

УДК 517.9:519.21

Анализ линейных стохастических интегро-дифференциальных систем с сосредоточенными запаздываниями*

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; (342) 239-65-60

Рассматривается задача построения обыкновенных дифференциальных уравнений для первых моментов вектора состояния линейной стохастической динамической системы со специальными формами запаздываний – с конечными сосредоточенными и переменными распределенными. На основе последовательно развиваемой в работах автора схемы, сочетающей классический метод шагов и расширение пространства состояния стохастической системы и преобразующей векторный немарковский случайный процесс в марковский, строится цепочка стохастических дифференциальных уравнений без запаздывания, а затем и уравнения для искомых моментов.

Ключевые слова: стохастический анализ; линейная динамическая система; интегро-дифференциальное уравнение; запаздывание; фазовый вектор; моментные функции.

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-98-105

Введение

Известно, что первые серьезные исследования, связанные с учетом влияния последствий на динамику систем различных классов, начались еще в середине двадцатого столетия. Но только в последние десятилетия такие исследования стали интенсивно развиваться. Необходимость их диктуется потребностями теории и практики: сначала это были задачи управления, а затем биологии, механики, физики, химии, медицины, экономики, атомной энергии, теории информации и т.д.

Математическими моделями соответствующих процессов служат функционально-

дифференциальные уравнения (ФДУ) и, в частности, дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами [1–8], включающие уравнения с запаздыванием и нейтрального типа, интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ) и др. Такие уравнения применяются для описания процессов автоматического регулирования и управления техническими системами, химико-технологических и других производственных процессов; генерации сигналов в радиосхемах и лазерах, горения в жидкостно-реактивных двигателях, замедления нейтронов и т.д.

В процессе развития методов анализа детерминированных систем с последствием возник интерес к стохастическим ФДУ разных типов [9–12], с помощью которых могут исследоваться новые эффекты (например, разрушение или формирование колебательных движений). Но анализ таких систем затруднен. Это привело к тому, что до последнего времени многие попытки анализа стохастических ФДУ ограничиваются качествен-

© Полосков И. Е., 2016

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России (Задание № 2014/153).

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

ными исследованиями поиска условий существования решения и устойчивости.

Среди стохастических ФДУ можно выделить класс линейных и нелинейных СДУ с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями (СИДУсЗ). Детерминированные аналоги таких уравнений могут принимать форму как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и дифференциальных уравнений в частных производных [13], а также использоваться при моделировании наследственных систем и явлений, таких как рост населения, загрязнение окружающей среды, поведение финансовых рынков и вязкоупругих материалов [14, 15]; различных процессов в нейронных сетях, электрических цепях, химических реакторах [16]; регулирования соотношения глюкоза–инсулин при диабете [17] и др.

Основными задачами детерминированного анализа подобных систем являются поиск критериев существования решений соответствующих уравнений и оценка устойчивости как этих решений, так и схем их численного интегрирования. Отметим, что аналитические решения таких проблем, как правило, отсутствуют, а для получения приближенных решений используются численные и приближенно-аналитические методы. При этом основными методами в этой области являются конечно-разностные процедуры, различные варианты методов Рунге–Кутты, трапеций, коллокаций [13, 18] и др.

Многие реальные объекты подвержены случайным возмущениям в течение длительных промежутков времени. Например, погодные условия могут негативно влиять на опоры мостов, что ведет к изменению целостности конструкций [19]. Исследование таких процессов, например для оценки стабильности стохастических систем и получения их численных решений, является естественным продолжением изучения детерминированных явлений. В частности, в работе [20] рассматривается устойчивость СИДУсЗ, в [21] исследована сходимости и среднеквадратичная устойчивость обратного метода Эйлера с расщеплением для этих уравнений, в [22] обсуждается среднеквадратичная экспоненциальная устойчивость θ -методов стохастических нелинейных СИДУсЗ, в работе [23] обсуждают схо-

димость и устойчивость полунявного метода Эйлера для тех же уравнений.

Наряду со значительным спектром процедур решения СДУ с различными типами запаздываний [24, 25 и др.], алгоритмы численного или приближенного аналитического интегрирования стохастических систем рассматриваемой структуры развиты недостаточно. Среди известных отметим методы усреднения [26], Тейлора в сочетании с дискретизацией по времени [27], последовательных приближений (Z-алгоритм) [28], Эйлера [29], расширения пространства состояний и преобразования к СДУ [30, 31], θ -метод [32], сбалансированные неявные методы [33, 34] и др.

Известно [34], что большинство численных методов для СИДУсЗ являются явными или полунявными, которые неявны только по отношению к коэффициентам сноса. Эти последние методы хорошо приспособлены для анализа жестких систем, возмущаемых шумами с малой интенсивностью или аддитивными шумами. В случае же систем с большими мультипликативными шумами применение полностью неявных методов является неизбежным.

В ряде наших предыдущих работ была предложена схема, сочетающая классический метод шагов и расширение пространства состояний (МШРПС), в приложении к исследованию стохастических систем с постоянным запаздыванием [35–37].

Ниже рассматривается методика исследования линейных стохастических динамических систем со специальными формами запаздываний – с конечными сосредоточенными и переменными распределенными, основанная на модификации указанной схемы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с конечными сосредоточенными $\tau > 0$ и распределенными запаздываниями следующего вида:

$$\begin{aligned} dX(t) = & [P(t)X(t) + R(t)X(t - \tau) + \\ & + Q(t) \int_{t_0}^t X(\theta) d\theta + c(t)] dt + \\ & + H(t) dW(t), \quad t > t_1 = t_0 + \tau, \end{aligned} \quad (1)$$

где $X \in P^n$ – вектор состояния; $W \in P^m$ – вектор независимых случайных стандартных винеровских процессов:

$E[W(t)] = 0$, $E[dW(t_1) dW^T(t_2)] = I dt \delta(t_2 - t_1)$; T и $E[\cdot]$ – символы транспонирования матрицы и математического ожидания соответственно, I – единичная матрица.

С понятием решения, а также с условиями его существования и единственности можно ознакомиться в работе [38].

Будем считать, что на интервале $(t_0, t_1]$ вектор состояния $X(t)$ удовлетворяет системе СДУ Ито без запаздывания:

$$dX(t) = [P_0(t)X(t) + Q_0(t) \int_{t_0}^t X(\theta) d\theta + c_0(t)]dt + H_0(t)dW(t), \quad X(t_0) = X^0, \quad (2)$$

причем в уравнениях (1) и (2) $P(t)$, $R(t)$, $Q(t)$, $H(t)$, $P_0(t)$, $Q_0(t)$, $H_0(t)$ и $c(t)$, $c_0(t)$ – известные непрерывные матричные и векторные функции. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора X^0 . В частности, пусть в начальный момент времени t_0 для вектора $X(t)$ заданы вектор математических ожиданий $m^0 = E[X^0]$ и ковариационная матрица

$$C^0 = E[\{X^0 - m^0\} \{X^0 - m^0\}^T].$$

Задачей исследования является построение систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) без запаздывания для компонентов вектора средних $m(t) = E[X(t)]$ и ковариационной матрицы

$$C(t) = E[\{X(t) - m(t)\} \{X(t) - m(t)\}^T]$$

вектора состояния $X(t)$ при любом $t > t_0$.

Заметим, что входящие в уравнения (1) и (2) шумы – аддитивные, а следовательно, СДУ Ито и Стратоновича имеют одну и ту же форму.

3. Метод исследования

Как и в предыдущих наших работах, для того чтобы получить СДУ без запаздывания, применим сочетание метода расширения пространства состояний и метода шагов.

Но прежде, чем это сделать, для компактности изложения перепишем уравнения

(1) и (2) в менее строгой, но более удобной следующей форме:

$$\dot{X}(t) = P(t)X(t) + R(t)X(t - \tau) + Q(t) \int_{t_0}^t X(\theta) d\theta + c(t) + H(t)V(t), \quad t > t_1 = t_0 + \tau, \quad (3)$$

$$\dot{X}(t) = P_0(t)X(t) + Q_0(t) \int_{t_0}^t X(\theta) d\theta + c_0(t) + H_0(t)V(t), \quad X(t_0) = X^0, \quad (4)$$

где $V \in P^m$ – вектор независимых стандартных белых шумов:

$$E[V(t)] = 0, \quad E[V(t_1) V^T(t_2)] = I \delta(t_2 - t_1).$$

Рассмотрим равномерную временную сетку $t_q = t_0 + q\tau$, $q = 0, 1, 2, \dots, N, \dots$ и введем новую временную переменную s , изменяющуюся на промежутке $[0, \tau]$, а также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} s_q &= s + t_q, & \Delta_q &= (t_q, t_{q+1}], \\ X_q(s) &= X(s_q), & X_q(0) &= X_{q-1}(\tau) \text{ a.s.}, \\ V_q(s) &= V(s_q), & V_q(0) &= V_{q-1}(\tau) \text{ a.s.}, \\ U_q(s) &= \int_0^s X_q(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$Y_q(s) \equiv Y_q = U_{q-1}(\tau) \text{ a.s.}, \quad q \geq 1, \quad Y_0 = X^0,$$

$$\text{col}(d_1, d_2, \dots, d_{L-1}, d_L) = \{d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1n}, \dots, d_{L-1,1}, d_{L-1,2}, \dots, d_{L-1,n}, d_{L1}, d_{L2}, \dots, d_{Ln}\}^T$$

(a.s. – почти наверное).

Покажем, как можно представить интегральный член в уравнениях (3) для $t_k < t \leq t_{k+1}$, если воспользоваться обозначениями (5):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t X(\theta) d\theta &= \sum_{q=0}^{k-1} \int_{t_q}^{t_{q+1}} X(\theta) d\theta + \int_{t_k}^t X(\theta) d\theta = \\ &= \sum_{q=0}^{k-1} \int_{t_q}^{t_q + \tau} X(\theta) d\theta + \int_{t_k}^{t_k + s} X(\theta) d\theta = \\ &= \sum_{q=0}^{k-1} \int_0^\tau X(t_k + \theta) d\theta + \int_0^s X(t_k + \theta) d\theta = \\ &= \sum_{q=0}^{k-1} \int_0^\tau X_q(\theta) d\theta + \int_0^s X_k(\theta) d\theta = \\ &= \sum_{q=0}^{k-1} U_q(\tau) + U_k(s). \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q .

На сегменте Δ_0 систему СДУ для вектора $Z_0^+(s) \equiv Z_0(s) = \text{col}(Y_0(s), X_0(s), U_0(s))$ представим в виде

$$\begin{aligned} \dot{Y}_0(s) &= 0, & Y_0(0) &= 0 \text{ a.s.}, \\ \dot{X}_0(s) &= P_0(s_0)X_0(s) + \\ &+ Q_0(s_0)[Y_0(s) + U_0(s)] + c_0(s_0) + \\ &+ H_0(s_0)V_0(s), & X_0(0) &= X^0 \text{ a.s.}, \\ \dot{U}_0(s) &= X_0(s), & U_0(0) &= 0 \text{ a.s.} \end{aligned} \quad (6)$$

Определенный на полуинтервалах Δ_0 и Δ_1 вектор $Z_1^+(s) = \text{col}(Z_0^+(s), Z_1(s))$, где $Z_1(s) = \text{col}(Y_1(s), X_1(s), U_1(s))$, будет удовлетворять системе СДУ (6), к которой добавлены уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1(s) &= 0, & Y_1(0) &= U_0(\tau) \text{ a.s.}, \\ \dot{X}_1(s) &= P(s_1)X_1(s) + R(s_1)X_0(s) + \\ &+ Q(s_1)[\sum_{q=0}^1 Y_q(s) + U_1(s)] + c(s_1) + \\ &+ H(s_1)V_1(s), & X_1(0) &= X_0(\tau) \text{ a.s.}, \\ \dot{U}_1(s) &= X_1(s), & U_1(0) &= 0 \text{ a.s.} \end{aligned} \quad (7) \quad \text{где}$$

Обозначая через $Z_N(s)$ вектор $\text{col}(Y_N(s), X_N(s), U_N(s))$ и продолжая подобным образом и далее, находим, что векторный случайный процесс $Z_N^+(s) = \text{col}(Z_{N-1}^+(s), Z_N(s))$, представляющий поведение вектора состояния $X(t)$ на сегментах $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$, будет решением системы СДУ, полученной добавлением к уравнениям для векторного процесса $Z_{N-1}^+(s)$ уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_N(s) &= 0, & Y_N(0) &= U_{N-1}(\tau) \text{ a.s.}, \\ \dot{X}_N(s) &= P(s_N)X_N(s) + R(s_N)X_N(s) + \\ &+ Q(s_N)[\sum_{q=0}^N Y_q(s) + U_N(s)] + c(s_N) + \\ &+ H(s_N)V_N(s), & X_N(0) &= X_{N-1}(\tau) \text{ a.s.}, \\ \dot{U}_N(s) &= X_N(s), & U_N(0) &= 0 \text{ a.s.} \\ &\dots & \dots & \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Итак, получена цепочка систем линейных СДУ для расширенных векторов состоя-

ния $Z_0^+(s), Z_1^+(s), \dots, Z_N^+(s), \dots$ увеличивающейся размерности и подобной структуры без запаздывания, для дальнейшего исследования которой можно применить стандартные для данного класса уравнений методы [39].

4. Уравнения для моментных функций

В частности, построенную последовательность систем линейных СДУ без запаздывания можно использовать для получения новой цепочки уравнений – ОДУ для первых моментов (математических ожиданий и ковариационных матриц) векторов $Z_0^+(s), Z_1^+(s), \dots, Z_N^+(s), \dots$. Несложно увидеть, что для любого $Z_k^+(s), k = 1, 2, \dots, N, \dots$ структуры соответствующих систем ОДУ будут иметь вид:

$$\dot{m}_{Zk}^+(s) = P_k^+(s)m_{Zk}^+(s) + c_k^+(s), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{Zk}^+(s) &= P_k^+(s)C_k^+(s) + [P_k^+(s)C_k^+(s)]^T \\ &+ H_k^+(s)H_k^{+T}(s), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} m_{Zk}^+(s) &= E[Z_k^+(s)] \equiv \\ &\equiv \text{col}(m_{Z0}(s), m_{Z1}(s), \dots, m_{Zk}(s)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{Zk}^+(s) &= \\ &= E\{[Z_k^+(s) - m_{Zk}^+(s)][Z_k^+(s) - m_{Zk}^+(s)]^T\} \equiv \\ &\equiv \begin{bmatrix} C_{Z0Z0}(s) & C_{Z0Z1}(s) & \dots & C_{Z0Zk}(s) \\ C_{Z1Z0}(s) & C_{Z1Z1}(s) & \dots & C_{Z1Zk}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{ZkZ0}(s) & C_{ZkZ1}(s) & \dots & C_{ZkZk}(s) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$m_{Zq}(s) = \text{col}(m_{Yq}(s), m_{Xq}(s), m_{Uq}(s)),$$

$$\begin{aligned} C_{ZqZ\ell}(s) &= \\ &= E\{[Z_q(s) - m_q(s)][Z_\ell(s) - m_\ell(s)]^T\} \equiv \\ &\equiv \begin{bmatrix} C_{YqY\ell}(s) & C_{YqX\ell}(s) & C_{YqU\ell}(s) \\ C_{XqY\ell}(s) & C_{XqX\ell}(s) & C_{XqU\ell}(s) \\ C_{UqY\ell}(s) & C_{UqX\ell}(s) & C_{UqU\ell}(s) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Также несложно увидеть, что матрицы $P_k^+(s), H_k^+(s)$ и вектор $c_k^+(s)$ имеют блочную структуру, которая формируется следующим образом:

$$P_0^+(s) = P_0(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Q_0(s_0) & P_0(s_0) & Q_0(s_0) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$H_0^+(s) = H_0(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_0(s_0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$c_0^+(s) = c_0(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ c_0(s_0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$P_1^+(s) = \begin{bmatrix} P_0^+(s) & P_{112}(s) \\ P_{121}(s) & P_{122}(s) \end{bmatrix},$$

$$P_{122}(s) = P_1(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Q(s_1) & P(s_1) & Q(s_1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$P_{112}(s) = \mathbf{O},$$

$$P_{121}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Q(s_1) & R(s_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$H_1^+(s) = \begin{bmatrix} H_0^+(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{122}(s) \end{bmatrix},$$

$$H_{122}(s) = H_1(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H(s_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$c_1^+(s) = \begin{bmatrix} c_0^+(s) \\ c_1(s) \end{bmatrix}, \quad c_1(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ c(s_1) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

... ..

$$P_k^+(s) = \begin{bmatrix} P_{k-1}^+(s) & P_{k12}(s) \\ P_{k21}(s) & P_{k22}(s) \end{bmatrix},$$

$$P_{k22}(s) = P_1(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Q(s_k) & P(s_k) & Q(s_k) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$P_{k12}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \\ \dots \\ \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

$$P_{k21}(s) = [Q_k(s) \quad \dots \quad Q_k(s) \quad R_k(s)],$$

$$H_k^+(s) = \begin{bmatrix} H_{k-1}^+(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{k22}(s) \end{bmatrix},$$

$$H_{k22}(s) = H_k(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H(s_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$c_k^+(s) = \begin{bmatrix} c_{k-1}^+(s) \\ c_k(s) \end{bmatrix}, \quad c_k(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ c(s_k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

где

$$Q_k(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Q(s_k) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$R_k(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Q(s_k) & R(s_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Теперь определим вид начальных условий для неизвестных функций в построенных ОДУ:

$$\mathbf{m}_{Z0}^+(0) = \mathbf{m}_{Z0}(0) = \text{col}(\mathbf{m}^0, \mathbf{m}^0, \mathbf{0}),$$

$$C_{Z0}^+(0) = C_{Z0}(0) = \begin{bmatrix} C^0 & C^0 & \mathbf{0} \\ C^0 & C^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m}_{Z1}^+(0) = \text{col}(\mathbf{m}_{Z0}^+(0), \mathbf{m}_{0U}(\tau), \mathbf{m}_{0X}(\tau), \mathbf{0}),$$

$$C_{Z1}^+(0) = \begin{bmatrix} C_{Z0}^+(0) & C_{112}(0) \\ C_{121}(0) & C_{122}(0) \end{bmatrix},$$

$$C_{112}(0) = C_{121}^T(0) = \begin{bmatrix} C_{0YU}(\tau) & C_{0YX}(\tau) & \mathbf{0} \\ C_{0YU}(\tau) & C_{0YX}(\tau) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$C_{122}(0) = \begin{bmatrix} C_{0UU}(\tau) & C_{0UX}(\tau) & \mathbf{0} \\ C_{0XU}(\tau) & C_{0XX}(\tau) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

... ..

$$\mathbf{m}_{Zk}^+(0) =$$

$$= \text{col}(\mathbf{m}_{Z,k-1}^+(0), \mathbf{m}_{k-1,U}(\tau), \mathbf{m}_{k-1,X}(\tau), \mathbf{0}),$$

$$C_{Zk}^+(0) = \begin{bmatrix} C_{Z,k-1}^+(0) & C_{k12}(0) \\ C_{k21}(0) & C_{k22}(0) \end{bmatrix},$$

$$C_{k-1,12}(0) = C_{k-1,21}^T(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{k-1,0,k-1,YU}(\tau) & C_{k-1,0,k-1,YX}(\tau) & 0 \\ C_{k-1,0,k-1,YU}(\tau) & C_{k-1,0,k-1,YX}(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{k-1,0,k-1,UU}(\tau) & C_{k-1,0,k-1,UX}(\tau) & 0 \\ C_{k-1,0,k-1,XU}(\tau) & C_{k-1,0,k-1,XX}(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{k-1,k-2,k-1,UU}(\tau) & C_{k-1,k-2,k-1,UX}(\tau) & 0 \\ C_{k-1,k-2,k-1,XU}(\tau) & C_{k-1,k-2,k-1,XX}(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{k22}(0) = \begin{bmatrix} C_{k-1,UU}(\tau) & C_{k-1,UX}(\tau) & 0 \\ C_{k-1,XU}(\tau) & C_{k-1,XX}(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dots \dots \dots$$

В связи с тем, что векторная функция $m_{zk}(s)$ и матричная функция $C_{zkzk}(s)$ являются блоками $m_{zk}^+(s)$ и $C_{zkzk}^+(s)$ соответственно, достаточно вычислить только последние, а затем выбрать их необходимые элементы.

Заключение

В работе представлена схема исследования линейных стохастических систем с ограниченными переменными распределенными и постоянными сосредоточенными запаздываниями. В отличие от известных методов [40] изложенная схема не предполагает предварительного изменения уравнений исследуемого объекта с целью исключения запаздывания или разработки специальных интеграторов. Точность расчетов полностью определяется погрешностью применяемых стандартных процедур численного решения систем ОДУ, причем ошибка метода отсутствует.

В дальнейшем изложенную схему предполагается распространить на линейные стохастические параметрические интегро-дифференциальные системы с сосредоточенным запаздыванием, модельным представителем которых является тестовое уравнение Брюнера–Ламберта [19].

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функциональ-

- но-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
4. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
6. Erneux T. Applied delay differential equations. New York: Springer-Verlag, 2009. 204 p.
7. Lakshmanan M. Senthilkumar D.V. Dynamics of nonlinear time-delay systems. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 332 p.
8. Smith H. An Introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. New York: Springer Science+Business Media, 2011. 172 p.
9. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
10. Kushner H.J. Numerical methods for controlled stochastic delay systems. Boston: Birkhauser, 2008. XIX, 281 p.
11. Mao X. Stochastic differential equations and applications. Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011. XVIII, 422 p.
12. Mohammed S.-E. A. Stochastic functional differential equations. London: Pitman Publishing, 1984. 245 p.
13. Huang C., Vandewalle S. An analysis of delay-dependent stability for ordinary and partial differential equations with fixed and distributed delays // SIAM Journal of Scientific Computations. 2004. Vol. 25, № 5. P. 1608–1632.
14. Busenberg S., Cooke K.L. The effect of integral conditions in certain equations modeling epidemics and population growth. // Journal of Mathematical Biology. 1980. Vol. 10, № 1. P. 13–32.
15. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 615 с.
16. Xu Y., Zhao J.J., Sui Z.N. Stability analysis of θ -methods for neutral multidelay integrodif-

- ferential system // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2007. Vol. 2007. Article ID 42540. 8 p.
17. Makroglou A., Li J., Kuang Y. Mathematical models and software tools for the glucose-insulin regulatory system and diabetes: an overview // *Applied Numerical Mathematics*. 2006. Vol. 56. P. 559–573.
 18. Huang C., Vandewalle S. Stability of Runge-Kutta-Pouzet methods for Volterra integro-differential equations with delays // *Frontiers of Mathematics in China*. 2009. Vol. 4, № 1. P. 63–87.
 19. Shaikhet L., Roberts J. Stochastic Volterra integro-differential equations: stability and numerical methods // University of Manchester. MCCM. Numerical Analysis Report, No. 450. 2004. 38 p. URL: http://www.math.cmu.edu/~shaikhet/leonid/_docs/mccm2004.pdf (дата обращения: 15.03.2016).
 20. Mao X.R. Stability of stochastic integro-differential equations // *Stochastic Analysis and Applications*. 2000. Vol. 18, № 6. P. 1005–1017.
 21. Tan J., Wang H. Convergence and stability of the split-step backward Euler method for linear stochastic delay integro-differential equations // *Mathematical and Computer Modelling*. 2010. Vol. 51, № 5–6. P. 504–515.
 22. Li Q.Y., Gan S.Q. Mean-square exponential stability of stochastic theta methods for nonlinear stochastic delay integro-differential equations // *Journal of Applied Mathematics and Computing*. 2012. Vol. 39, № 1–2. P. 69–87.
 23. Ding X.H., Wu K.N., Liu M.Z. Convergence and stability of the semi-implicit Euler method for linear stochastic delay integro-differential equations // *International Journal of Computer Mathematics*. 2006. Vol. 83, № 10. P. 753–763.
 24. Baker C.T.H., Buckwar E. Numerical analysis of explicit one-step methods for stochastic differential delay equations // *LMS Journal of Computer Mathematics*. 2000. Vol. 25. P. 297–307.
 25. Küchler U., Platen E. Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2000. Vol. 54, № 1–3. P. 189–205.
 26. Стоянов Й.М., Байнов Д.Д. О методе усреднения для стохастических интегродифференциальных уравнений // *Archivum Mathematicum*. 1972. Vol. 8, № 4. P. 213–218.
 27. Janković S., Ilić D. One linear analytic approximation for stochastic integro-differential equations // *Acta Mathematica Scientia*. 2010. Vol. 30B, № 4. P. 1073–1085.
 28. Janković S., Jovanović M. Some analytic iterative methods for solving various classes of stochastic hereditary integrodifferential equations // *Facta Universitatis. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*. 2004. Vol. 4, № 16. P. 11–31.
 29. Паутов А.С. Численное интегрирование стохастических функционально-дифференциальных уравнений методом Эйлера // *Известия Уральского государственного университета*. 2005. № 38. С. 104–121.
 30. Wilkie J. Numerical method for integro-differential generalized Langevin and master equations // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68, № 2. 027701. 4 p.
 31. Karmeshu, Gupta V., Kadambari K.V. Neuronal model with distributed delay: Analysis and simulation study for Gamma distribution memory kernel // *Biological Cybernetics*. 2011. Vol. 104, № 6. P. 369–383.
 32. Khodabin M., Maleknejad Kh., Asgari M. Numerical solution of a stochastic population growth model in a closed system // *Advances in Difference Equations*. 2013. 2013:130. 9 p.
 33. Milstein G.N., Platen E., Schurz H. Balanced implicit methods for stiff stochastic systems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1998. Vol. 35, № 3. P. 1010–1019.
 34. Wu Q., Hu L., Zhang Z. Convergence and stability of balanced methods for stochastic delay integro-differential equations // *Applied Mathematics and Computation*. 2014. Vol. 237. P. 446–460.
 35. Полосков И.Е. Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // *Автоматика и телемеханика*. 2002. № 9. С. 58–73.
 36. Полосков И.Е. Движение транспортного средства по дороге со случайным профилем с учетом запаздывания // *Математическое моделирование*. 2005. Т. 17, № 3. С. 3–14.
 37. Poloskov I.E. Symbolic-numeric algorithms for analysis of stochastic systems with differ-

- ent forms of aftereffect // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM). 2007. Vol. 7, № 1. P. 2080011–2080012.
38. *Yashima H.F., Ganesini A.* Comportement asymptotique de la solution d'une sorte d'equation integrale stochastique dans R^n // Acta Mathematica Vietnamica. 2006. Vol. 31, № 2. P. 115–129.
39. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособие. Ижевск: РХД, 2005. 296 с.
40. *Elbeyli O., Sun J.Q., Ünal G.* A semi-discretization method for delayed stochastic systems // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2005. Vol. 10, № 1. P. 85–94.
39. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Методы и практика анализа случайных процессов в

An analysis of linear stochastic integro-differential systems with finite lumped delays

I. E. Poloskov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
polosk@psu.ru; +7 (342) 239 65 60

In the paper, a problem of derivation of ordinary differential equations for the first moment functions of the state vector for linear stochastic differential system with the special forms of delays, notably with finite lumped and variable lags, is considered. The technique, that combines the classic method of steps and the scheme of stochastic system state space's extension successively being developed by the author and transforms a vector non-Markov stochastic process into a Markov one, is used to derive a chain of stochastic differential equations without delays and then equations for required moment functions too.

Keywords: *stochastic analysis; linear dynamic system; integro-differential equation; delay; state vector; moment functions.*