ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Математика. Механика. Информатика
Вып. 2(33)

УДК 539.3

Решение задачи оптимизации защитных свойств неоднородных плит при динамическом проникании жесткого бойка с помощью методов оптимального управления*

А. Р. Хасанов[1], **В. Н. Аптуков**[2]
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
[1] artur_raisovich@rambler.ru
[2]aptukov@psu.ru

Представлена общая постановка задачи поиска оптимального распределения механических характеристик неоднородной плиты минимального погонного веса при динамическом проникании в нее жесткого бойка. Эта задача приведена к стандартной форме задачи оптимального управления для системы дифференциальных уравнений. В общую постановку задачи включен целый ряд факторов, определяющих механическое поведение металлических плит при ударном проникании – угол соударения, форма бойка, механические свойства и др. Поскольку большое количество сопутствующих факторов затрудняет теоретическое исследование процесса и приводит к необходимости изучения влияния каждого из факторов в отдельности, то в настоящей работе приведены результаты решений оптимизационной задачи при частных вариантах проникания (учет трения, учет краевого эффекта свободных поверхностей, различная форма бойка, учет проникания под углом). В зависимости от постановки для решения задачи применяется один из двух методов – принцип максимума Понтрягина или метод игольчатых вариаций. Представлена сводка основных результатов. В одних случаях получено решение задачи в конечном виде, в других – сформулирован ряд критериев оптимальной структуры плиты. Показана эффективность применения метода игольчатых вариаций в задачах оптимального проектирования слоистых систем, в частности, получен простой алгоритм определения оптимальной структуры плиты для задачи об ударе конуса с *n* материалами.

Ключевые слова: *неоднородная плита; метод игольчатых вариаций; принцип максимума Понтрягина; задача оптимального управления.*
DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-106-112

1. Постановка задачи оптимизаци

Достаточно общее уравнение движения по нормали бойка массой M в случае произвольного распределения плотности $\rho(x)$ и динамической твердости $H_d(x)$ по толщине плиты с учетом трения и ослабляющего эффекта свободных поверхностей записывается в виде

$$\frac{1}{2}M\frac{d(\upsilon^2)}{dL} = -2\pi\int_0^L \left\{ k_{oc}(x)H_d(x) + \frac{(f'(\xi))^2}{1+(f'(\xi))^2}\rho(x)\upsilon^2(L) \right\} \cdot$$
$$\cdot f(\xi)f'(\xi)d\xi - 2\pi\int_0^L \tau(x)f(\xi)d\xi, \quad (1)$$

© Хасанов А. Р., Аптуков В. Н., 2016

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

где υ – текущая скорость бойка; $\xi = L - x$ – координата, отсчитываемая от кончика бойка (рис. 1).

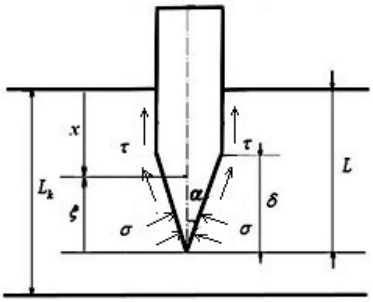


Рис. 1. *Схема внедрения бойка в плиту*

Рассмотрим уравнение (1). Форма бойка учтена через функцию $f(z)$ – уравнение образующей. В частности, для цилиндрического бойка с конической головной частью уравнение образующей принимает вид

$$f(z) = \begin{cases} z\,tg\alpha, & z \le \delta \\ \delta\,tg\alpha, & z > \delta \end{cases}, \qquad (2)$$

где δ – высота головки.

Вклад трения приводит к появлению в правой части уравнения (1) дополнительного слагаемого F_T. Как правило, по аналогии с законом Кулона $F_T = k_T N$, используется следующее соотношение для удельной силы трения:

$$\tau(x) = k_T H_d(x), \qquad (3)$$

где k_T – коэффициент трения.

Рассмотрим выражение из правой части (1), заключенное в фигурные скобки. Это выражение имеет смысл удельного сопротивления внедрению σ. Необходимо отметить, что в уравнение (1) входит уточненная эмпирическая зависимость удельного сопротивления внедрению σ, которая в базовом варианте имеет вид [1]

$$\sigma = H_d + k\rho\upsilon^2. \qquad (4)$$

Соотношение (4) имеет две составляющие: собственное и инерционное сопротивление. Инерционная составляющая зависит от плотности ρ материала плиты, от коэффициента формы головной части бойка k и от текущей скорости бойка υ. Собственное сопротивление плиты характеризуется динамической твердостью материала плиты H_d, которое, вообще говоря, не является постоянной величиной. Заметим, что сопротивляемость плиты динамическому внедрению значительно уменьшается на лицевой и тыльной поверхностях плиты. Этот факт можно объяснить влиянием краевого ослабляющего эффекта свободных поверхностей плиты и получить уточненную зависимость (4) в виде

$$\sigma = k_{oc} H_d + k\rho\upsilon^2, \qquad (5)$$

где k_{oc} – коэффициент ослабления.

Коэффициент k_{oc} является возрастающей функцией на начальном этапе проникания (лицевая поверхность), в глубинных слоях достигает максимального значения $k_{oc} = 1$, при котором связь (5) по форме совпадает с базовым соотношением (4), на конечном этапе функция убывает (тыльная поверхность).

Отметим, что соотношения (2)–(5) в конкретном виде задают частный вариант уравнения (1) и определяют некоторый случай внедрения (учет трения, учет краевого эффекта, заданная форма бойка). В случае проникания бойка в плиту под углом его движение описывается двумя уравнениями: уравнением поступательного движения вдоль оси бойка и уравнением поворота относительно центра масс C:

$$M\dot{\upsilon} = -P, \qquad J\ddot{\varphi} = K, \qquad (6)$$

где φ – текущий угол денормализации бойка при внедрении; P – сила сопротивления прониканию, направленная вдоль оси бойка; J и K – момент инерции и момент сил относительно прямой, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр тяжести бойка.

Граничные условия для уравнения (1)

$$\upsilon(L = 0) = \upsilon_0, \quad \upsilon(L = L_k) = 0. \qquad (7)$$

Задача оптимизации заключается в минимизации погонного веса плиты, которая обеспечивает полную остановку бойка в момент выхода его кончика из плиты $b = L_k$:

$$J = \min_{\rho \in \Omega} \left\{ \int_0^{L_k} \rho(x)\,dx \right\}, \qquad (8)$$

где Ω – множество допустимых значений параметра ρ..

Чтобы получить общую постановку задачи в рамках теории оптимального управле-

ния, необходимо ввести дополнительные фазовые координаты y.. При этом уравнения движения (6) (или (1)) запишем в виде системы, функционал (8) является критерием качества поставленной задачи. Тогда физический процесс описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = f(y,u,t), \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$\Gamma(y) = 0, \tag{10}$$

где (9)–(10) – управляемая система; $y = \{y^1,\dots,y^n\}$ – вектор фазовых координат системы; (10) – краевые условия для уравнения (9). Требуется найти вектор-функцию u, называемую управлением, обеспечивающую минимум функционалу $F_0[u] \to \min$, при ограничениях на управление u [2].

2. Принцип максимума

Для того чтобы применить классический принцип максимума, необходимо ввести непрерывные управляющие функции

$$\rho \in \Omega,\ \Omega = \{\rho(x) : \rho_1 \le \rho(x) \le \rho_2,\ (x \in [0, L_k])\},$$

$$H_d \in \mathrm{H},\ \mathrm{H} = \{H_d(x) : H_1 \le H_d(x) \le H_2,\ (x \in [0, L_k])\}. \tag{11}$$

Ограничимся таким классом материалов, для которых существует взаимно-однозначное отображение φ множества Ω в множество H: $H_d = \varphi(\rho)$, причем справедливо условие $\partial\varphi / \partial\rho > 0$.

Следует отметить, что возможны различные варианты приближения зависимости $H_d = \varphi(\rho)$, причем выбор аппроксимации может качественно повлиять на итоговое решение. В качестве первого приближения примем линейную связь $H_d = \varphi(\rho)$ в виде

$$H_d(x) = A\rho(x) + B, \tag{12}$$

$$A = (H_2 - H_1)/(\rho_2 - \rho_1),$$

$$B = (H_1\rho_2 - H_2\rho_1)/(\rho_2 - \rho_1).$$

Поставленную задачу можно решить с помощью принципа максимума Понтрягина. Для этого вводим сопряженную систему уравнений для нахождения сопряженных переменных ψ и составляем функцию максимума $h(y,\psi,\rho)$. Для оптимальности процесса необходимо

$$h(y,\psi,\rho^{opt}) = \max_{\omega\in\Omega} h(y,\psi,\omega). \tag{13}$$

Функция Гамильтона $h(y,\psi,\rho)$ при условии (12) принимает следующий вид:

$$h = \Phi\rho + \Phi_1. \tag{14}$$

Соотношение (14) означает, что оптимальное управление достигается на границах области допустимых управлений

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \rho_2, & \Phi > 0 \\ \rho_1, & \Phi < 0 \end{cases}.$$

Таким образом, поставленная задача сводится к исследованию поведения функции Φ на отрезке $[0, L_k]$. С применением принципа максимума был получен ряд результатов оптимизационной задачи при различных условиях проникания. Были рассмотрены три формы бойка и три варианта учета дополнительных эффектов. Ниже представлена сводка основных результатов.

1. Базовая постановка задачи для цилиндрического бойка. Оптимальная структура плиты однослойная:

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \rho_2, & B < 0 \\ \rho_1, & B > 0 \end{cases}$$

Конкретные толщины слоев определяются численно. Вывод результата представлен в работах [3, 6].

2. Базовая постановка задачи для конического бойка. Оптимальная структура плиты однослойная или двухслойная:

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \rho_2 \cup \rho_1, & B < 0 \\ \rho_1, & B > 0. \end{cases}$$

Конкретные толщины слоев определяются численно. Вывод результата представлен в работах [3, 6].

3. Базовая постановка задачи для цилиндрического бойка с конической головной частью. Получены некоторые варианты оптимальных однослойных и двухслойных структур. Вывод результата представлен в работах [3, 6].

4. Постановка задачи с учетом трения. Для цилиндрического бойка получено качественно новое решение по сравнению с базовой постановкой [4]:

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \rho_2, \quad B < -\dfrac{2k_T H_2}{R} L_k \\ \rho_2 \cup \rho_1, \quad -\dfrac{2k_T H_2}{R} L_k < B < 0 \\ \rho_1, \quad B > 0 \end{cases}$$

Для конических бойков результат качественно совпадает с результатом задачи в базовой постановке.

5. Постановка задачи с учетом влияния краевых эффектов свободных поверхностей. Оптимальной является однородная легкая плита либо двухслойная плита с лицевым твердым и тыльным легким слоем, либо трехслойная плита с лицевым и тыльным легким слоем и средним тяжелым слоем. Для этого случая получено качественно новое решение – трехслойная плита.

Отметим, что в работах [5, 6] также исследовались нелинейные варианты зависимости $H_d = \varphi(\rho)$, в частности, кусочно-линейная и степенная зависимость.

В случае кусочно-линейной зависимости в оптимальную структуру входят материалы, лежащие на границах отрезков прямых, которые образуют линейную связь.

Больший интерес представляет степенная зависимость. В этом случае возможно существование непрерывного управления, что соответствует оптимальной плите с непрерывным распределением механических свойств по толщине.

Исследование задачи с помощью принципа максимума позволяет сделать вывод, что оптимальная структура плиты существенно зависит от формы бойка, зависимости $H_d = \varphi(\rho)$ и влияния дополнительных эффектов (трение и краевой эффект).

3. Метод игольчатых вариаций

Применение метода игольчатых вариаций оказывается более эффективным в тех случаях, когда мы сужаем класс непрерывно-неоднородных плит до слоистых. Следовательно, ограничиваем множество возможных вариантов оптимальных структур, однако необходимо отметить, что в реальности проектировщик располагает определенным ограниченным числом материалов, поэтому с практической точки зрения более естественна постановка задачи проектирования оптимальной конструкции из заданного конечного набора материалов.

Существенное изменение в постановке задачи заключается в том, что область значений управляющей функции имеет дискретную структуру. Это приводит к тому, что для данного класса задач нельзя построить малых в равномерной норме вариаций и для вывода необходимых условий оптимальности следует использовать конечные вариации управления на множестве малой меры (или игольчатые вариации) [7].

Вкратце изложим основной ход решения задачи и отметим полученные результаты. Подробное изложение можно найти в [8].

Уравнение движения бойка в плите записывается в системе фазовых координат вида (9)–(10). Формулы (9)–(10) определяют управляемую систему, роль управления играет пара $\{\rho(x), b\}$, где ρ – распределение плотности по толщине плиты; b – общая толщина плиты. Управляющая функция ρ принадлежит классу кусочно-постоянных функций с областью значений из конечного дискретного множества.

Критерий качества управления имеет вид функционала

$$F_0[\rho, b] \equiv \int_0^b \rho(x)dx \to \min,$$

а граничные условия представляют собой условие обращения в нуль скорости бойка в момент его выхода из плиты:

$$F_1[\rho, b] \equiv y_1(b) = 0.$$

Конечная вариация управления ρ определяется на множестве малой меры M значением ω:

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \omega, & x \in \mathrm{M} \\ \rho, & x \notin \mathrm{M} \end{cases}, \qquad (15)$$

при этом возмущенное управление ρ^* порождает вариацию функционалов

$$\delta F_0 = \int_{\mathrm{M}} [\omega - \rho] dx + \rho(b)\delta b,$$

$$\delta F_1 = \int_{\mathrm{M}} \psi[f(\omega) - f(\rho)] dx + \frac{dy_1(b)}{db}\delta b.$$

На возмущенном управлении имеем $\delta F_1 = 0$, используя последние равенства, вы-

ражаем вариацию δb через вариацию управления ρ:

$$\delta b = \frac{1}{Ey_2(b)} \int_M \psi [f(\omega) - f(\rho)] dx .$$

Окончательно найдем

$$\delta F_0 = \int_M [h(y, \psi, \rho) - h(y, \psi, \omega)] dx .$$

Оптимальное управление определяет условие $\delta F_0 \geq 0$, что можно представить в виде принципа максимума (13).

Дальнейший анализ гамильтониана позволяет аналитически получить качественные результаты. В частности, сформулировать общие свойства, получить оптимальную структуру для *n* материалов.

Основные свойства оптимальной структуры соответствуют свойствам, которые получены для базовой постановки задачи в пункте 2: с тыльной стороны плиты всегда расположен материал с наименьшей плотностью, оптимальная конструкция включает в себя материалы, расположенные по мере убывания плотности.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию необходимых условий оптимальности. Отложим в прямоугольной системе координат по оси абсцисс плотность ρ, а по оси ординат – динамическую твердость H_d. Материалу из заданного множества Ω будет соответствовать точка на плоскости.

Таким образом, множеству исходных материалов соответствует совокупность точек на плоскости, выпуклая оболочка которой образует многоугольник (рис. 2). Максимум гамильтониана достигается на одной из вершин многоугольника – это означает, что в оптимальную плиту входят только материалы, лежащие на границе множества исходных материалов. Следовательно, смена материала в слоистой плите осуществляется лишь по смежным вершинам многоугольника. Заметим, что в допустимый набор могут входить только материалы, которым соответствуют вершины части границы многоугольника, заключенной между вершиной, соответствующей материалу с минимальной плотностью, и вершиной, через которую проходит касательная, проведенная через начало координат.

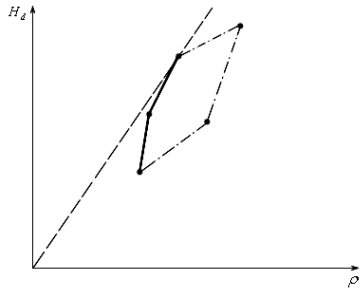


Рис. 2. *Многоугольник исходных материалов*

Рассмотрим задачу о трех материалах для конического бойка. Требуется из заданного набора трех материалов ρ_1, H_1; ρ_*, H_* и ρ_2, H_2 сконструировать плиту минимального погонного веса, обеспечивающую полную остановку конического бойка в момент его выхода из преграды. Построим кусочно-линейную связь между динамической твердостью H_d и плотностью ρ:

$$H_d(\rho) = A\rho + B \quad (\rho \in \Omega_1),$$
$$H_d(\rho) = D\rho + B_1 \quad (\rho \in \Omega_2),$$
$$B_1 = B + \rho_*(A - D),$$
$$\Omega_1 = \{\rho(L) : \rho_1 \leq \rho(L) \leq \rho_*, (L \in [0, L_k])\},$$
$$\Omega_2 = \{\rho(L) : \rho_* \leq \rho(L) \leq \rho_2, (L \in [0, L_k])\},$$
$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega .$$

Анализируя свойства оптимальной преграды, можно получить критерии оптимальной структуры в зависимости от параметров B и B_1.

Аналитическое решение задачи с тремя материалами для конуса представлено на рис. 3, где параметр λ равен

$$\lambda = -(\rho_1 / \rho_2) \cdot (\rho_2 - \rho_*) / (\rho_* - \rho_1).$$

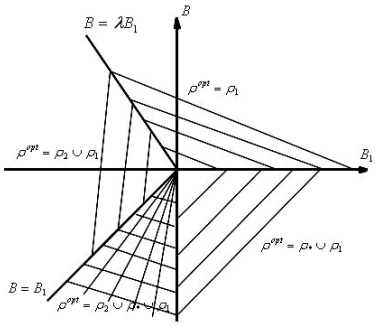


Рис. 3. *Результат задачи о трех материалах*

Аналогично можно получить решение задачи для n материалов при динамическом

проникании конического бойка. Предположим, что проектировщик располагает набором из n материалов $\rho_1, H_1; \ldots; \rho_n, H_n$, из которого нужно синтезировать плиту минимального погонного веса, гасящую скорость конического бойка до нуля. Условие кусочно-линейной зависимости динамической твердости H_d от плотности ρ примет вид

$$H_d(\rho) = A_1\rho + B_1 \quad (\rho \in \Omega_1);$$

$$\ldots$$

$$H_d(\rho) = A_n\rho + B_n \quad (\rho \in \Omega_n),$$

$$\Omega_1 = \{\rho(L): \rho_1 \le \rho(L) \le \rho_2, (L \in [0, L_k])\};$$

$$\ldots$$

$$\Omega_{n-1} = \{\rho(L): \rho_{n-1} \le \rho(L) \le \rho_n, (L \in [0, L_k])\}$$

$$B_i = (H_i\rho_{i+1} - H_{i+1}\rho_i)/(\rho_{i+1} - \rho_i),$$

$$\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_{n-1} = \Omega.$$

Сформулированные выше свойства позволяют отобрать материалы, которые входят в оптимальную плиту. Таким образом, можно получить качественное решение динамической оптимизационной задачи для общего случая – задачи с *n* материалами.

Рассмотрим варианты оптимальной структуры плиты в зависимости от параметров B_i; $i = 1, \ldots, n$.

А. $B_1 < 0, \ldots, B_{n-1} < 0$; $B_1 < \ldots < B_{n-1}$.

Только в этом случае возможен *n*-слойный вариант структуры в качестве оптимальной. Касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_n, H_n), а точки исходного множества $(\rho_1, H_1), \ldots, (\rho_n, H_n)$ лежат на выпуклой вверх части границы многоугольника. В случае нарушения одного из условий случая А из оптимального набора исключаются определенные материалы.

Б. $B_i > 0$ или $B_i > B_{i+1}$. В этом случае (i+1)-й материал исключается из оптимального набора, и задача сводится к задаче с (n-1) материалами. Геометрическая интерпретация случая Б соответствует следующей картине: точка (ρ_{i+1}, H_{i+1}) лежит ниже выпуклой вверх оболочки точечного множества. Так как точки, которым соответствуют материалы из оптимального набора, лежат на границе многоугольника, то материал ρ_{i+1}, H_{i+1} не войдет в оптимальную структуру плиты.

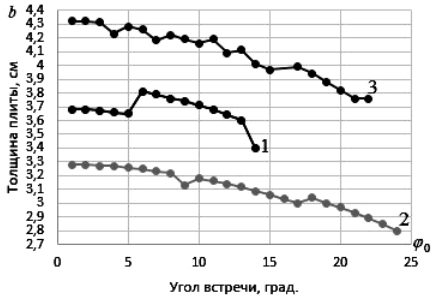
Суммируя вышесказанное, можно построить алгоритм определения оптимальной структуры плиты для задачи с *n* материалами. Вычисляем значения параметров $B_1, \ldots, B_{n-1}$, последовательно проверяя условия А. Если условия А верны, то в оптимальную структуру входит n материалов. В противном случае, при выполнении условия Б, из оптимального набора исключается (*i*+1)-й материал, (*i*+2)-й материал становится (*i*+1)-м, вычисляется новое значение параметра B_i и данная процедура повторяется снова. В итоге останется *S* материалов, которые войдут в оптимальную плиту, либо задача сведется к разобранной выше задаче о трех материалах.

Таким образом, метод игольчатых вариаций позволяет аналитически выявить структуру оптимальной плиты. Конкретные толщины слоев определяются численно.

Метод игольчатых вариаций можно применить при исследовании проникания бойка в плиту под углом. Сложность возникающих соотношений не позволяет получить аналитическое решение в конечном виде, однако возможно численное решение оптимизационной задачи.

Изучение динамического проникания жесткого плоского клина в слоистую плиту под углом проведено с привлечением метода игольчатых вариаций. Полученные результаты иллюстрирует рис. 4.

Оптимальная структура плиты синтезировалась из двух заданных материалов. Приведенные результаты показывают, что величина b_1/b остается приблизительно постоянной в зависимости от начального угла внедрения, однако общая толщина преграды b уменьшается с увеличением угла встречи φ_0. Это доказывает существование денормализирующего эффекта, который все же не оказывает значительного влияния на процентное соотношение слоев преграды оптимальной конструкции.



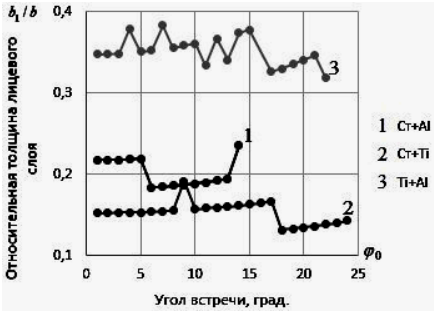


Рис. 4. *Зависимость конечной глубины (сверху) и относительной толщины лицевого слоя плиты (снизу) от угла соударения*

Заключение

Приведена общая постановка задачи оптимизации погонного веса плиты при динамическом проникании в нее жесткого бойка. Продемонстрирована методика решения задачи с использованием принципа максимума Понтрягина. Представлен ряд аналитических результатов задачи в частных постановках. Показана эффективность применения метода игольчатых вариаций в задаче проектирования слоистых конструкций. Приведен алгоритм определения оптимальной структуры плиты в задаче об ударе конуса с n материалами.

Представлены результаты численного анализа оптимизационной задачи о проникании плоского клина в плиту под углом.

Список литературы

1. *Витман Ф.Ф., Степанов В.А.* Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию материалов при скоростях удара 10^2–10^3 м/с // Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–221.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.М., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

3. *Аптуков В.Н., Петрухин Г.И., Поздеев А.А.* Оптимальное торможение твердого тела неоднородной пластиной при ударе по нормали // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1985. № 1. С. 165–170.
4. *Аптуков В. Н., Хасанов А.Р.* Оптимальное торможение жесткого цилиндра неоднородной преградой при ударе по нормали с учетом трения // Вестник Пермского университета. Механика. Математическое моделирование, 2011. Вып. 3(7). С. 19–27.
5. *Аптуков В.Н.* Оптимальная структура неоднородной пластины с непрерывным распределением свойств по толщине // Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1985. № 3. С. 149–152.
6. *Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В.* Прикладная теория проникания. М.: Наука, 1992. 104 с.
7. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
8. *Аптуков В.Н., Хасанов А.Р.* Оптимизация параметров слоистых плит при динамическом проникании жесткого индентора с учетом трения и ослабляющего эффекта свободных поверхностей // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 2. С.48–75.

Solution of the Problem of Optimizing Protective Properties of Inhomogeneous Shields during the Dynamic Penetration of a Hard Striker (based on the use of optimal control methods)

A. R. Khasanov, V.N. Aptukov
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
artur_raisovich@rambler.ru; aptukov@psu.ru

The paper presents a general formulation of the problem of finding an optimal distribution of mechanical properties of an inhomogeneous shield with minimum weight during the dynamic penetration of a hard striker. The problem is reduced to a standard form of an optimal control problem for a differential equation system. The general formulation of the problem includes a number of factors, such as an impact angle, a striker's shape, mechanical properties, etc. These factors determine mechanical behaviour of metal shields in the process of the dynamic penetration. Since the presence of a large number of factors complicates theoretical research into the process, it is necessary to investigate the effect of each factor separately. In this paper, we provide solutions for the optimization problem regarding particular variants of penetration (taking into account friction, the free surface effects, the striker's shape, the oblique impact). In accordance with the problem formulation, one of the two methods is used – either the Pontryagin maximum principle or the needle variation method. The article summarizes the main results of the research. In some cases, the final solution of the problem is provided, while in others criteria for the optimal structure of the shield are formulated. We demonstrate the effectiveness of the needle variation method in solving the problem of optimal designing of layered systems; a simple algorithm to find the optimal structure of the shield for the problem of an impact of a cone with n materials has been derived.

Keywords: *inhomogeneous plate; needle variation method; Pontryagin maximum principle; optimal control problem.*