

что можно получить путем разбивки основного промежутка $[t_0, T]$ на частичные.

Если получим несколько значений a_k , возьмем наименьшее по абсолютному значению [2].

Для a_k имеет оценку в ранее введенных обозначениях

$$|a_k| \leq \frac{A_1 N_1 + M_1 + M_5}{1 - \left(M_2 \frac{h^2}{2} + M_3 h + A_1 N_2 \frac{h^2}{2}\right)} = W,$$

где $h = \max_k(t_{k+1} - t_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$)

подбирается так, чтобы

$$M_2 \frac{h^2}{2} + M_3 h + A_1 N_2 \frac{h^2}{2} < 1.$$

Приближенное решение $x_N(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x''_N + f(x_N, x'_N) + a(t)g(x_N) = r(t) + \psi_N(t, a_k) \quad (4)$$

с начальными условиями

$$x_N(t_0) = c, x'_N(t_0) = b. \quad (5)$$

Обозначив $u(t) = x(t) - x_N(t)$ и учитывая (1), (2), (4), (5) для погрешности получим уравнение

$$u'' + f(x, x') - f(x_N, x'_N) + a(t)(g(x) - g(x_N)) - = -\psi_N(t, a_k)$$

с начальными условиями $u(t_0) = u'(t_0) = 0$.

Применяя теорему Лагранжа дифференциального исчисления для функции $f(x, x')$ и $g(x)$ получим

$$u'' + \overline{f'_x}u' + (\overline{f'_x} + a(t)\overline{g'_x})u = -\psi_N \quad (6)$$

с условиями

$$u(t_0) = u'(t_0) = 0. \quad (7)$$

Проинтегрировав это уравнение от t_0 до t дважды, вычислив двойные интегралы по частям и применив лемму Беллмана:

если $u(t) \leq c + \int_{t_0}^t u(t_1) v(t_1) dt$, где $u(t) \geq 0, c \geq 0 - const, v(t) \geq 0$, то

$u(t) \leq ce^{\int_{t_0}^t v(t_1) dt}$, (см. [3]) окончательно получим оценку для $\max_{t_0 \leq t \leq T} |u(t)|$. В оценку $|u(t)|$

входит $\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \psi_N(t_1) dt_1 dt$, который оценивается следующим образом

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \psi_N(t_2) dt_2 dt_1 \right| &\leq \left| \int_{t_0}^t \int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_N(t_2) dt_2 dt_1 \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\psi_N(t_2)| dt_2 dt_1 \leq \max_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |\psi_N(t)| h(t - t_0). \end{aligned}$$

Так как $\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_N(t) dt = 0$, то существует такая точка $t_k < \eta_k < t_{k+1}$, в которой

$$\begin{aligned} \psi_N(\eta_k) &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1), \\ |\psi_N(t)| &= |\psi_N(t) - \psi(\eta_k)| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq |\psi'_N(t + \theta(t - \eta_k))| |t - \eta_k|, \\ & t_k < t, \eta_k < t_{k+1}, 0 < \theta < 1, \\ & \max_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |\psi'_N(t)| \leq \max_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |\psi'_N(t)| h. \\ & \max_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |\psi'_N(t)| \text{ оценивается из уравнения (4)} \end{aligned}$$

после построения приближенного решения.

Оценки погрешности будут а posteriori. Окончательная оценка для $\max_{t_0 \leq t \leq T} |u(t)|$ имеет

вид:

$$\max_{t_0 \leq t \leq T} |u(t)| \leq \frac{T \exp \int_{t_0}^t \Phi(t_1) dt_1 [(wh + B)(M_2 + A_1 N_2) + M_2 w + N_1 A_2 + M_4]}{1 - (N_2 + A_1 N_2) \exp \int_{t_0}^t \Phi(t_1) dt_1 T h^2} h^2,$$

при условии, что

$$(M_2 + A_1 N_2) \exp \int_{t_0}^t \Phi(t_1) dt_1 T h^2 < 1, \quad (8)$$

где

$$\Phi(t_1) = (t_1 - t_0) (|f''_{xx}| + |f''_{xx^2}| + |f''_{xx}| + |a(t)| + |f''_{xx}|).$$

Разбивку подбираем так, чтобы h удовлетворяло условию (8).

Оценку погрешности можно получить и "пошаговую", если вначале оценить $u_0(t) t \in [t_0, t_1]$, затем $u_1(t) t \in [t_1, t_2]$ и т.д. оценка погрешности для $t \in (t_k, t_{k+1})$ будет выражаться через оценку на промежутке $[t_{k-1}, t_k]$.

Построив приближенное решение и оценив разность $u(t) = x(t) - x_n(t)$ можем получить область расположения точного решения

$$x_n(t) - \varepsilon \leq x(t) \leq x_n(t) + \varepsilon,$$

где ε – погрешность.

Замечание об априорной оценке погрешности

Если уравнение имеет вид $x'' + \sum_{i=0}^n p_i(t) x^{2i+1} = 0$ с начальными условиями $x(t_0) = a, x'(t_0) = b$, где $p_i(t)$ – непрерывно-дифференцируемые функции, $p_i(t) \gg 0, t \in [t_0, T], t_0 > 0$, то в этом случае

решения $x(t), x'(t), x_N(t), x'_N(t)$ будут ограничены (см. [2], с. 10) так:

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{ce^M}{\min_{t_0 \leq t \leq T} p_1(t)}} |x'(t)| \leq \sqrt{c(1 + Me^M)},$$

где $c = \sum_{i=1}^n t^{-11} p_i(t_0) a^{2i} + b^2$,

$$M = \sum_{i=1}^n \max_{t_0 \leq t \leq T} \ln \frac{p_i(t)}{p_1(t_0)}.$$

Для этого уравнения на каждом частичном промежутке будем иметь относительно a_k уравнения порядка $2n+1$, причем коэффициент при a_k^{2n+1} будет h в степени $4n+2$ и при условии ограниченности a_k можно будет члены с h в степени > 2 сбросить и получится уравнение 2-й степени относительно a_k (за a_k берем наименьший по абсолютному значению).

Все задачи методом осциллирующих функций хорошо решаются с использованием вычислительного пакета Mathematica.

Пример

Уравнение

$$x'' + tx + x^3 = 0$$

с начальными условиями

$$x(0) = 1, x'(0) = 0 \quad t \in [0, 1], h = 0,01.$$

Решено методом осциллирующих функций, погрешность $|u(t)| \leq 0,016$.

Список литературы

1. Wacki Jack. A singular nonlinear foundry value problem 1978 // Pacifig journal of mathematics. 1978. Vol. 78, № 2.
2. Воронина Н.В., Маланин В.В., Рекка Р.А. Осциллирующие функции и некоторые их приложения. Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1990. 110 с.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решения дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Ин. Лит., 1954.

Plotting of the approximate solution to a class of nonlinear equations using the method of oscillating functions

R. A. Rekka¹, E. Yu. Rekka², Yu. Yu. Frolov²

¹Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia

²Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia
Yrsyrsfrolov@gmail.com; +79128849908

The article presents plotting of an approximate solution to one of the classes of nonlinear second order equations with initial conditions using the method of oscillating functions.

Keywords: *nonlinear differential equations; method of oscillating functions.*

Construction of the approximate solution of a class of nonlinear equations by the method of oscillating functions

R. A. Rekka¹, E. I. Rekka², I. I. Frolov²

¹Perm state national research university; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia

²Perm national research polytechnic university; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
Yrsyrsfrolov@gmail.com; +79128849908

The article gives the plotting of the approximate solution to one of the classes of second-order nonlinear equations with initial conditions using the method of oscillating functions.

Keywords: *nonlinear differential equations; oscillating functions method.*