УДК 514.742.4

Интегрирование градиента в $\mathbb{R}^3$

И. П. Попов
Курганский государственный университет
Россия, 640002, Курган, ул. Томина, 106–52
ip.popow@yandex.ru; 8-909-145-11-74

Предложен способ восстановления функции по ее градиенту, в основу которого положено суммирование неопределенных интегралов от частных производных функции и исключение лишних слагаемых.

Ключевые слова: *градиент; функция; частная производная; интеграл; переменная.*
DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-44-46

Актуальность задачи определения функции по ее градиенту не сводится исключительно к примеру пространственного распределения сил, которое является градиентом энергии соответствующего поля [1–5].

Дальнейшее рассмотрение ограничивается операциями на пространстве векторных полей и гладких функций в $\mathbb{R}^3$.

Существует несколько способов [6–9] отыскания функции по ее градиенту

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \quad (1)$$

Наиболее простой способ [10] заключается в вычислении криволинейного интеграла

$$f = \int_{x_0,y_0,z_0}^{x,y,z} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial z}dz =$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z_0)dy +$$

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz .$$

Достоинством этого метода является компактность. Недостатком – необходимость выбора начальной точки интегрирования (x_0, y_0, z_0). Последнее сопряжено с произволом, который может отразиться на виде окончательного решения. Кроме того, в ряде случаев это может быть сопряжено с трудностями, вследствие чего представлять собой дополнительную задачу.

Пример 1. Для двухмерного случая

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \arcsin y + \ln(y-1) ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{x}{y-1}$$

возникает проблема с выбором y_0, поскольку должны одновременно выполняться условия: $y \le 1$ и $y > 1$.

Есть способы, например [11], лишенные этого изъяна. Они заключаются в подборе вспомогательных функций. Однако их существенными недостатками являются трудоемкость и громоздкость.

Предлагаемый ниже подход свободен от недостатков указанных способов. По трудоемкости и компактности он сопоставим с первым способом, и в нем нет необходимости определения исходной точки интегрирования. Предлагаемый способ определяет следующая

Теорема. *Функция f может быть восстановлена по ее градиенту* (1) *в соответствии с формулой*

$$f = \int \frac{\partial f}{\partial x}dx + \int \frac{\partial f}{\partial y}dy + \int \frac{\partial f}{\partial z}dz -$$

$$2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C =$$

$$P_{xyz}(x,y,z)+P_{xy}(x,y)+P_{xz}(x,z)+P_x(x)+$$
$$Q_{xyz}(x,y,z)+Q_{xy}(x,y)+Q_{yz}(y,z)+Q_y(y)+$$
$$R_{xyz}(x,y,z)+R_{xz}(x,z)+R_{yz}(y,z)+R_z(z)-$$
$$2V_{xyz}-V_{xy}-V_{xz}-V_{yz}+C. \qquad (2)$$

При этом

$$P_{xyz}=Q_{xyz}=R_{xyz}=V_{xyz}, \qquad (3)$$
$$P_{xy}=Q_{xy}=V_{xy}, \qquad (4)$$
$$P_{xz}=R_{xz}=V_{xz}, \qquad (5)$$
$$Q_{yz}=R_{yz}=V_{yz}. \qquad (6)$$

Величины (3) – (6) представляют собой функции, содержащие переменные, указанные в индексах.

Доказательство. Очевидны тождества:

$$\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=P_{xyz}(x,y,z)+$$
$$P_{xy}(x,y)+P_{xz}(x,z)+P_x(x),$$
$$\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=Q_{xyz}(x,y,z)+$$
$$Q_{xy}(x,y)+Q_{yz}(y,z)+Q_y(y),$$
$$\int\frac{\partial f}{\partial z}dz=R_{xyz}(x,y,z)+$$
$$R_{xz}(x,z)+R_{yz}(y,z)+R_z(z),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 P_{xyz}}{\partial x\partial y\partial z},$$
$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 Q_{xyz}}{\partial x\partial y\partial z},$$
$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial z}dz=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 R_{xyz}}{\partial x\partial y\partial z}.$$

Отсюда непосредственно следует (3).

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 P_{xyz}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 P_{xz}}{\partial x\partial y},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 Q_{xyz}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 Q_{xy}}{\partial x\partial y}.$$

Отсюда с учетом (3) следует (4).

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 P_{xyz}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P_{xz}}{\partial x\partial z},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial z}dz=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 R_{xyz}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 R_{xz}}{\partial x\partial z}.$$

Отсюда с учетом (3) следует (5).

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 Q_{xyz}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 Q_{yz}}{\partial y\partial z},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial z}dz=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 R_{xyz}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 R_{yz}}{\partial y\partial z}.$$

Отсюда с учетом (3) следует (6).

Координаты градиента функции (2) можно вычислить следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\int\frac{\partial f}{\partial x}dx+Q_{xyz}+Q_{xy}+Q_{yz}+Q_y+$$
$$R_{xyz}+R_{xz}+R_{yz}+R_z-$$
$$2V_{xyz}-V_{xy}-V_{xz}-V_{yz}+C\Bigg)=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Слагаемые в скобках, являющиеся функциями от x, кроме первого взаимно уничтожаются. Частные производные по x от остальных равны нулю.

Аналогичным образом обстоит дело с частными производными по y и z.

Таким образом, градиент правой части (2) равен (1), следовательно, правая часть (2) представляет собой восстановленную функцию f.

Следствие

$$f=V_{xyz}+V_{xy}+V_{xz}+V_{yz}+V_x+V_y+V_z+C. \qquad (7)$$

Здесь

$$V_x=P_x(x),\ V_y=Q_y(y),\ V_z=R_z(z).$$

Пример 2

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{z}{y}+\sin y+\frac{z}{x}+2x\right)\mathbf{i}+$$
$$\left(x\cos y-\frac{xz}{y^2}+2yz^3+3y^2\right)\mathbf{j}+$$
$$+\left(\frac{x}{y}+\ln x+3y^2z^2-e^z\right)\mathbf{k}.$$

Искомая функция

$$f=\left(\frac{xz}{y}+x\sin y+z\ln x+x^2\right)+$$
$$\left(\frac{xz}{y}+x\sin y+y^2z^3+y^3\right)+$$
$$\left(\frac{xz}{y}+z\ln x+y^2z^3-e^z\right)-$$
$$2\frac{xz}{y}-x\sin y-z\ln x-y^2z^3+C=$$
$$\frac{xz}{y}+x\sin y+z\ln x+y^2z^3+x^2+y^3-e^z+C.$$

Здесь

$$P_{xyz} = Q_{xyz} = R_{xyz} = V_{xyz} = \frac{xz}{y},$$

$$P_{xy} = Q_{xy} = V_{xy} = x\sin y,$$

$$P_{xz} = R_{xz} = V_{xz} = z\ln x,$$

$$Q_{yz} = R_{yz} = V_{yz} = y^2 z^3,$$

$$P_x = V_x = x^2,$$

$$Q_y = V_y = y^3,$$

$$R_z = V_z = e^z.$$

Вычисление по формуле (7) является еще более компактным.

Список литературы

1. *Талипов И.Ф., Репьях Н.А.* Исследование движения твердого тела в поле приливных сил гравитации // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. № 3(26). С. 76–81.
2. *Попов И.П.* О мерах механического движения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. № 3(26). С. 13–15.
3. *Попов И.П.* Механические аналоги реактивной мощности // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2015. № 3(30). С. 37–39.
4. *Попов И.П.* О некоторых аспектах магнитоэлектрического взаимодействия // Вестник Челябинского государственного университета. Физика. 2009. Вып. 5. № 24(162). С. 34–39.
5. *Попов И.П.* Построение абстрактной модели силового поля типа электромагнитного. Ч. 1 // Наука. Инновации. Технологии. Научный журнал Северо-Кавказского федерального университета. 2015. № 2. С. 41–54.
6. *Попов И.П.* О некоторых операциях над векторами // Вестник Волгоградского государственного университета. Сер.1: Математика. Физика. 2014. № 5(24). С. 55–61.
7. *Попов И.П.* Поверхностные градиент, дивергенция и ротор // Вестник Псковского государственного университета. Естественные и физико-математические науки. 2014. Вып. 5. С. 159–172.
8. *Попов И.П.* Разновидности оператора набла // Вестник Амурского государственного университета. Естественные и экономические науки. 2015. Вып. 71. С. 20–32.
9. *Попов И.П.* Элементы поверхностного векторного анализа // Зауральский научный вестник. 2015. № 1(7). С. 77–84.
10. *Богданов Ю.С.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. Минск: изд-во БГУ. 1978.
11. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука. 1876. Т. 2.

Gradient integration in $\mathbb{R}^3$

I. P. Popov
Kurgan State University; 106-52, Tomina st., Kurgan, 640002, Russia
ip.popow@yandex.ru; 89091451174

A method is suggested for restoring a function from its gradient, based on the summation of indefinite integrals of partial derivatives of the function and elimination of superfluous terms.

Keywords: *gradient; function; partial derivative; integral; variable.*