УДК 519.532

Метод соединения внутренних и внешних асимптотик в задачах математической физики*

А. В. Шатров
Вятский государственный университет
610000, Россия, Киров, ул. Московская, 36
shatrov@vyatsu.ru; (8332) 64-65-71

Описываются применения асимптотических методов в задачах математической физики и механики. В первую очередь это относится к приложениям теории возмущений к решению нелинейных сингулярно возмущенных задач в локальной области. Обсуждается применение в асимптотическом анализе метода Паде-аппроксимант для перестройки асимптотического разложения в дробно-рациональную или квази-дробную функцию. Метод соединения асимптотик с помощью двухточечных Паде-аппроксимант альтернативен известному методу сращивания (Matching method) и применяется в локальной области переходного слоя, где асимптотики неравномерны. Метод опробован на решениях известных задач математической физики и продемонстрировал свою эффективность при решении оригинальных задач механики жидкости и газа.

Ключевые слова: *асимптотические методы; Паде-аппроксиманты; пограничный слой.*
DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-113-117

Введение

Принципиальной особенностью асимптотических методов является *локальность* получаемых с их помощью решений [1–3]. При этом в сложных задачах зависимость от малого параметра редко бывает линейной. Источники нелинейности, как правило, локализованы. Места концентрации сильных нелинейных эффектов усиленно изучаются в теории разрушения, гидродинамике обтекаемых тел, гиперзвуковой аэродинамике и других областях прикладной математики [4–7]. Неравномерность асимптотических разложений в окрестности таких мест значительно затрудняет оценку и анализ локально-нелинейных асимптотик.

Использование асимптотического ряда в качестве приближения в окрестностях особенностей всегда приводит к необходимости определения числа членов разложения адекватно приближающих искомое решение. Существует много подходов к этим задачам [8]. Метод аналитического продолжения (например, преобразование Эйлера $\overline{\varepsilon} = \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}$, или растяжения координат в локальной области) требует знания области единственности разложения искомой функции малого параметра ε [9–12]. Эти методы полезно применять, когда известно большое количество членов ряда разложения. Тогда становится возможным выполнить, зная области единственности разложения, аналитическое продолжение, пользуясь, например, диаграммой Домба–Сайкса [8, 13].

Для применения методов обобщенного суммирования [8] необходимо также знать значительное количество членов ряда разложения. На практике в этих рядах обычно известны 3–5 компонентов и именно из этого сегмента ряда приходится извлекать имеющуюся информацию. Для этой цели может быть очень полезен метод Паде-аппроксимант [1, 2, 12–17]. Паде-аппроксиманта (PA) выполняет мероморфное продолжение функции,

Публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки (базовая часть государственного задания по научным исследованиям высших учебных заведений № 2014/66, код проекта 1281, рег. № 114123040133).

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

заданной в виде степенного ряда и по этой причине позволяет достичь успеха в случаях, когда аналитическое продолжение применить нельзя. Если РА сходится к заданной функции, то корни в его знаменателе стремятся к сингулярным точкам.

В математической литературе исследовались, главным образом, одноточечные дробно-рациональные РА [16, 19]. Двухточечные аппроксимации Паде (TPPA), соединяющие асимптотики в переходных слоях, использовались лишь в отдельных прикладных задачах [2, 13, 14]. Ранее в работах [4, 5] был предложен и эффективно применен на примерах функций Эйри и Блазиуса метод соединения внутренней и внешней асимптотик с помощью кусочно-монотонной интерполяции [6] и с условиями гладкости в переходной области [7]. Затем в работах [10, 11] данный метод был использован для немонотонной интерполяции, в качестве которой применяется TPPA с условием тривиальности для кривизны в точке максимума.

В настоящей работе систематизируется и методологически обосновывается процедура применения соединения асимптотических разложений в задачах математической физики и обтекания плоской пластины гиперзвуковым потоком реагирующего газа.

2. Применение двухточечных Паде-аппроксимант в краевых задачах

Для решения краевых задач будем использовать гипотезу о существовании двух асимптотик, для двух предельных значений параметра. Наиболее часто при этом используется метод сращиваемых асимптотических разложений (Matching method) [8]. При этом оперируют понятиями *внутренней* и *внешней асимптотик,* действующих в областях $\varepsilon \to 0$ *и* $\varepsilon \to \infty$. Однако для корректного применения метода сращивания необходимо знать точку сращивания или, по крайней мере, область перекрытия асимптотик. Точное описание всего переходного слоя $0 < \varepsilon < \infty$ существует лишь в тех случаях, когда имеются специальные функции типа функции Эйри, связывающие в один узел разное поведение решений по обе стороны слоя.

Для соединения неперекрывающихся асимптотик в последнее время интенсивно разрабатывается метод, опирающийся на TPPA [6, 7, 13, 18, 20, 21]. В работах [1, 5, 7] таким путем построены температурные профили в пограничном слое газа. В последующих работах [10, 11] метод хорошо зарекомендовал себя при исследовании теплообмена в гиперзвуковом пограничном слое.

В работах [6, 17] метод соединения асимптотик применяется к пограничному слою в реагирующем газе, а в работах [4, 15] – к слою Кнудсена в разреженном газе. Метод соединения использовался в исследовании устойчивости развивающегося слоя Экмана на вращающейся пластине [22].

Двухточечные Паде-аппроксиманты вводятся следующим образом:

пусть существуют внутренняя асимптотика

$$\varphi^i(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varepsilon^i, \quad \varepsilon \to 0 \tag{2.1}$$

и внешняя асимптотика

$$\varphi^e(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \varepsilon^{-i}, \quad \varepsilon \to \infty. \tag{2.2}$$

Тогда функция

$$\phi_{mn}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varepsilon^k \Bigg/ \sum_{k=0}^{n} b_k \varepsilon^k \tag{2.3}$$

будет называться двухточечной Паде-аппроксимантой асимптотических разложений (2.1), (2.2). Коэффициенты $\alpha_л, \beta_k$ определяются так, что первые *p* коэффициентов правильной части разложения функции (2.3) в ряд Лорана совпадают с коэффициентами (2.1), а *(m+n+2-p)* коэффициентов главной части ряда Лорана совпадают с коэффициентами (2.2). Рассмотрим в качестве примера применения TPPA краевую задачу Эйри [8]:

$$\begin{aligned} &y'' - \lambda^2 xy = g(x)y, \\ &y(0) = 1,\, y(\infty) = 0,\, \lambda >> 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Асимптотическое решение имеет вид [14]

$$y(x) = U(\xi)\left[1 + O(\lambda^{-1})\right], \quad \xi = x\lambda^{2/3}, \tag{2.5}$$

$U(\xi)$ – функция Эйри, определяемая из

$$\begin{aligned} &U'' - \xi U = 0, \\ &U(0) = 1, U(\infty) = 0,\, \lambda >> 1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Переходный слой задается областью

$$x = c_* \lambda^{2/3}, \quad c_* = const.$$

Внутренняя область переходного слоя:

$$x \in \left[0, x_-(\lambda)\right], x_- = o(\lambda^{-2/3}).$$

Внутренняя асимптотика функции Эйри:

$$U = 1 - a\xi + \frac{1}{6}\xi^3 + O(\xi^4), \xi \to 0,$$
$$a = \left. 3^{\frac{1}{3}}\Gamma(2/3) \right/ \Gamma(1/3) \approx 0.7290. \qquad (2.7)$$

Внешняя область переходного слоя:

$$x \in [x_+, \infty), x_+ = O(\lambda^{-2/3}).$$

Внешняя асимптотика функции Эйри:

$$U = b\xi^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)\times$$
$$\times\left[1 - \frac{5}{48}\xi^{-3/2} + O(\xi^{-3})\right], \xi \to \infty, \qquad (2.8)$$

Паде-аппроксиманта:

$$U = \frac{1 - a\xi + \frac{2}{3}\xi^{2/3} - \frac{2}{3}a\xi^{5/2} + \frac{32}{5}a\xi^4}{1 + \frac{32}{5}\frac{a}{b}\xi^{17/4}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}\right). \qquad (2.9)$$

Аппроксимация функции Эйри (2.9) сохраняет по три члена асимптотик (2.6)–(2.8) на обоих концах и обеспечивает хорошую точность внутри слоя. Специфика краевой задачи учитывается в форме модифицированной TPPA – умножая ее на добавочную функцию $\exp(-\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}})$, мы обеспечиваем "мягкий" выход на асимптотики при $0 < \xi < \infty$ вплоть до полного совпадения с ними в граничных точках области.

3. Теплообмен в пограничном слое реагирующей смеси газов

Рассмотрим установившееся ламинарное течение в сверхзвуковом пограничном слое бинарной смеси газов в условиях отсутствия массовых сил, термо- и бародиффузии и излучения. Будем предполагать, что течение смеси является "химически замороженным", т. е. изменение концентрации компонент в пограничном слое происходит за счет их конвекции и диффузии. Тогда автомодельные уравнения при $\mu = T$ имеют вид [6, 17]

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0; T'' + \sigma\varphi T' + a\sigma = 0;$$
$$\varphi''^2 + 2\sigma T'\sum_{i=1}^{2} J_i = 0; J_1' - \varphi c_1' = 0; \qquad (3.1)$$
$$J_i = -\frac{Le_i}{\sigma}c_i'; \sum_{i=1}^{2} c_i = 1,$$

где $\varphi(\varsigma) = \Psi/\sqrt{x}$; $\varsigma = \eta/2\sqrt{x}$; $\varphi(\varsigma) = \int_0^y \frac{dy}{T}$;

$T = T(\varsigma)$; $a = M^2(\kappa - 1)/4$; $\Psi -$ функция тока, $T(\varsigma) -$ безразмерная температура, $J_i -$ безразмерная плотность диффузионного потока концентрации компоненты i, $c_i -$ безразмерная концентрация компоненты i, $\sigma -$ число Прандтля, Le – число Льюиса, М – число Маха, $\kappa -$ показатель адиабаты. Граничные условия на поверхности пластины:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0; T(0) = T_S;$$
$$c_1(o) = c_{1S}; \varphi(\infty) = 2; T(\infty) = 1; \qquad (3.2)$$
$$c_1(\infty) = c_{10}; c_2(\infty) = c_{20}.$$

Внутренняя асимптотика при $\varsigma \to 0$:

$$\varphi = a_2\varsigma^2 + O(\varsigma^4);$$
$$T = T_S + T_1\varsigma - 2a\sigma a_2^2\varsigma^2 + O(\varsigma); \qquad (3.3)$$
$$c_1 = c_{1S} + c_{11}\varsigma + O(\varsigma^4).$$

Внешняя асимптотика при $\varsigma \to \infty$:

$$\ln(\varphi'') = -\varsigma^2 + c\varsigma + \ln A + o(1),$$
$$\ln(-c_1') = -2\frac{\sigma}{Le_1} + \ln B_1 + o(1). \qquad (3.4)$$

Решение краевой задачи (3.1)–(3.2) аппроксимируем, соединяя асимптотики (3.3) и (3.4) Паде-аппроксимантами:

$$\varphi_a' = 2\left(1 - \frac{(1 + A\varsigma^3)\exp(-\varsigma^2 + c\varsigma)}{1 + \alpha_1\varsigma + \alpha_2\varsigma^2 + 4\varsigma^4}\right), \qquad (3.5)$$

$$T_a = \frac{\varsigma_m - \varsigma}{\beta_0 + \beta_1\varsigma}\exp\left(-\sigma(\varsigma^2 - c\varsigma)\right),$$
$$c_1' = c_{11}\frac{1 + \gamma_1\varsigma + \gamma\varsigma^2{}_2}{1 + \gamma_2\varsigma}\exp(-2\frac{\sigma}{Le_1}\varsigma). \qquad (3.6)$$

Следуя методике [6, 10, 17], определим параметры Паде-аппроксимант (3.5)–(3.7), используя асимптотические разложения (2.3), (2.4)

$$\alpha_1 = a_2 + c; \alpha_2 = a_2^2 + ca_2 - \frac{c^2}{2} - 1;$$
$$\beta_0 = \frac{\varsigma_m}{T_1}; \beta_1 = \frac{c\sigma\varsigma_m}{T_1} - \frac{1}{T_1},$$

$$\gamma_1 = \frac{2\sigma(Le_1 - \sigma)}{Le_1 - 2\sigma}, \gamma_2 = \frac{2\sigma^2}{Le_1^2(1-2\sigma)}. \quad (3.7)$$

При $\varsigma \to \infty$ три члена в асимптотике (3.4) обеспечиваются, если положить $\beta_1 = -\frac{1}{B}$. Граничные условия (3.2) удовлетворяются, если принять

$$\varphi_a = \int_0^{\varsigma} \varphi'_a d\varsigma; T_a = T_S + \int_0^{\varsigma} T'_a d\varsigma;$$
$$c_{1a} = c_{S1} + \int_0^{\varsigma} c'_{1a} d\varsigma; \quad c_{2a} = 1 - c_{1a}. \quad (3.8)$$

Интегральные условия (4.8) дополним нормирующими соотношениями

$$1 = T_S + \int_0^{\infty} T_a d\varsigma; c_{10} = c_{S1} + \int_0^{\infty} c'_{1a} d\varsigma. \quad (3.9)$$

и интегральными соотношениями, полученными на основании совпадения Паде-аппроксимант (3.6) с точностью до трех членов во внутренних разложениях (3.3), (3.4):

$$a_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \varphi_a{}' \left(2 - \varphi_a{}'\right) d\varsigma; c = \int_0^{\infty} \left(2 - \varphi_a{}'\right) d\varsigma. \quad (3.10)$$

Используя внешнее разложение, получим интегральное соотношение для *A*: умножим первое уравнение системы (3.1) на $\exp(\varsigma^2 - c\varsigma)$, проинтегрируем от 0 до ∞, вычисляя интеграл от первого члена уравнения по частям с учетом (3.4), получим

$$A = 2a_2 - \int_0^{\infty} (\varphi - 2\varsigma + c)\varphi'' \exp(\varsigma^2 - c\varsigma) d\varsigma. \quad (3.11)$$

Аналогично из второго уравнения системы (3.1) с учетом (3.4) получим интегральное соотношение для *B*:

$$B = \sigma \int_0^{\infty} T(\varphi - 2\varsigma + c)\exp(\sigma(\varsigma^2 - c\varsigma)) d\varsigma$$
$$+ \int_0^{\infty} (\sigma a \varphi''^2 - T c'_1 (Le_1 - Le_2)) \times \quad (3.12)$$
$$\exp(\sigma(\varsigma^2 - c\varsigma)) d\varsigma - T_1.$$

Интегральное соотношение для B_1 получим, умножая третье уравнение (3.1) на величину $\exp(\frac{2\sigma}{Le_1}\varsigma)$ и интегрируя полученное выражение от 0 до ∞, с учетом (3.4):

$$B_1 = \int_0^{\infty} \left(\varphi - \frac{2\sigma}{Le_1}\right) c_1{}' \exp(\frac{2\sigma}{Le_1}) d\varsigma. \quad (3.13)$$

Априори при больших значениях числа Маха известно, что распределение температуры имеет максимум вблизи стенки в точке ς_m.

Таким образом, из уравнений (3.1) следует очевидное условие:

$$T''(\varsigma_m) = -a\sigma\varphi''^2(\varsigma_m). \quad (3.14)$$

Подставляя в (3.14) производную аппроксиманты из (3.6), получим условие для определения точки экстремума ς_m. Так как через величину *B* распределение концентраций оказывает влияние на распределение температуры, а вычисление *B* показывает зависимость от верхнего предела интегрирования, то условие, полученное из (3.14) служит средством контроля при выборе верхнего предела интегрирования для *B*.

Полученные результаты

Обсуждение. Задача была решена для эффективной бинарной смеси газов $CO + O_2 + N_2 + CO_2$, причем ввиду близости молекулярных масс CO, O_2, N_2 эти компоненты объединялись в одну группу (сопровождаясь индексом 1), а компонента CO_2 представляла вторую группу (с индексом 2). В предположении химически замороженного течения предполагалось, что концентрация азота остается постоянной, а гомогенная реакция протекает по схеме Вулиса: $2CO + O_2 = 2CO_2$.

Расчеты проводились при числах Маха *M*=5; 10, числе Прандтля $\sigma = 0{,}72$, числах Льюиса $Le_1 = 1{,}2$; $Le_2 = 1{,}3$.

Список литературы

1. *Алексеева Е.А., Баранцев Р.Г., Шатров А.В.* Соединение температурных асимптотик в пограничном слое // Вестник СПбГУ. 1996. Сер. 1, № 8. С. 96–99.
2. *Андрианов И.В., Шапиро Г.Д.* Обращение преобразований Лапласа с помощью двухточечных Паде-аппроксимант // Проблемы машиностроения. 1990. № 34. С. 58–60.
3. *Баранцев Р.Г.* Дефиниция асимптотики и системные триады // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск, 1980. С.70–81.
4. *Баранцев Р.Г., Майоров Е.В., Прохоров И.В.* Асимптотическое исследование теплообмена к горячей стенке в высокоскоростном по-

токе // Тепломассообмен-ММФ-92. Минск, 1992. Т. 1. С. 86–89.
5. *Баранцев Р.Г., Пашкевич Д.А.* Соединение асимптотик в переходном слое // Асимптотические методы в задачах аэродинамики и проектирования летательных аппаратов. Иркутск, 1994. С. 67–70.
6. *Баранцев Р.Г., Пашкевич Д.А., Шатров А.В.* Теплоперенос в пограничном слое реагирующего газа // Тепломассообмен-2000 (MIF-2000). Минск, 2000. С.185–188.
7. *Баранцев Р.Г., Пашкевич Д.А., Шатров А.В.* Соединение асимптотик в пограничном слое с помощью Паде-аппроксимант // X Зимняя школа по механике сплошных сред: тез. докл. Екатеринбург, 1995. С. 24–25.
8. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
9. *Грэхем Р., Кнут Д., Поташник О.* Конкретная математика. Основания информатики. М.: Мир, 1998.
10. *Шатров А.В.* Использование Паде-аппроксимант при соединении асимптотических решений в гидродинамике // "Математика. Компьютер. Образование". Вып. 6, ч. 2. М.: Прогресс–Традиция, 1999. С. 305–312.
11. *Шатров А.В.* Соединение внутренних и внешних асимптотик в переходных слоях вязкой жидкости и газа // VIII всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннот. докл. (Пермь, 23–29 августа 2001 г.). Екатеринбург: УрО РАН, 2001. С. 602–603.
12. *Andrianov I.V.* Application of Pade Approximants in Perturbation Methods // Advences in Mechs. Vol. 14, № 2. 1991. P .3–15.
13. *Andrianov I.V., Mikhlin Yu.V., Tokarzhewsky S.* Two-Point Pade Approximants and Their Applications to Solving Mechanical Problems // Journal Theor. And Applied Mechanics. Vol. 35, № 3. 1997. P. 577–606.
14. *Avrejcevicz T., Andrianov I.V., Manevich I.I.* Asymptotic Approach in Nonlinear Dynamics. Berlin u.a. 1998.
15. *Anolik M.V., Barantsev R.G.* Combination of asymptotics in the Knudsen layer. II. Testing // Rarefied Gas Dynamics, 21st Intern. Symp. Book of Abstracts. Marseille: 1998. Vol. 2. P. 75–76
16. *Baker G.A., Baker G.A., jr. & Gammel T.L.* The Pade approximants // Journal Mathematics Analysis and Applied. Vol. 2. № 1. 1961. P. 21.
17. *Barantsev R.G., Pashkevich D.A., A.V. Shatrov* Combination of asymptotics in the boundary Layer of a reacting gas mixture // Proc. of the 5th conf. on dynamical systems theory and applications Lódź: 1999. P. 137–140.
18. *Kruskal M.B.* Asymptotology // Mathematical Models in Physics. Sci. N-J, 1963. P. 17–48.
19. *Martin P., Baker G.A, jr.* Two-point quasifractional approximant in physics. Truncation error // Journal Mathematical Physics. 1991. 32:6. P. 1476–1477.
20. *Shatrov A.V.* Combination of asymptotics in boundary problems of hydrodynamics // OFEA'2001. Abstracts of intern. Conf., June, 25–29, 2001. St.-Petersburg. 2001. P. 59–60.
21. *Shatrov A.V.* New trends in asymptotical methods of mechanics and applied mathematics // Abstracts of Int. conf. Asymptotics and Differential Equations (AsDEq–2002). Ufa. 23–30 May 2002.
22. *Шатров А.В.* Устойчивость развивающегося слоя Экмана // Математика. Компьютер. Образование. Вып. 7, ч. 2. М.: Прогресс–Традиция, 2000. С. 310–314.

Combination of inner and external asymptotics for mathematical physics problems

A. V. Shatrov
Vyatka State University; 36, Moskovskaya st., Kirov, 610000, Russia
shatrov@vyatsu.ru; 8 (8332) 64-65-71

In this work, we present in some detail new trends in application of asymptotic to mathematical physics and mechanics problems. First we consider the various methods which give a possibility to extend a space of application of perturbation series and hence to omit local character. In this work we also are going to emphasize the role of Pade-Approximants (PA), which seems to play more important role in today's non-linear mechanics and mathematical physics. The method of combination of an asymptotics by means of Two-Points Pade Approximants (TPPA) is alternative to the known Matching method and is applied in local area of the transition layer where an asymptotics is uneven. The method is tested on solutions of the known problems of mathematical physics and showed the effectiveness at the solution of original problems of fluid mechanics and gas dynamics.

Keywords*:* *asymptotic methods; Pade-approximants; boundary layer.*