УДК 517.91

О построении областей устойчивости решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметров*

М. Г. Юмагулов[1], **Л. С. Ибрагимова**[2], **И. Ж. Фанина**[3]
[1]Башкирский государственный университет, Россия, 450074, Уфа, ул. З. Валиди, 32
[2]Башкирский государственный аграрный университет, Россия, 450001, Уфа, ул.50-летия Октября, 34
[3]Башкирский государственный университет, Россия, 450074, Уфа, ул. З. Валиди, 32
yum_mg@mail.ru; 8 (906) 107-41-18

Предлагается новый общий подход, позволяющий изучать задачу построения областей устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений. Подход основан на модификации метода М. Розо исследования устойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами, зависящими от малого параметра и асимптотических формул теории возмущений линейных операторов. Получены приближенные формулы, описывающие границы областей устойчивости.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения; точки равновесия; периодические решения, устойчивость; область устойчивости; малый параметр; асимптотические формулы.*
DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-61-66

Введение

В статье рассматривается задача о построении областей устойчивости точек равновесия дифференциальных уравнений, зависящих от параметров. Основными объектами исследования являются автономные и неавтономные периодические системы вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha,\beta)x + a(x,\alpha,\beta),\ x \in R^2, \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\alpha,\beta)x + a(x,t,\alpha,\beta),\ x \in R^2. \qquad (2)$$

В уравнении (1) предполагается, что

– постоянная матрица $A(\alpha,\beta)$ и функция $a(x,\alpha,\beta)$ гладко (непрерывно дифференцируемо) зависят от двух скалярных параметров α и β;

– нелинейность $a(x,\alpha,\beta)$ гладко зависит от x и равномерно по параметрам α и β удовлетворяет соотношению:

$$\|a(x,\alpha,\beta)\| = O(\|x\|^2) \text{ при } \|x\| \to 0.$$

В уравнении (2) предполагается, что

– матрица $A(t,\alpha,\beta)$ и $a(x,t,\alpha,\beta)$ гладко зависят от двух скалярных параметров α и β и непрерывны по t;

– нелинейность $a(x,t,\alpha,\beta)$ гладко зависит от x и равномерно по t, α и β и удовлетворяет соотношению

$$\|a(x,t,\alpha,\beta)\| = O(\|x\|^2) \text{ при } \|x\| \to 0;$$

– матрица $A(t,\alpha,\beta)$ и функция $a(x,t,\alpha,\beta)$ являются периодическими по t:

$$A(t+T,\alpha,\beta) \equiv A(t,\alpha,\beta),$$
$$a(x,t+T,\alpha,\beta) \equiv a(x,t,\alpha,\beta).$$

Здесь и ниже символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидовы нормы векторов и квадратных матриц.

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

Уравнения (1) и (2) при всех значениях параметров α и β имеют точку равновесия $x=0$, которая при одних значениях параметров может быть устойчивой, а при других – неустойчивой. Связное множество G в плоскости параметров (α,β) будем называть областью устойчивости (областью неустойчивости) точки равновесия $x=0$ системы (1) или (2), если для любого $(\alpha,\beta)\in G$ эта точка является устойчивой (неустойчивой). Границы областей устойчивости и неустойчивости, как правило, представляют собой некоторые кривые γ, при переходе через которые в окрестности точки равновесия $x=0$ системы (1) или (2) возможны различные бифуркационные явления (см., напр., [1–3]).

Задача о построении областей устойчивости и неустойчивости и границ между ними является одной из важных и интересных задач теории дифференциальных уравнений и ее приложений. Здесь предложены эффективные методы исследования, решен ряд важных с теоретической и практической точек зрения задач (см., например, [3–6] и имеющуюся там библиографию).

Следует отметить, что большинство известных работ относится к автономным уравнениям [7–11]. Существенно менее изучены эти задачи для неавтономных уравнений с периодическими коэффициентами, хотя к таким задачам приводят многие важные вопросы теории и практики. Основная проблема здесь в сложности задачи построения мультипликаторов, явное построение которых возможно лишь в самых простых случаях. Известные результаты, как правило, относятся к исследованию конкретных уравнений (см. [5, 6, 12]).

В настоящей статье предлагается новый общий подход, позволяющий получать приближенные формулы в задаче построения границ областей устойчивости систем (1) и (2). Подход основан на модификации метода М. Розо [13] и асимптотических формулах теории возмущений линейных операторов [14, 15].

Предлагаемый в статье подход может быть модифицирован и для решения поставленных задач в более общих условиях. Например, для ситуаций, когда системы (1) и (2) являются $N-$мерными, т.е. в них $x\in R^N$, или для уравнений, заданных в комплексном пространстве C^N.

2. Автономное уравнение

Рассмотрим сначала автономное уравнение (1). Предполагается, что при некоторых $\alpha=\alpha_0$ и $\beta=\beta_0$ матрица $A_0=A(\alpha_0,\beta_0)$ удовлетворяет одному из условий:

1^0. A_0 имеет простое собственное значение 0, а другое ее собственное значение является отрицательным;

2^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0>0$.

В этих условиях, как правило, точка (α_0,β_0) лежит на границе γ_0 областей устойчивости G_s и неустойчивости G_n системы (1). Приведем подход, позволяющий локально определить границу γ_0 и области G_s и G_n.

2.1. Случай 1^0. Пусть сначала выполнено условие 1^0. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами: $\|e\|=1$ и $(e,g)=1$. Здесь и ниже символ $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов.

Положим,

$$\varsigma_1=(A'_\alpha e,g),\quad \varsigma_2=(A'_\beta e,g),$$

здесь A'_α и A'_β – производные матрицы $A(\alpha,\beta)$, вычисленные в точке (α_0,β_0). Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение:

$$\varsigma_1^2+\varsigma_2^2\neq 0. \tag{3}$$

Тогда уравнение

$$\varsigma_1\cos\varphi+\varsigma_2\sin\varphi=0 \tag{4}$$

имеет на промежутке $0\le\varphi<2\pi$ в точности два решения $\varphi=\varphi^*$ и $\varphi=\varphi^*+\pi$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1^0 и (3). Пусть φ^* – решение уравнения (4). Тогда

– через точку (α_0,β_0) плоскости (α,β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости G_s и неустойчивости G_n точки равновесия $x=0$ системы (1);

– параметрически заданная прямая

$$\alpha=\alpha_0+\mu\cos\varphi^*,\ \ \beta=\beta_0+\mu\sin\varphi^*$$

является касательной к кривой γ_0.

Зададимся произвольным $\varphi_0\in[0,2\pi)$ таким, чтобы

$$\lambda_0=\varsigma_1\cos\varphi_0+\varsigma_2\sin\varphi_0\neq 0 .$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1^0 и (3). Тогда решение $x=0$ системы (1) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\lambda_0<0$; оно будет неустойчивым, если $\mu\lambda_0>0$.

Иными словами, параметрически заданная прямая

$$\alpha=\alpha_0+\mu\cos\varphi_0,\quad \beta=\beta_0+\mu\sin\varphi_0$$

при малых $|\mu|$ содержится в области устойчивости G_s (в области неустойчивости G_n) точки равновесия $x=0$ системы (1), если $\mu\lambda_0<0$ (если $\mu\lambda_0>0$).

2.2. Случай 2^0. Рассмотрим теперь случай, когда выполнено условие 2^0. В этом случае существуют ненулевые векторы $e,g,e^*,g^*\in R^2$ такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e+ig)=i\omega_0(e+ig)\,,$$

$$A_0^*(e^*+ig^*)=-i\omega_0(e^*+ig^*)\,.$$

Эти векторы можно считать нормированными равенствами

$$\|e\|=\|g\|=1,\ \ (e,e^*)=(g,g^*)=1,$$

$$(e,g^*)=(g,e^*)=0.$$

Положим,

$$\eta_1=(A'_\alpha e,e^*)+(A'_\alpha g,g^*),$$

$$\eta_2=(A'_\beta e,e^*)+(A'_\beta g,g^*);$$

здесь A'_α и A'_β – производные матрицы $A(\alpha,\beta)$, вычисленные в точке (α_0,β_0). Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение

$$\eta_1^2+\eta_2^2\neq 0\,. \tag{5}$$

Тогда уравнение

$$\eta_1\cos\varphi+\eta_2\sin\varphi=0 \tag{6}$$

имеет на промежутке $0\le\varphi<2\pi$ в точности два решения $\varphi=\varphi^*$ и $\varphi=\varphi^*+\pi$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 2^0 и (5). Пусть φ^* – решение уравнения (6). Тогда

– через точку (α_0,β_0) плоскости (α,β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости G_s и неустойчивости G_n точки равновесия $x=0$ системы (1);

– параметрически заданная прямая

$$\alpha=\alpha_0+\mu\cos\varphi^*,\ \ \beta=\beta_0+\mu\sin\varphi^*$$

является касательной к кривой γ_0.

Зададимся произвольным $\varphi_0\in[0,2\pi)$ таким, чтобы

$$\lambda_0=\eta_1\cos\varphi_0+\eta_2\sin\varphi_0\neq 0.$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия 2^0 и (5). Тогда решение $x=0$ системы (1) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\lambda_0<0$; оно будет неустойчивым, если $\mu\lambda_0>0$.

Другими словами, параметрически заданная прямая

$$\alpha=\alpha_0+\mu\cos\varphi_0,\ \ \beta=\beta_0+\mu\sin\varphi_0$$

при малых $|\mu|$ содержится в области устойчивости G_s (в области неустойчивости G_n) точки равновесия $x=0$ системы (1), если $\mu\lambda_0<0$ (если $\mu\lambda_0>0$).

3. Неавтономное уравнение

Рассмотрим теперь неавтономное уравнение (2). Для простоты будем предполагать, что при $\alpha=\alpha_0$ и $\beta=\beta_0$ матрица $A_0=A(t,\alpha_0,\beta_0)$ от t не зависит. В этом случае матрица $A(t,\alpha,\beta)$ может быть представлена в виде

$$A(t,\alpha,\beta)=A_0+(\alpha-\alpha_0)A_1(t)+$$
$$+(\beta-\beta_0)B_1(t)+A_2(t,\alpha,\beta), \tag{7}$$

где A_0 – постоянная матрица, матрицы $A_1(t)$, $B_1(t)$ и $A_2(t,\alpha,\beta)$ являются T – периодическими по t, при этом матрица $A_2(t,\alpha,\beta)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению

$$\|A_2(t,\alpha,\beta)\|=O((\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2)$$

при $(\alpha,\beta)\to(\alpha_0,\beta_0)$.

Будем считать, что для матрицы A_0 выполнено одно из указанных в п. 2.2 условий 1^0 или 2^0.

3.1. Случай 1^0**.** Пусть сначала выполнено условие 1^0. Как и выше, обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0 (см. п. 2.1).

Положим,

$$\varsigma_1 = \int_0^T (A_1(t)e, g)dt, \quad \varsigma_2 = \int_0^T (B_1(t)e, g)dt.$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение

$$\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2 \neq 0. \qquad (8)$$

Тогда уравнение

$$\varsigma_1 \cos\varphi + \varsigma_2 \sin\varphi = 0 \qquad (9)$$

имеет на промежутке $0 \le \varphi < 2\pi$ в точности два решения: $\varphi = \varphi^*$ и $\varphi = \varphi^* + \pi$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия 1^0 и (8). Пусть φ^* – решение уравнения (9). Тогда

– через точку (α_0, β_0) плоскости (α, β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости G_s и неустойчивости G_n точки равновесия $x = 0$ системы (2);

– параметрически заданная прямая

$$\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi^*, \quad \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi^*$$

является касательной к кривой γ_0.

Зададимся произвольным $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ таким, чтобы $\lambda_0 = \varsigma_1 \cos\varphi_0 + \varsigma_2 \sin\varphi_0 \neq 0.$

Теорема 6. Пусть выполнены условия 1^0 и (8). Тогда решение $x = 0$ системы (2) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\lambda_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\mu\lambda_0 > 0$.

Иначе говоря, параметрически заданная прямая

$$\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi_0, \quad \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi_0$$

при малых $|\mu|$ содержится в области устойчивости G_s (в области неустойчивости G_n) точки равновесия $x = 0$ системы (2), если $\mu\lambda_0 < 0$ (если $\mu\lambda_0 > 0$).

3.2. Случай 2^0**.** Рассмотрим теперь случай, когда для системы (2) выполнено условие 2^0. Другими словами, пусть матрица A_0 из (7) имеет пару простых собственных значений: $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$.

В неавтономном случае условие 2^0 следует разделять на два случая:

2.1^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \dfrac{\pi k}{T}$, $k -$ натуральное число;

2.2^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 = \dfrac{\pi k}{T}$ при некотором натуральном k.

Случай 2.1^0 будем называть нерезонансным, а случай 2.2^0 – резонансным. Здесь ограничимся рассмотрением только нерезонансного случая.

Таким образом, пусть выполнено условие 2.1^0. Как и выше, обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^2$ собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению $\pm i\omega_0$ (см. п. 2.2).

Положим,

$$\eta_1 = \int_0^T [(A_1(t)e, e^*) + (A_1(t)g, g^*)]dt,$$

$$\eta_2 = \int_0^T [(B_1(t)e, e^*) + (B_1(t)g, g^*)]dt.$$

Ниже будем предполагать, что выполнено соотношение

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0 \qquad (10)$$

Тогда уравнение

$$\eta_1 \cos\varphi + \eta_2 \sin\varphi = 0 \qquad (11)$$

имеет на промежутке $0 \le \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi^*$ и $\varphi = \varphi^* + \pi$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия 2.1^0 и (10). Пусть φ^* – решение уравнения (11). Тогда

– через точку (α_0, β_0) плоскости (α, β) проходит единственная гладкая кривая γ_0, являющаяся границей областей устойчивости и неустойчивости G_n точки равновесия $x = 0$ системы (2);

– параметрически заданная прямая

$$\alpha = \alpha_0 + \mu \cos\varphi^*, \ \ \beta = \beta_0 + \mu \sin\varphi^*$$

является касательной к кривой γ_0.

Зададимся произвольным $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ таким, чтобы

$$\lambda_0 = \eta_1 \cos\varphi_0 + \eta_2 \sin\varphi_0 \neq 0.$$

Теорема 8. Пусть выполнены условия 2.1^0 и (10). Тогда решение $x = 0$ системы (2) будет асимптотически устойчивым при всех малых $|\mu|$ таких, что $\mu\lambda_0 < 0$; оно будет неустойчивым, если $\mu\lambda_0 > 0$.

Другими словами, параметрически заданная прямая

$$\alpha = \alpha_0 + \mu \cos\varphi_0, \ \ \beta = \beta_0 + \mu \sin\varphi_0$$

при малых $|\mu|$ содержится в области устойчивости G_s (в области неустойчивости G_n) точки равновесия $x = 0$ системы (2), если (если $\mu\lambda_0 > 0$).

В настоящей работе приведен подход, позволяющий в явном виде строить касательные к границам областей устойчивости точек равновесия дифференциальных уравнений (1) и (2). Как отмечалось выше, в основе этого подхода лежит модификация метода М. Розо [13] и асимптотические формулы теории возмущений линейных операторов [14, 15].

Указанный подход может быть развит в направлении построения границ областей устойчивости более высокого порядка точности.

Список литературы

1. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002. 560 с.
2. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 400 с.
3. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. и др.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. Москва–Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2009. 548 с.
4. *Chiang H.D., Alberto L.F.* Stability regions of nonlinear dynamical systems: theory, estimation, and applications. Cambridge University Press. 2015. 484 p.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
6. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.
7. *Loccufier M., Noldus E.* A new trajectory reversing method for estimating stability regions of autonomous nonlinear systems // Nonlinear Dynamics. Vol. 21. 2000. P. 265–288.
8. *Chiang H. D., Hirsch M. W., Wu F. F.* Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems // Institute of Electrical and Electronics Engineers Trans. on Automatic Control, 33, 1988. № 1. P 16–27.
9. *Amaral F.M., Alberto L.F.C.* Stability Boundary Characterization of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems in the Presence of a Saddle Node Equilibrium Point // Tend. Mat. Apl. Comput. 2012. Vol. 13, № 2. P. 143–154.
10. *Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г.* Функционализация параметра и асимптотика циклов в бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. № 11. С. 22–28.
11. *Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г.* Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 24–30.
12. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.
13. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971. 288с.
14. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1975. 740с.
15. *Красносельский М.А., Юмагулов М.Г.* Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений // ДАН России. 1999. Т. 365, № 2. С. 162–164.

On the construction of stability regions for solutions of differential equations depending on parameters

M. G. Yumagulov[1], L. S. Ibragimova[2], I. Zh. Fanina[3]
[1]Bashkir State University; 32, Z. Validi st., Ufa, 450074, Russia
[2]Bashkir State Agrarian University; 34, 50-letiya Oktyabrya st., Ufa, 450001, Russia
[3]Bashkir State University; 32, Z. Validi st., Ufa, 450074, Russia
yum_mg@mail.ru.

The paper proposes a new general approach that allows one to study the problem of constructing stability regions for nonlinear differential equations. The approach is based on the modification of M. Rozo's method for studying stability of linear systems with periodic coefficients depending on a small parameter and also on asymptotic formulae of the perturbation theory for linear operators. Approximate formulae describing boundaries of stability regions are obtained.

Keywords: *differential equations; equilibrium points; periodic solutions; stability; stability region; small parameter; asymptotic formulae.*