ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Математика. Механика. Информатика Вып. 2(33)

УДК 517. 929

Об устойчивости линейных динамических систем с последействием*

Ю. Ф. Долгий
Уральский федеральный университет; Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
Институт математики и механики УрО РАН; Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
yurii.dolgii@imm.uran.ru; 8 (343) 362-81-83

В статье обсуждаются различные определения устойчивости для линейных динамических систем с последействием.

Ключевые слова: *линейное дифференциальное уравнение с последействием; устойчивость движения.*
DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-74-81

Введение

Известно, что для линейной системы из устойчивости нулевого движения следует устойчивость всех движений системы. Поэтому мы будем использовать термин *устойчивость линейной динамической системы.* В данной статье рассматриваются различные формы описания динамической системы с последействием: эволюционная, в терминах "предыстория–история", в терминах "вход–выход". Для описания в терминах "предыстория–история" и эволюционного описания используется отображение "начальная функция–движение динамической системы", а для описания в терминах "вход–выход" – отображение "возмущение–движение динамической системы". Корректные описания динамических систем с последействием связаны с непрерывностью этих отображений в слабейших топологиях пространств движений динамических систем с последействием.

Так, для линейных динамических систем можно использовать топологии векторных пространств. В классических определениях устойчивости свойство устойчивости связано с ограниченностью возмущенных движений. Согласно теореме А.Н. Колмогорова для векторных топологических пространств ограниченные окрестности имеют нормированные пространства.

В данной работе устойчивые линейные динамические системы с последействием определяются непрерывными отображениями для нормированных пространств движений. Кроме того, изучается связь различных видов устойчивости.

1. Описание линейной динамической системы с последействием в терминах "предыстория–история"

Рассмотрим линейную динамическую систему на временной оси R. Функцию, моделирующую динамический процесс до начального момента времени $t_0 \in [a,+\infty)$, $\varphi(\cdot) \in \Phi = \Phi((-\infty,t_0],R^n)$, будем называть *предысторией динамического процесса*, а функцию, моделирующую динамический процесс после начального момента времени, $x(\cdot) \in X = X((t_0,+\infty),R^n)$ – *историей динамического процесса.* Здесь $\Phi((-\infty,t_0],R^n)$ и $X((t_0,+\infty),R^n)$ – топологические векторные пространства. Описание системы в терминах

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

"предыстория–история" задается линейным оператором

$$S(t_0):\Phi((-\infty,t_0],R^n)\to X((t_0,+\infty),R^n).$$

Введем в пространстве $X((t_0,+\infty),R^n)$ топологию проективного предела τ_p [1].

Для функций $x(\cdot)\in X((t_0,+\infty),R^n)$ и произвольных чисел $T>t_0$ определим функции $x_{[t_0,T]}(\cdot)\in X((t_0,T],R^n)$, с помощью формул $x_{[t_0,T]}(t)=x(t)$, $t\in(t_0,T]$, а также проекторы $(P_{[t_0,T]}x)(t)=x_{[t_0,T]}(t)$, $t\in(t_0,T]$. Пространства $P_{[t_0,T]}X((t_0,+\infty),R^n)=X((t_0,T],R^n)$, $T>t_0$, будем считать нормируемыми с нормами элементов $\|x_{[t_0,T]}(\cdot)\|_{[t_0,T]}$. Используем обозначение (X,τ_p) для пространства с топологией проективного предела.

Определение 1. Линейная динамическая система, описанная в терминах "предыстория–история", удовлетворяет условию корректности, если непрерывно отображение $S(t_0):\Phi\to(X,\tau_p)$.

В пространстве $X((t_0,+\infty),R^n)$ введем топологию τ_n, порождаемую нормой $\|\cdot\|_X$, и используем обозначение $(X,\|\cdot\|_X)$ для нормированного пространства.

Определение 2. Линейная динамическая система, описанная в терминах "предыстория–история", устойчива, если непрерывно отображение

$$S(t_0):\Phi\to(X,\|\cdot\|_X).$$

Устойчивость динамической системы зависит от выбранных топологий пространств Φ и X. При переходе к более сильной топологии пространства Φ и более слабой топологии пространства X устойчивость сохраняется. При сравнении топологий могут быть использованы теоремы вложения функциональных пространств. Изменения устойчивости динамической системы при переходе к более слабой топологии пространства Φ или к более сильной топологии пространства X требуют дополнительных исследований. Кроме того, при выборе топологий рассматриваемых пространств необходимо обеспечить условие корректности динамической системы.

Выбор специальных норм пространства историй позволяет изучить условия их асимптотического стремления к нулю при неограниченном возрастании времени, в частности, экспоненциального стремления к нулю.

Отметим, что в данной работе не исследуется зависимость устойчивости от начального момента.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt}=\int_{-\infty}^{0}d\eta(t,s)x(t+s),\ t\ge a. \qquad (1.1)$$

Здесь $x(\cdot):[-\infty,+\infty)\to R^n$; при почти всех значениях $t\in[a,+\infty)$ функция $\eta(t,\cdot):[-\infty,0]\to R^{n\times n}$ имеет ограниченную вариацию

$$v(t)=Var\eta(t,\cdot)=\sup_{\Delta}\sum_{j=0}^{+\infty}\left|\eta(t,s_{j+1})-\eta(t,s_j)\right|,$$

где Δ – произвольное разбиение полуинтервала $(-\infty,0]$ точками $\{s_j\}_{j=0}^{+\infty}$.

В пространстве предысторий $\Phi=C((-\infty,t_0],R^n)$ непрерывных функций с компактными носителями выбираем топологию индуктивного предела τ_i [1] нормируемых пространств $C([T_1,t_0],R^n)$, $T_1<t_0$, а в пространстве историй $X=C((t_0,+\infty),R^n)$ – топологию проективного предела τ_p нормируемых пространств $C([t_0,T_2],R^n)$, $T_2>t_0$.

Описание системы в терминах "предыстория–история" задается линейным оператором $S(t_0):(\Phi,\tau_i)\to(X,\tau_p)$, определяемым формулой

$$(S(t_0)\varphi)(t)=V(t,t_0)\varphi(t_0)+ \qquad (1.2)$$
$$\int_{-\infty}^{t_0-0}d_\alpha\left[\int_{t_0}^{t}V(t,z)\eta(z,\alpha-z)dz\right]\varphi(\alpha),$$

где $V(\cdot,\cdot)$ – фундаментальная матрица дифференциального уравнения с последействием (1.1).

Теорема 1. Пусть при фиксированном значении $s \in [-\infty, 0]$ функция $\eta(\cdot, s) : [a, +\infty) \to R^{n \times n}$ локально интегрируема, скалярная функция $v(\cdot)$ является локально интегрируемой на полуоси $[a, +\infty)$. Тогда описание системы в терминах "предыстория–история", определяемое линейным оператором $S(t_0) : (\Phi, \tau_i) \to (X, \tau_p)$ и формулой (1.2), удовлетворяет условию корректности.

В пространстве непрерывных ограниченных функций $C = C((t_0, +\infty), R^n)$ введем топологию τ_n, порождаемую нормой $\|x(\cdot)\|_C = \sup\limits_{t \in (t_0, +\infty)} |x(t)|$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Линейная динамическая система

$$S(t_0) : (\Phi, \tau_i) \to (X, \|\cdot\|_C),$$

определяемая формулой (1.2), устойчива, если

$$\sup_{t \ge t_0} |V(t, t_0)| < +\infty$$

$$\sup_{t \ge t_0} \int_{t_0}^{t} |V(t, s)| v(s, t_0 - s) ds < +\infty .$$

Здесь

$$v(t, z) = \underset{\vartheta \in (-\infty, z]}{Var} \eta(t, \vartheta), \ z \in (-\infty, 0], \ t \ge t_0 .$$

Изменения топологий пространств Φ и X может привести к изменению условий устойчивости динамической системы с последействием, определяемой формулой (1.2).

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Линейная динамическая система, определяемая формулой (1.2), экспоненциально устойчива, если существуют положительные числа α и V_0 такие, что выполняются условия

$$|V(t, t_0)| \le V_0 e^{-\alpha(t-s)}, t \ge s \ge t_0 ,$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha s} v(t_0 - s, s) ds < +\infty .$$

Для дифференциальных уравнений (1.1) с ограниченным последействием ($\eta(t, s) = 0$, $s \le t - r, r > 0$) топологическое пространство Φ можно заменить нормируемым, в частности, пространством $C([t_0 - r, t_0], R^n)$.

Тогда для нахождения условий устойчивости динамической системы можно использовать известные результаты об условиях непрерывности линейных интегральных операторов в нормируемых пространствах.

Для автономных дифференциальных уравнений (1.1) с последействием (функция η не зависит от первого аргумента) при исследовании их устойчивости можно использовать преобразование Лапласа.

Пусть пространство предысторий Φ состоит из непрерывных функций с компактными носителями и выполняются условия корректности для линейной динамической системы с последействием, определяемой формулой (1.2) в автономном случае.

Тогда преобразование Лапласа для истории динамического процесса является аналитической функцией в некоторой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(\lambda) > \sigma\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$. На границе полуплоскости точка неаналитичности преобразования Лапласа совпадает с точкой неаналитичности или нулем функции $\delta(\lambda) = \det \Delta(\lambda)$, где

$$\Delta(\lambda) = \lambda I_n - \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda s} d\eta(s). \qquad (1.3)$$

Для автономных дифференциальных уравнений (1.1) с ограниченным последействием преобразование Лапласа для истории динамического процесса является мероморфной функцией, особенности которой совпадают с нулями функции $\delta_r(\lambda) = \det \Delta_r(\lambda)$, где

$$\Delta_r(\lambda) = \lambda I_n - \int_{-r}^{0} e^{\lambda s} d\eta(s). \qquad (1.4)$$

Теорема 4. Линейная динамическая система с последействием, определяемая формулой (1.2) в автономном случае, экспоненциально устойчива, если, в случае ограниченного последействия, на комплексной плоскости все нули функции δ_r лежат в левой полуплоскости, а в случае неограниченного последействия для некоторого положительного числа ε отсутствуют нули и точки неаналитичности функции δ в области

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(\lambda) > -\varepsilon\}.$$

Отметим, что метод преобразования Лапласа получил наибольшее развитие для автономных дифференциально-разностных уравнений [2].

2. Эволюционное описание линейной динамической системы с последействием

Для динамических систем с последействием эволюционное описание ввел Н.Н. Красовский [3]. При эволюционном описании динамической системы с ограниченным последействием r элементы, определяющие предыстории φ_{t_0} и истории x_t, $t \geq t_0$, принадлежат нормируемому пространству $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}([-r,0], R^n)$, которое называется *фазовым.* Топологии, порождаемые различными нормами этого пространства, в отличие от конечномерного случая, рассматриваемого в классической теории устойчивости А.М. Ляпунова, могут быть не эквивалентными. Поэтому выбор нормы фазового пространства влияет на устойчивость движения такой динамической системы. Основные положения теории устойчивости динамических систем с последействием в эволюционной постановке изложены в монографиях [3, 4].

Таким образом, связь между описанием в терминах "предыстория–история" и эволюционным описанием динамической системы определяется формулами

$$x(t+\vartheta, t_0, \varphi) = x_t(\vartheta, t_0, \varphi_{t_0}),$$
$$\varphi(t_0+\vartheta) = \varphi_{t_0}(\vartheta), \ \ \vartheta \in [-r,0], t \geq t_0.$$

Эволюционное описание линейной динамической системы задается двухпараметрическим семейством линейных непрерывных операторов $\{T(t,t_0), t \geq t_0 \geq a\}$,

$$T(t,t_0) : \hat{\Phi}([-r,0], R^n) \to \hat{\Phi}([-r,0], R^n).$$

Корректность линейной динамической системы при эволюционном описании связана с сильной непрерывностью операторов $T(t,t_0)$ на любом отрезке $[t_0,b], b > t_0$. Требование корректности эволюционного описания можно рассмотреть в топологическом пространстве $C((t_0,+\infty),\hat{\Phi})$, вводя для него топологию проекционного предела нормированных пространств $C((t_0,b),\hat{\Phi}), b > t_0$.

Для исследования устойчивости линейной динамической системы при эволюционном описании обычно используют топологию пространства $\mathbf{C} = C((t_0,+\infty),\hat{\Phi})$, определяемую следующей нормой его элементов: $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{C}} = \sup\limits_{t>t_0} \|x_t(\cdot)\|_{\hat{\Phi}}$. Другие нормированные пространства используются редко.

Теорема 5. Пусть для исследования устойчивости линейной динамической системы при эволюционном описании используется топология нормированного пространства $\mathbf{C}$, определенная выше. Линейная эволюционная динамическая система с ограниченным последействием тогда и только тогда устойчива, когда $\sup\limits_{t \geq t_0} \|T(t,t_0)\|_{\hat{\Phi}} < +\infty$, асимптотически устойчива, когда $\lim\limits_{t \to +\infty} \|T(t,t_0)\|_{\hat{\Phi}} = 0$, экспоненциально устойчива, когда $\|T(t,t_0)\|_{\hat{\Phi}} \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}$, $t \geq t_0$, где $K, \alpha > 0$.

Эволюционное описание динамической системы дает возможность при исследовании устойчивости динамических процессов использовать результаты спектральной теории линейных операторов.

В фазовом пространстве $\hat{\Phi}$ динамическая система описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_t}{dt} = A(t)x_t, \ t \geq a, \qquad (2.1)$$

с неограниченными операторами

$$A(t) : \hat{\Phi}([-r,0], R^n) \to \hat{\Phi}([-r,0], R^n).$$

Для периодической линейной динамической системы функция $t \to A(t)$ ω-периодична.

Теорема 6. Линейная эволюционная ω-периодическая динамическая система асимптотически (экспоненциально) устойчива, когда спектр оператора монодромии $T(t_0+\omega, t_0)$ принадлежит внутренности единичного круга с центром в нуле на комплексной плоскости.

Для автономной линейной динамической системы оператор A в уравнении (2.1) не зависит от t. Корректное эволюционное описание динамической системы порождает сильно непрерывную полугруппу $\{T(t), t \geq 0\}$.

Теорема 7 [5]. Автономная линейная эволюционная динамическая система асимптотически (экспоненциально) устойчива, когда тип полугруппы $\omega_0(A)$ совпадает со спектральной гранью $s(A)$ генератора полугруппы и $s(A)<0$.

Пусть линейная динамическая система описывается дифференциальным уравнением (1.1), где функция η удовлетворяет условию, обеспечивающему ограниченность последействия. В качестве фазового пространства выберем $C=C([-r,0],R^n)$. В уравнении (2.1) оператор $A(t)$ $(t\ge a)$ имеет область определения

$$D(A(t))=\{x_t\in C: x_t\in C^1([-r,0],R^n),$$

$$\frac{dx_t(0)}{dt}=\int_{-r}^{0}d\eta(t,s)x_t(s)\}$$

и задается формулами

$$(A(t)x_t)(\vartheta)=\frac{dx_t(\vartheta)}{d\vartheta},\ \vartheta\in[-r,0),$$

$$(A(t)x_t)(0)=\int_{-r}^{0}d\eta(t,s)x_t(s).$$

Эквивалентность задач Коши для уравнений (1.1) и (2.1) имеет место, если для уравнения (2.1) используются обобщенные решения для начальных функций, не принадлежащих областям $D(A(t)),\ t\ge t_0\ge a.$

Введем операторы $T(t,t_0)$, $t\ge t_0\ge a$, действующие в фазовом пространстве $C=C([-r,0],R^n)$, с помощью формул

$$(T(t,t_0)\varphi_{t_0})(\vartheta)=\varphi_{t_0}(t-t_0+\vartheta),$$

$$\vartheta\in[-r,t_0-t],\ t_0\le t\le t_0+r,$$

$$(T(t,t_0)\varphi_{t_0})(\vartheta)=V(t+\vartheta,t_0)\varphi_{t_0}(0)+ \quad (2.2)$$

$$\int_{-r}^{-0}d_\alpha\left[\int_0^r V(t+\vartheta,z+t_0)\eta(z+t_0,\alpha-z)dz\right]\varphi_{t_0}(\alpha),$$

$$\vartheta\in[\max\{t_0-t,-r\},0],\ t>t_0.$$

Теорема 8. Пусть $\sup\limits_{s\in[t_0,t_0+r]}Var\eta(s,\cdot)<+\infty$. Линейная эволюционная динамическая система с последействием (2.2) устойчива, если $\sup\limits_{t\ge t_0 s\notin[t_0,t_0+r]}|V(t,s)|<+\infty$, асимптотически устойчива, если $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\limits_{0\, s\notin[t_0,t_0+r]}|V(t,s)|<+\infty$, экспоненциально устойчива, если $|V(t,s)|\le V_0e^{-\alpha(t-s)}$, $t\ge s\ge t_0$, где $V_0,\alpha>0.$

Для линейной ω-периодической динамической системы функция η периодична по первому аргументу. Спектр оператора монодромии не зависит от начального момента времени t_0 и некоторая его степень является вполне непрерывным оператором.

Теорема 9 [4]. Линейная эволюционная ω-периодическая динамическая система с последействием (2.2) тогда и только тогда асимптотически (экспоненциально) устойчива, когда все собственные числа оператора монодромии $T(\omega,0)$ меньше единицы по модулю, устойчива, когда все собственные числа оператора монодромии не превосходят единицы по модулю и для всех собственных чисел, модули которых равны единице, их алгебраические кратности совпадают с размерностями собственных подпространств оператора монодромии.

Следствие. Пусть $\sup\limits_{s\in[0,r]}Var\eta(s,\cdot)<\infty.$ Линейная ω-периодическая динамическая система с последействием (2.2) асимптотически (экспоненциально) устойчива, если для некоторого натурального числа n выполняется неравенство

$$\sup_{\vartheta,s\in[-r,0]}|V(n\omega+\vartheta,r+s)|\left(1+r\sup_{s\in[0,r]}Var\eta(s,\cdot)\right)<1.$$

В автономной линейной динамической системе (2.2) функция η не зависит от первого аргумента.

Теорема 10 [4]. Линейная эволюционная автономная динамическая система с последействием тогда и только тогда асимптотически (экспоненциально) устойчива, когда все корни характеристического уравнения $\det\Delta_r(\lambda)=0$ имеют отрицательные действительные части, устойчива, когда все корни характеристического уравнения имеют неположительные действительные части и для всех корней λ_* характеристического уравнения, действительные части которых равны нулю, их алгебраические кратности совпадают с дефектами матриц $\Delta_r(\lambda_*)$.

При дополнительных ограничениях на функцию η эволюционные операторы (2.2) могут быть продолжены по непрерывности на пространства $L_p = L_p([-r,0],R^n)$, $p \ge 1$. Используя сглаживающие свойства решений дифференциальных уравнений с последействием, можно строить сужения эволюционных операторов (2.2) на пространства $W_p^k = W_p^k([-r,0],R^n)$, $p,k \ge 1$. Выбор различных фазовых пространств задает различные множества начальных возмущений. Топологии бесконечномерного пространства начальных возмущений, в отличие от конечномерного, могут быть не эквивалентными. Поэтому требуется изучать зависимость устойчивости эволюционной динамической системы с последействием от выбора бесконечномерного фазового пространства.

Применение в задачах устойчивости описания динамической системы в терминах "предыстория–история" позволяет использовать более широкий набор топологических пространств.

Рассмотрим линейную динамическую систему с неограниченным последействием в фазовом пространстве $\hat{\Phi}((-\infty,0],R^n)$, наделяя его топологией нормированного пространства. Учитывая связь описания в терминах "предыстория–история" с эволюционным описанием, находим

$$(T(t,t_0)\varphi_{t_0})(\vartheta) = \varphi_{t_0}(t-t_0+\vartheta),$$
$$\vartheta \in (-\infty, t_0-t],\ t_0 \le t,$$
$$(T(t,t_0)\varphi_{t_0})(\vartheta) = (S_{t_0}\varphi_{t_0}(-t+\cdot))(t+\vartheta),$$
$$\vartheta \in (t_0-t,0],\ t_0 < t.$$

Для исследования устойчивости линейной динамической системы при эволюционном описании используем топологию пространства $\mathbf{C} = C((t_0,+\infty),\hat{\Phi})$, определяемую следующей нормой его элементов: $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{C}} = \sup\limits_{t>t_0}\|x_t(\cdot)\|_{\hat{\Phi}}$.

Таким образом, условия устойчивости линейной динамической системы при эволюционном описании и при описании в терминах "предыстория–история" совпадают для топологии нормированного пространства $X((t_0,+\infty),R^n)$, согласованной с топологией пространства $C((t_0,+\infty),\hat{\Phi})$.

В то же время справедливы неравенства

$$\|T(t,t_0)\varphi_{t_0}\| \ge \|\varphi_{t_0}\|,\quad \varphi_{t_0} \in C,\ t \ge t_0.$$

Поэтому, в случае неограниченного последействия, линейная динамическая система при эволюционном описании не может быть асимптотически устойчивой. Пусть линейная динамическая система описывается дифференциальным уравнением (1.1). В качестве фазового пространства выберем пространство непрерывных ограниченных на полуоси функций $C = C((-\infty,0],R^n)$. Для дифференциального уравнения (1.2) область определения неограниченного оператора

$$D(A(t)) = \{x_t \in C:\ x_t \in C^1((-\infty,0],R^n),$$
$$\frac{dx_t(0)}{dt} = \int_{-\infty}^{0} d\eta(t,s)x_t(s)\}.$$

Эволюционные операторы $T(t,t_0)$, $t \ge t_0 \ge a$, действующие в фазовом пространстве C, определяются формулами

$$(T(t,t_0)\varphi_{t_0})(\vartheta) = \varphi_{t_0}(t-t_0+\vartheta),$$
$$\vartheta \in (-\infty,t_0-t],\ t_0 \le t,$$
$$(T(t,t_0)\varphi_{t_0})(\vartheta) = V(t+\vartheta,t_0)\varphi_{t_0}(0) + \qquad (2.3)$$
$$\int_{-\infty}^{-0} d_\alpha\left[\int_0^{+\infty} V(t+\vartheta,z+t_0)\eta(z+t_0,\alpha-z)dz\right]\varphi_{t_0}(\alpha),$$
$$\vartheta \in (t_0-t,0],\ t > t_0.$$

Можно сделать вывод, что для линейной ω-периодической динамической системы (2.3) никакая натуральная степень оператора монодромии не является вполне непрерывным оператором. Для линейной автономной динамической системы оператор A имеет кроме дискретного также непрерывный спектр. Появление непрерывной части спектра при переходе к системе с неограниченным последействием является причиной отсутствия асимптотической устойчивости для системы (2.3).

3. Описание динамической системы в терминах "вход–выход"

Рассмотрим описание линейной динамической системы в терминах "вход–выход". Входной сигнал моделируется функцией $u(\cdot) \in U = U([t_0,+\infty), R^m)$, а выходной сигнал – функцией $x(\cdot) \in X = X([t_0,+\infty), R^n)$.

Здесь $U([t_0,+\infty), R^m)$ и $X([t_0,+\infty), R^n)$ – топологические векторные пространства. Описание системы в терминах "вход–выход" задается линейным оператором

$$F : U([t_0,+\infty), R^m) \to X([t_0,+\infty), R^n).$$

Линейная динамическая система, описанная в терминах "вход–выход", удовлетворяет условию корректности, если непрерывно отображение $F : U \to (X, \tau_p)$.

Рассмотрим задачу устойчивости линейной динамической системы по отношению к постоянно действующим возмущениям [6]. В этой постановке задачи устойчивости в качестве входных сигналов выступают возмущения, а в качестве выходных – истории динамических процессов.

В пространстве $X([t_0,+\infty), R^n)$ введем топологию τ_n, порождаемую нормой $\|\cdot\|_X$, и используем обозначение $(X, \|\cdot\|_X)$ для нормированного пространства.

Линейная динамическая система, описанная в терминах "вход–выход", устойчива, если непрерывно отображение

$$F : U \to (X, \|\cdot\|_X).$$

Асимптотическая и экспоненциальная устойчивости динамической системы, описанной в терминах "вход–выход", возможны только при специальных ограничениях на топологии пространства U.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^{0} d\eta(t,s) x(t+s) + B(t)u(t), \quad (3.1)$$

где $u \in C([a,+\infty), R^m)$, $B \in C([a,+\infty), R^{n\times m})$. Введем в пространстве возмущений $U = C([t_0,+\infty), R^m)$ топологию индуктивного предела τ_i нормируемых пространств, а в пространстве историй $X = C((t_0,+\infty), R^n)$ – топологию проективного предела τ_p нормируемых пространств. Описание системы в терминах "вход–выход" задаем линейным оператором $F : (U, \tau_i) \to (X, \tau_p)$, определяемым формулой

$$(Fu)(t) = \int_{t_0}^{t} V(t,s) B(s) u(s) ds, t \ge t_0. \quad (3.2)$$

При выполнении условий теоремы 1 линейная динамическая система, описанная в терминах "вход–выход" формулой (3.2), удовлетворяет условию корректности.

Линейная динамическая система $F : (\Phi, \tau_i) \to (X, \|\cdot\|_C)$, определяемая формулой (3.2) устойчива, если

$$\sup_{t \ge t_0} \int_{t_0}^{t} |V(t,s)\|B(s)| ds < +\infty.$$

Обзор результатов по теории устойчивости динамических систем с последействием, по отношению к постоянно действующим возмущениям, приведен в монографии [7].

Стоит упомянуть, что для дифференциальных уравнений с последействием класс возмущений, описанных в данном разделе, шире класса возмущений начальных функций, рассматриваемых в первом разделе.

Полагая $m = 1$, $B(t) = I_n$, $t \ge a$, получим связь между возмущениями

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t_0 - 0} d\eta(t, s-t)\varphi(s) + \varphi(t_0)\delta(t - t_0), \quad (3.3)$$

$$t \ge t_0,$$

где $\delta(\cdot)$ – функция Дирака. Для ограниченного последействия носители функции (3.3) принадлежат отрезку $[t_0, t_0 + r]$. Формула (3.3) позволяет согласовать топологии пространств начальных функций Φ и возмущений U, для которых устойчивость динамической системы с последействием имеет место при описаниях ее в терминах "предыстория–история" и "вход–выход".

Заключение

Подводя итоги, отметим, что устойчивость линейной динамической системы с последействием связана с непрерывностью ее определяющего оператора, действующего из топологического пространства в нормированное пространство.

Нами рассмотрено эволюционное описание динамической системы, а также описания в терминах "предыстория–история" и "вход–выход". Изучена зависимость устойчивости линейной динамической системы от формы ее описания, а также исследована зависимость устойчивости линейной динамической системы с последействием от выбора топологий функциональных пространств.

Список литературы

1. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 360 с.
2. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1984. 548 с.
3. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1967. 421 с.
5. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С. и др.* Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1997. 352 с.
6. *Хэррис К., Валенка Ж.* Устойчивость динамических систем с обратной связью. М.: Мир, 1987. 360 с.
7. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. 230 с.

Stability of linear dynamic systems with aftereffect

Yu. F. Dolgiy
Ural Federal University; 19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russia
Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Division of the RAS
16, S. Kovalevskoy st., Ekaterinburg, 620990, Russia
yurii.dolgii@imm.uran.ru; 8 (343) 362-81-83

Different concepts of stability are discussed for linear dynamic systems with aftereffect.

Keywords: *linear differential equation with aftereffect; stability of motion.*