ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Математика. Механика. Информатика Вып. 2(33)

УДК 519.633

Сингулярно возмущенная система параболических уравнений в критическом случае*

Омуралиев Асан Сыдыгалиевич
Кыргызская республика, Кыргызско-Турецкий университет "Манас"
720044, Бишкек, пр. Мира, 56
asan.omuraliev@mail.ru

Кулманбетова Сагын
Кыргызская республика, Нарынский государственный университет
г. Нарын, ул. Чоробаева, 6, кв.12

Изучается система сингулярно возмущенных параболических уравнений, когда малый параметр находится как перед временной производной, так и перед пространственной производной, при этом предельный оператор имеет кратную нулевую точку спектра. В таких задачах возникают явления угловых погранслоев, описываемые произведением экспоненциальной и параболической погранслойных функций. В предположении, что предельный оператор является оператором простой структуры, построена регуляризованная асимптотика решения, которая кроме угловых погранслойных функций содержит экспоненциальную и параболическую погранслойные функции. Построение асимптотики основано на методе регуляризации для сингулярно возмущенных задач, разработанном С.А. Ломовым и адаптированном на сингулярно возмущенных параболических уравнениях с двумя вязкими границами одним из авторов.

Ключевые слова: *сингулярно возмущенные параболические уравнения; регуляризованная асимптотика; экспоненциальные погранслои; параболические погранслои.*
DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-82-87

1. Постановка задачи и регуляризация

Рассмотрим первую краевую задачу для систем сингулярно возмущенных параболических уравнений

$$L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon\partial_t u - \varepsilon^2 a(x)\partial_x^2 u - -A(t)u = f(x,t),\ (x,t)\in\Omega,$$

$$u|_{t=0} = 0,\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \qquad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\Omega = \{(x,t): x\in(0,1),\ t\in(0,T]\}$. Задача (1) изучается при следующих предположениях:

1. $0 < a(x) \in C^\infty[0,1]$,

$$A(t)\in C^\infty\left([0,T], C^{m^2}\right), \quad f\in C^\infty\left(\overline{\Omega}, C^m\right).$$

2. $m\times m$ матрица $A(t)$ имеет m простых собственных значений $\{\lambda_i(t)\}$, удовлетворяющих условиям

a) $\lambda_i(t)\equiv 0\ (i=1,2,\dots,k)$;

b) $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\le 0\ (i=k+1,\dots,m)$;

c) $\lambda_i(t)\ne\lambda_j(t)$, $\forall i\ne j$, $i,j=\overline{k+1,m}$.

3. $\lambda_i(t)\equiv 0\ (i=1,2,\dots,k)$ соответствует k линейно независимых собственных векторов $\{b_j(t)\}, i=\overline{1,k}$.

Далее будет построена регуляризованная асимптотика [1] решения поставленной задачи. Отметим, что аналогичная задача изучена в [2], однако там получена асимптотика типа пограничного слоя.

Следуя [1], произведем регуляризацию задачи (1), для чего введем регуляризующие переменные [1], [3]:

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon^2},\ \mu_i = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_i(s)ds \equiv \frac{\psi_i(t)}{\varepsilon},$$
$$i = k+1,\dots,m,$$
$$\xi_l = \frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\varepsilon}},\ \eta_l = \frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\varepsilon^3}},$$
$$\varphi_l(\chi) = (-1)^{l-1}\int_{l-1}^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}},\ l = 1,2, \quad (2)$$

и расширенную функцию

$$\tilde{u}(M,\varepsilon),\ M = (x,t,\eta,\xi,\tau,\mu),\ \xi = (\xi_1,\xi_2),$$
$$\eta = (\eta_1,\eta_2),\ \mu = (\mu_{k+1},\mu_{k+2},\dots,\mu_m)$$

такую, что

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\theta=\gamma(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,t,\varepsilon), \quad (3)$$
$$\theta = (\eta,\xi,\tau,\mu),$$
$$\gamma(x,t,\varepsilon) = \left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon^3}}, \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{\psi_i(t)}{\varepsilon}\right).$$

Тогда, на основании (1), (2), (3), относительно расширенной функции получим задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon}T_0\tilde{u} + T_1\tilde{u} - \sqrt{\varepsilon}L_\eta\tilde{u} + T_2\tilde{u} -$$
$$-\varepsilon\sqrt{\varepsilon}L_\xi\tilde{u} - \varepsilon^2 L_x\tilde{u} = f(x,t),$$
$$\tilde{u}|_{t=\tau=\mu=0} = 0,\ \tilde{u}|_{x=0,\xi_1=\eta_1=0} = 0,$$
$$\tilde{u}|_{x=1,\xi_2=\eta_2=0} = 0. \quad (4)$$

Расширенная задача (4) регулярна по ε при $\varepsilon \to 0$, ибо справедливо тождество

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\theta=\gamma(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon).$$

2. Итерационные задачи и их решение

Решение задачи (4) будем определять в виде ряда

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{2}} u_k(M),$$

тогда для коэффициентов этого ряда получим следующие итерационные задачи:

$$T_0 u_\nu(M) = 0,\ \nu = -2,-1,$$
$$T_0 u_0(M) = -T_1 u_{-2},$$
$$T_0 u_1(M) = -T_0 u_{-1} + L_\eta u_{-2},$$
$$T_0 u_2 = -T_1 u_0 + L_\eta u_{-1} - T_2 u_{-2} + f(x,t),$$
$$T_0 u_k(M) = -T_1 u_{k-2} + L_\eta u_{k-3} -$$
$$-T_2 u_{k-4} + L_\xi u_{k-5} + L_x u_{k-6},$$
$$u_k|_{t=\tau=\mu=0} = 0,\ u_k|_{x=0,\xi_1=\eta_1=0} = 0,$$
$$u_k|_{x=1,\xi_2=\eta_2=0} = 0, \quad (5)$$

$$T_0 \equiv \partial_\tau - \Delta_\eta,\ T_1 \equiv \Lambda(t)\partial_\mu - A(t),$$
$$T_2 \equiv \partial_t - \Delta_\xi,\ L_\xi \equiv a(x)\sum_{l=1}^{2} L_{l,\xi},$$
$$L_\eta \equiv a(x)\sum_{l=1}^{2} L_{l,\eta},$$
$$L_{l,z} \equiv 2\varphi_l'(x)\partial_{x,z}^2 + \varphi_l''(x)\partial_z.$$

Введем классы функций, в которых будут решаться итерационные задачи:

$$U_1 = \{V_1(x,t) : V_1(x,t) = \sum_{i=1}^{m} v_i(x,t)b_i(t),$$
$$v_i(x,t) \in C^\infty(\bar{\Omega})\},$$
$$U_2 = \{V_2(N_1) : V_2(N_2) = \sum_{i=1}^{m} Y_i(N_1)b_i(t),$$
$$|Y_i(N_1)| < c\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{8\tau}\right),$$
$$|\eta| = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}\},$$
$$U_3 = \{V_3(N_2) : V_3(N_2) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=k+1}^{m}[c_{i,j}(x,t) +$$
$$+\sum_{l=1}^{2}\omega_{i,j}^l(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)]\exp(\mu_j)b_i(t),$$
$$c_{i,j}(x,t), \omega_{i,j}^l(x,t) \in C^\infty(\bar{\Omega})\},$$
$$N_1 = (x,t,\eta,\tau),\ N_1 = (x,t,\xi,\mu),$$
$$\eta = (\eta_1,\eta_2),\ \xi = (\xi_1,\xi_2).$$

Из этих классов построим новый класс, как прямую сумму

$$U = \oplus_{k=1}^{3} U_k,$$

тогда произвольный элемент $u_\nu(M) \in U$ этого класса запишется

$$u_\nu(M) = \sum_{i=1}^{m}\{v_{\nu,i}(x,t) + Y_{\nu,i}(N_1) +$$
$$+\sum\nolimits_{j=k+1}^{m}[c_{i,j}^\nu(x,t) +$$
$$+\ \sum\nolimits_{i=1}^{2}\omega_{i,j}^{\nu,i}(x,t)\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2\sqrt{t}}\right)]\exp(\mu_j)\}b_i(t). \quad (6)$$

Уравнения (5) при $\nu = -2,-1$ однородные, поэтому они разрешимы в классе функций U и их решения представимы в виде (6), если функция $Y_{\nu,i}(N_1)$ является решением уравнения

$$\partial_\tau Y_{\nu,i}(N_1) = \Delta_\eta Y_{\nu,i}(N_1),\ \nu = -2,-1 \quad (7)$$

с краевыми условиями

$$
\begin{aligned}
&Y_{v,i}(N_1)|_{t=\tau=0}=0\,,\\
&Y_{v,i}(N_1)|_{\eta_1=0}=d^1_{v,i}(x,t)\,,\\
&Y_{v,i}(N_1)|_{\eta_2=0}=d^2_{v,i}(x,t)\,, \qquad (8)\\
&d^l_{v,i}(l-1,t)=-v_{v,i}(l-1,t)\,,\\
&v=-2,-1\,.
\end{aligned}
$$

Решение этой задачи имеет вид [4, с. 196]

$$Y_{v,i}(N_1)=$$

$$=\sum_{l=1}^{2}d^l_{v,i}(x,t)\int_0^{\tau}\int_0^{\infty}\partial_{\zeta_1}G(\eta,\zeta,\tau-z)|_{\zeta_l=0}\,d\zeta_{3-l}dz\equiv$$

$$=\sum_{l=1}^{2}d^l_{v,i}(x,t)I_l(\eta)\,, \qquad (9)$$

$$G(\eta_1,\eta_2,\zeta_1,\zeta_2,t)=\frac{1}{4\pi t}\times$$

$$\times[\exp\left(-\frac{(\eta_1-\zeta_1)^2}{4t}\right)-\exp\left(-\frac{(\eta_1+\zeta_1)^2}{4t}\right)\times$$

$$\times\left\{\exp\left(-\frac{(\eta_2-\zeta_2)^2}{4t}\right)-\exp\left(-\frac{(\eta_2+\zeta_2)^2}{4t}\right)\right\}.$$

При $\tau=t=0$ полученное решение обращается в нуль, поэтому значение функций

$$d^l_{v,i}(x,t)|_{t=0}=\tilde d^l_{v,i}(x) \qquad (10)$$

принимаем произвольно и это допущение будет использовано ниже.

Теорема 1. Для решения задачи (7), (8) справедлива оценка

$$\left|Y_{v,i}(N_1)\right|<c\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{8\tau}\right),$$

$$|\eta|=\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}\,.$$

Доказательство. Заметив, что

$$\frac{\partial}{\partial_{\xi_k}}(G(\eta,\xi,\tau-v))_{\xi_k=0}=\frac{1}{4\pi(\tau-v)}\times$$

$$\times\left[\frac{\eta_k}{(\tau-v)}\exp\left(-\frac{\eta_k^2}{4(\tau-v)}\right)\right]\times$$

$$\times\left\{\exp\left(-\frac{(\eta_l-\zeta_l)^2}{4(\tau-v)}\right)-\exp\left(-\frac{(\eta_l+\zeta_l)^2}{4(\tau-v)}\right)\right\},$$

$$k\neq l\,,\ k,l=1,2\,,$$

и, произведя замену:

$$z_k=\frac{\eta_k}{2\sqrt{\tau-v}}\,,\ dz_k=\frac{\eta_k dv}{4\sqrt{(\tau-v)^3}}\,,$$

$$\frac{1}{4(\tau-v)}=\frac{z_k^2}{\eta_k^2}\,,$$

функцию (9) перепишем:

$$Y_{v,i}(N_1)=\sum_{l=1}^{2}\frac{d^l_{v,i}(x,t)}{4\pi}\int_{\frac{n_k}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty}4\exp(-z_k^2)\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{2z_k}{\eta_k}[\exp\left(-\frac{(\eta_l-\zeta_l)^2}{4\eta_k^2}z_k^2\right)-$$

$$\exp\left(-\frac{(\eta_l+\zeta_l)^2}{4\eta_k^2}z_k^2\right)]d\zeta_l dz_k\,.$$

Таким образом, замена

$$\frac{(\eta_l\pm\zeta_l)z_k}{\eta_k}=t_l\,,\ dt_l=\pm\frac{z_k}{\eta_k}d\zeta_l$$

во внутреннем интеграле приведет к виду

$$Y_{v,i}(N_1)=\sum_{l=1}^{2}\frac{d^l_{v,i}(x,t)}{4\pi}\int_{\frac{n_k}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty}4\exp(-z_k^2)\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\eta_l z_k}{\eta_k}}\exp(-t_l^2)dt_l\,.$$

Отсюда, используя неравенство [6, с. 352] и формулу 3.323 из [7], получим требуемую оценку.

Теорема доказана.

Вычислим свободный член итерационного уравнения (5) при $k=0$

$$F_0(M)=-T_1u_{-2}(M)=$$

$$=-\sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i(t)\left[v_{-2,i}(x,t)+Y_{-2,i}(N_1)\right]b_i(t)-$$

$$-\sum_{i,j=k+1}^{m}\left(\lambda_j(t)-\lambda_i(t)\right)\times$$

$$\times\left[c^{-2}_{i,j}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\omega^{-2,l}_{i,j}(x,t)\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]\times$$

$$\times\exp(\mu_j)b_i(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{m}\lambda_j(t)\left[c^{-2}_{i,j}(x,t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{2}\omega^{-2,l}_{i,j}(x,t)\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]\times$$

$$\times\exp(\mu_j)b_i(t)\,.$$

Обеспечивая разрешимость в U уравнения с такой правой частью, положим

$$c_{i,j}^{-2}(x,t)=0,\ \omega_{i,j}^{-2,l}(x,t)=0,$$
$$\forall i\neq j\ \&\ \overline{1,m},\ j=\overline{k+1,m},$$
$$v_{-2,i}=0\ \ \forall i=\overline{k+1,m},$$

а функции $v_{-2,i}(x,t)$ $\forall i=\overline{1,k}$, $c_{i,i}^{-2}(x,t)$, $\omega_{i,i}^{-2,l}(x,t)$ $\forall i=\overline{k+1,m}$ являются произвольными. При таком выборе функций свободный член примет вид

$$F_0(M)=-\sum_{i=k+1}^{m}\lambda_i(t)Y_{-2,i}(N_1)b_i(t).$$

Решением краевой задачи (5) при $k=0$ со свободным членом $F_0(M)$ будет функция (6) при $v=0$, если $Y_{0,i}(N_1)$ будет решением неоднородного уравнения (7) с правой частью $F_0(M)$ и краевыми условиями вида (8). Решением этой задачи будет (см. [4, с. 196])

$$Y_{o,i}(N_1)=-\lambda_i(t)\int_0^{\tau}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}Y_{-2,i}(N_1)\times$$
$$\times G(\eta_1,\eta_2,\zeta_1,\zeta_2,\tau-z)d\zeta_1 d\zeta_2 dz+$$
$$+\sum_{l=1}^{2}d_{0,i}^{l}(x,t)\times$$
$$\times\int_0^{\tau}\int_0^{\infty}\partial_{\zeta_l}(G(\eta_1,\eta_2,\zeta_1,\zeta_2,\tau-z)d\zeta_{3-l}dz. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть

$$\left|Y_{-2,i}(N_1)\right|<c\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{8\tau}\right),$$

тогда справедлива оценка

$$\left|Y_{0,i}(N_1)\right|<c\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{8\tau}\right).$$

Доказательство проводится аналогично и на основе предыдущей теоремы 1.

В следующее итерационное уравнение войдет член $L_\eta u_{-2}(M)$, присутствие которого выведет решение из класса U. Обеспечивая разрешимость этого уравнения в данном классе, обратим этот член в нуль. Для чего вычислим

$$L_\eta u_{-2}(M)=$$
$$=a(x)\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{2}[2\varphi_l'(x)\partial_x d_{-2,i}^{l}(x,t)+$$
$$+\varphi_l''(x)d_{-2,i}^{l}(x,t)]\partial_{\eta_l}l(\eta,\tau)b_i(t)=0$$

или выбирая

$$2\varphi_l'(x)\partial_x d_{-2,i}^{l}(x,t)+\varphi_l''(x)d_{-2,i}^{l}(x,t)=0 \quad (12)$$

обеспечим требуемое соотношение. Ниже будет показано, что функция $d_{-2,i}^{l}(x,t)$ имеет вид

$$d_{-2,i}^{l}(x,t)=\tilde{d}_{-2,i}^{l}(x)P_1(t)+P_2(t). \quad (13)$$

Подставляя ее в (12) и условия (8), относительно $\tilde{d}_{-2,i}^{l}(x)$ получим задачу. Таким образом, выбором функции $\tilde{d}_{-2,i}^{l}(x)$ обеспечено $L_\eta u_{-2}(M)=0$. Кроме этого члена в правую часть уравнения (5) при $k=1$ войдет и $-T_1u_{-1}(M)$. Аналогично вышеописанному, обеспечим разрешимость в U уравнения (5) при $k=l$, если предположить, что

$$c_{i,j}^{-1}(x,t)=0,\ \omega_{i,j}^{-1,l}(x,t)=0\ \ \forall i\neq j\ \&\ i=\overline{1,m},$$
$$j=\overline{k+1,m},\ v_{-1,i}=0\ \ \forall i=\overline{k+1,m},$$

а функции

$$v_{-1,i}(x,t)\ \ \forall i=\overline{1,k},\ c_{i,i}^{-1}(x,t),$$
$$\omega_{i,i}^{-1,l}(x,t)\ \ \forall i=\overline{k+1,m}$$

являются произвольными функциями. Тогда решение этого уравнения представимо в виде (6) с индексом $v=1$, если $Y_{1,i}(N_1)$ – решение неоднородного уравнения вида (7). Функция $Y_{1,i}(N_1)$, как решение неоднородного уравнения вида (7) представимо в виде, аналогичном (11).

Следующее итерационное уравнение после соответствующих действий, приводящих к соотношению $L_\eta u_{-1}(M)=0$, имеет свободный член и представимо в виде

$$F_2(M)=-T_1u_0-T_2u_{-2}+f(x,t)=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}f_i(x)b_i(t)-\sum_{i,j=k+1}^{m}\left(\lambda_j(t)-\lambda_i(t)\right)\times$$
$$\times\left[c_{i,j}^{0}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\omega_{i,j}^{0,l}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]\times$$
$$\times\exp(\mu_j)b_i(t)-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{m}\lambda_i(t)\times$$
$$\times\left[c_{i,j}^{0}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\omega_{i,j}^{0,l}(x,t)\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]\times$$
$$\times\exp(\mu_j)b_i(t)-\sum_{j=k+1}^{m}\lambda_i(t)[v_{0,i}(x,t)+$$
$$-Y_{0,i}(N_1)]b_i(t)-\sum_{i=1}^{k}[\partial_t v_{-2,i}(x,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\alpha_{i,j}(t)v_{-2,j}(x,t)]b_i(t)-$$
$$-\sum_{i=1}^{k}v_{-2,i}(x,t)\sum_{j=k+1}^{m}\alpha_{j.i}(t)b_j(t)-$$
$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{2}[\partial_t d^l_{-2,i}(x,t)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{i,j}(t)d^l{}_{-2,j}(x,t)]b_i(t)I(\eta,\tau)-$$
$$-\sum_{i=k+1}^{m}[\partial_t c^{-2}_{i,i}(x,t)+\alpha_{i,i}(t)c^{-2}_{i,i}(x,t)]\times$$
$$\times\exp(\mu_j)b_i(t)-$$
$$-\sum_{i=k+1}^{m}\sum_{j=1(i\neq j)}^{m}\alpha_{i,j}(t)c^{-2}_{i,i}(x,t)b_j(t)\exp(\mu_j)-$$
$$-\sum_{i=k+1}^{m}\sum_{l=1}^{2}[\partial_t\omega^{-2,l}_{i,i}(x,t)+$$
$$+\alpha_{i,i}(t)\omega^{-2,l}_{i,i}(x,t)]\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\times$$
$$\times\exp(\mu_j)b_i(t)-$$
$$-\sum_{i=k+1}^{m}\sum_{j=1(i\neq j)}^{m}\sum_{l=1}^{2}\alpha_{i,j}(t)\omega^{-2,l}_{i,i}(x,t)\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\times$$
$$\times b_i(t)\exp(\mu_j),\quad f_i(x)=\left(f(x,t),b_i^*(t)\right).$$

Обеспечивая разрешимость итерационного уравнения (5) при $k=2$, произведем следующие приравнивания:

$$\partial_t v_{-2,i}(x,t)+\sum_{j=1}^{k}\alpha_{i,j}(t)v_{-2,i}(x,t)=f_i(x),\ i=\overline{1,k},$$
$$\lambda_i(t)v_{0.i}(x,t)=-\sum_{j=1}^{k}\alpha_{i,j}(t)v_{-2,j}(x,t)+f_i(x),$$
$$i=\overline{k+1,m},$$
$$\partial_t d^l_{-2,i}(x,t)+\sum_{j=1}^{k}\alpha_{i,j}(t)d^l_{-2,j}(x,t)=0\quad\forall i=\overline{1,m},$$
$$\partial_t c^{-2}_{i,i}(x,t)+\alpha_{i,i}(t)c^{-2}_{i,i}(x,t)=0,$$
$$\partial_t\omega^{-2,l}_{i,i}(x,t)+\alpha_{i,i}(t)\omega^{-2,l}_{i,i}(x,t)=0\quad\forall i=\overline{k+1,m},$$
$$\left(\lambda_j(t)-\lambda_i(t)\right)c^0_{i,j}(x,t)=-\alpha_{i,j}(t)c^{-2}_{j,j}(x,t),$$
$$\left(\lambda_j(t)-\lambda_i(t)\right)\omega^{0,l}_{i,j}(x,t)=-\alpha_{i,j}(t)\omega^{-2,l}_{j,j}(x,t)$$
$$\forall i,j=\overline{k+1,m},$$
$$\lambda_i(t)c^0_{i,j}(x,t)=-\alpha_{i,j}(t)c^{-2}_{j,j}(x,t),$$
$$\lambda_i(t)\omega^{0,l}_{i,j}(x,t)=-\alpha_{i,j}(t)\omega^{-2,l}_{j,j}(x,t)$$
$$\forall i=\overline{1,k},\ j=\overline{k+1,m}. \tag{14}$$

Отметим, что решая уравнение (14) относительно $d^l_{-2,i}(x,t)$ при начальном условии (10), получим решение в виде (13). Найденное решение подставим в (12) и получим уравнение относительно $\tilde{d}^i_{-2,i}(x)$. Начальные условия для дифференциальных уравнений, вошедших в (14), определим из краевых условий для $u_{-2}(M)$, входящих в (5):

$$v_{-2,i}(x,0)=0,\ Y_{-2,i}(N_1)\Big|_{\tau=0}=0,$$
$$c^{-2}_{i,i}(x,0)=-v_{-2,i}(x,0),$$
$$\omega^{-2,l}_{i,i}(x,0)=\tilde{\omega}^{-2,l}_i(x),$$
$$\omega^{-2,l}_{i,i}(x,t)\Big|_{x=l-1}=-c^{-2}_{i,i}(l-1,t),$$
$$Y_{-2,i}(N_1)\Big|_{\eta_l=0}=d^l_{-2,i}(x,t),$$
$$d^l_{-2,i}(x,t)\Big|_{x=l-1}=-v_{-2,i}(l-1,t),$$
$$l=1,2,\ i=\overline{1,m}.$$

Отметим, что функция $\tilde{\omega}^{-2,l}_i(x)$, как и функция $\tilde{d}^i_{-2,i}(x)$, аналогичным образом обеспечит выполнение соотношения $L_\xi u_{-2}(M)=0$.

Свободный член $F_2(M)$, при таком выборе примет вид, подобный $F_0(M)$. Поэтому уравнение (5) при $k=2$ разрешимо в U.

Далее, повторяя вышеописанный процесс, определим все коэффициенты частичной суммы:

$$u_{\varepsilon,\eta}(M)=\sum_{k=-2}^{n}\varepsilon^{\frac{k}{2}}u_k(M).$$

4. Оценка остаточного члена

Таким образом, используя принцип максимума [5], подобно [3], легко устанавливается, что сужение этой суммы посредством регуляризующих функций является формальным асимптотическим решением исходной задачи (1), т.е. доказана

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)-4). Тогда сужение частичной суммы при $\theta=\gamma(x,t,\varepsilon)$, полученного вышеописанным методом, является асимптотическим решением задачи (1), т.е. при достаточно малых ε и $n=-2,-1,0,1,\ldots$ справедлива оценка*

$$\left\|u(x,t,\varepsilon)-u_{\varepsilon,n}(x,t,\gamma(x,t,\varepsilon))\right\|<c\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}.$$

Список литературы

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.
2. *Бутузов В.Ф., Калачев Л.В.* Асимптотическое приближение решения краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в критическом случае // Матемематические заметки. 1986. Т. 89, вып.6. С. 819–830.
3. *Омуралиев А.С.* Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 8. С. 1423–1432.
4. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М., 2001. 576 с.
5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
6. *Никольский С.М.* Математический анализ. М., 1973. Т. 1. 432 с.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. 1100 с.

Singularly perturbed parabolic equations in the critical case

A. S. Omuraliev
Kyrgyz Turkish Manas University; 56, Mira prospekt, Bishkek, 720044, Kyrgyz Republic
asan.omuraliev@mail.ru

S. Kulmanbetova
Naryn StateUniversity; 6-12, Chorobaeva st., Naryn

The research deals with a system of singularly perturbed parabolic equations when a small parameter precedes both the time derivative and the spatial derivative, and when the limit operator has a multiple zero point of the spectrum. In such problems, there is a phenomenon of angular boundary layers, described by means of a product of the exponential and parabolic boundary layer functions. Assuming that the limit operator has a simple structure, we suggest a regularized asymptotic solution, which in addition to the angular boundary layer functions contains exponential and parabolic boundary layer functions. The asymptotic behavior is constructed by one of the authors on the basis of the regularization method for singularly perturbed problems, developed by S.A. Lomov and adapted to singularly perturbed parabolic equations with two viscous boundaries.

Keywords: *singularly perturbed parabolic equations, regularized asymptotic behavior, exponential boundary layers, parabolic boundary layers.*