

УДК 517.935, 517.938

О сосуществовании циклов и хаотических решениях разностных уравнений со случайными параметрами*

Л. И. Родина, И. И. Тютеев

Удмуртский государственный университет
426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1
LRodina67@mail.ru

Рассматриваются разностные уравнения, правая часть каждого из которых в данный момент времени зависит не только от значения в предыдущий момент, но и от случайного параметра, принимающего значения в заданном множестве Ω . Для данной вероятностной модели исследованы различные динамические режимы развития, которые имеют определенные отличия от режимов детерминированных моделей и более полно отображают процессы, происходящие в реальных физических системах. Получены условия существования отталкивающего цикла, выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица, а также условия, при которых решения хаотические с вероятностью единица. Показано, что хаотические решения существуют в том случае, когда уравнение со случайными параметрами либо не имеет ни одного цикла, либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица. Исследуется также задача о сосуществовании стохастических циклов различного периода.

Ключевые слова: разностные уравнения со случайными параметрами; притягивающий и отталкивающий циклы; хаотическая траектория.

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-47-49

Объектом исследования в данной работе является разностное уравнение

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), (\omega_n, x_n) \in \Omega \times [a, b], n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

правая часть которого в каждый момент времени n зависит не только от значения $x_n \in [a, b]$, но и от случайного параметра ω_n , принадлежащего заданному множеству Ω . Предполагаем, что для каждого $\omega \in \Omega$ функция $x \rightarrow f(\omega, x)$ непрерывно дифференцируема.

Пусть задано множество Ω с сигма-алгеброй подмножеств A_0 , на которой определена вероятностная мера μ_0 . Рассмотрим вероятностное пространство (Σ, A, μ) , где Σ означает множество последовательностей $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega^\infty$, система множеств A является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$D_n = \{\sigma \in \Sigma : \omega_0 \in \Omega_0, \dots, \omega_n \in \Omega_n\},$$

где $\Omega_j \in A_0, j = 0, \dots, n$, и определим меру $\mu_0(D_n) = \mu_0(\Omega_0) \cdot \mu_0(\Omega_1) \cdot \dots \cdot \mu_0(\Omega_n)$. Тогда на измеримом пространстве (Σ, A) существует единственная вероятностная мера μ , которая является продолжением меры μ_0 на сигма-алгебру A .

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\sigma^n = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}), f_n(\sigma^n, x) = f(\omega_{n-1}, \dots, f(\omega_1, f(\omega_0, x))).$$

© Родина Л. И., Тютеев И. И., 2016

Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00346а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части (проект 2003).

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

Будем также пользоваться обозначениями $f^n(\sigma, x) = f^n(\sigma^n, x)$ и $x_n(\sigma, x) = f^n(\sigma, x)$.

Определение 1. Точки $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ образуют цикл B периода $k > 1$ для уравнения (1), если для всех $\sigma^k \in \Omega^k$ выполнены равенства $f^k(\sigma, \beta_0) = \beta_0$, $f^m(\sigma, \beta_0) = \beta_m$, $m = 1, \dots, k-1$ и цикл B не содержит цикла меньшего периода.

Определение 2. Цикл B называется *отталкивающим циклом* уравнения (1), если существует его окрестность U , которую каждая точка $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ покидает за конечное время.

Цикл B назовем *отталкивающим с вероятностью единица*, если существуют множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и окрестность U данного цикла, такие, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждой точки $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$.

Теорема 1. Пусть уравнение (1) имеет цикл $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$. Если

$$\prod_{i=0}^{k-1} \liminf_{x \rightarrow \beta_i} \inf_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, x)| > 1,$$

то цикл B является отталкивающим циклом уравнения (1).

Далее буквой M обозначено математическое ожидание случайной величины.

Теорема 2. Пусть уравнение (1) имеет цикл $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$. Если существует окрестность U цикла B такая, что

$$M \left(\ln \inf_{x \in U} |(f^k(\sigma, x))'_x| \right) > 0,$$

то цикл является отталкивающим с вероятностью единица.

Определение 3. Решение $x_n(\sigma, x_0)$ уравнения (1) (при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$) назовем *хаотическим*, если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ не существует.

Точку $x_0 \in [a, b]$ назовем *апериодической с вероятностью единица* точкой уравнения (1), если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ решения $x_n(\sigma, x_0)$ хаотические.

Так же, как в работе [1], точку y назовем *со временем периодической* точкой уравнения (1), если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для лю-

бых $\sigma^m \in \Omega^m$ точка $x = f^m(\sigma^m, y)$ является точкой некоторого периода $k \geq 1$.

Условие 1. Пусть $\Omega = \{v_1, \dots, v_r\}$, где $r \geq 2$, $\mu(v_i) = \mu_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r \mu_i = 1$ и каж-

дая из функций $f^k(\sigma^k, x)$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^k \in \Omega^k$ имеет конечное число неподвижных точек на отрезке $[a, b]$.

Теорема 3. Предположим, что выполнено условие 1 и уравнение (1) либо не имеет ни одного цикла (периода $k \geq 1$), либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица. Пусть Y – множество периодических и со временем периодических точек данного уравнения. Тогда любая точка $x_0 \in [a, b] \setminus Y$ апериодическая с вероятностью единица.

Рассмотрим задачу о сосуществовании стохастических циклов различного периода. Покажем, что решение этой задачи существенно отличается от известного результата А.Н. Шарковского [2] для детерминированного уравнения

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

а именно – при определенных условиях из существования стохастического цикла длины k следует существование цикла любой длины $l > k$.

Определение 4. Точку $\alpha_0 \in I$ назовем *стохастически периодической точкой* периода $k \in \mathbb{N}$ для уравнения (1), если существуют $\omega_{i0}, \dots, \omega_{i, k-1} \in \Omega$ такие, что $x_k(\sigma, \alpha_0) = \alpha_0$ и $x_m(\sigma, \alpha_0) \neq \alpha_0$ при $m = 1, \dots, k-1$, $\sigma = (\omega_{i0}, \dots, \omega_{i, k-1}, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots)$.

Утверждение 1 (см. [3]). Пусть существуют $v_i \neq v_j \in \Omega$ такие, что:

$$a) f(v_i, a) = f(v_i, b) = f(v_j, a) = f(v_j, b) = a;$$

б) существует $c_1 \in (a, b)$ такое, что функция $f(v_i, x)$ возрастает на интервале (a, c_1) , $f(v_i, c_1) = b$ и $f(v_i, x) > x$ для всех $x \in (a, c_1]$.

Тогда выполнены следующие свойства:

1) если в интервале (a, b) содержится точка x_1 такая, что $f(v_j, x_1) = x_1$, то для любого $l > 1$ существует стохастически периодическая точка периода l ;

2) если для некоторого $k > 1$ в интервале (a, b) содержится стохастически периодическая точка x_k периода k при $\omega_{i,0} = v_j$, $\omega_{i,1} = \dots = \omega_{i,k-1} = v_i$, то для любого $l > k$ существует стохастически периодическая точка периода l .

Список литературы

1. *Tien-Yien Li, James A. Yorke*. Period Three Implies Chaos // *The American Mathematical Monthly*. 1975. Vol. 82, № 10. P.985–992.
2. *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // *Украинский математический журнал*. 1964. Т.16, № 1. С. 61–71.
3. *Родина Л.И., Тютеев И.И.* Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 79–86.

On the coexistence of cycles and chaotic solutions of difference equations with random parameters

L. I. Rodina, I. I. Tyuteev

Udmurt State University; 1, Universitetskaya st., Izhevsk, 426034, Russia
LRodina67@mail.ru

The article deals with the difference equations, the right part of which in a certain moment of time depends not only on the value in the previous moment but also on a random parameter from a given Omega manifold. For this stochastic model various dynamic modes of development are studied. It should be mentioned that they differ from the modes of the determined models and describe the processes in real physical systems in a more comprehensive way. We have received the conditions for the unstable cycles existence, fulfilled for all values of a random parameter and fulfilled with probability one, and also conditions under which solutions are chaotic with probability one. It is shown that chaotic solutions exist when an equation with random parameters either has no cycles or all cycles are unstable with probability one. The problem of the coexistence for stochastic cycles of different periods is also investigated.

Keywords: *difference equations with random parameters; stable and unstable cycles; chaotic trajectory.*