ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Математика. Механика. Информатика
Вып. 2(33)

УДК 517.929

Достаточные условия существования решения краевой задачи для одного квазилинейного сингулярного дифференциального уравнения второго порядка*

В. П. Плаксина[1], И. М. Плаксина, Э. В. Плехова
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29
[1]vpplaksina@list.ru; 8(342)2391697
[2]impl@list.ru; 8(342)2391506
[3]elvira.plekhova@mail.ru; 8(342)2391697

Получены условия разрешимости двухточечной краевой задачи для квазилинейного сингулярного уравнения второго порядка. Результат базируется на свойствах оператора Грина соответствующей линейной задачи. В частности, доказана его ограниченность, получена оценка его нормы сверху. Условия существования решения исходной задачи получены из условий разрешимости вспомогательного операторного уравнения.

Ключевые слова: *сингулярное обыкновенное дифференциальное уравнение; краевая задача; оператор Грина; квазилинейное уравнение.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-38-43

Введение

В предлагаемой работе рассматривается полуоднородная двухточечная краевая задача для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x}(t)+\frac{m}{t^2(1-t)^2}x(t)=f\left(t,x(t),\dot{x}(t)\right),\ t\in[0,1],\quad (1)$$

$$x(0)=0,\ x(1)=0,\ \dot{x}(0)=0,\ \dot{x}(1)=0.\quad (2)$$

Здесь $m\in R$, функция $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, а именно: функция $f(\cdot,u,v)$ измерима при всех $u,v\in R$; функция $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывна при почти всех $t\in[0,1]$.

Уравнение (1) содержит несуммируемый на отрезке $[0,1]$ коэффициент $\frac{m}{t^2(1-t)^2}$ и является сингулярным по независимой переменной, причем сингулярность сосредоточена на концах отрезка $[0,1]$. Кроме того, формально задача является переопределенной.

Сингулярные по независимой переменной уравнения систематически изучались И.Т. Кигурадзе и его учениками. Обзор результатов и состояние проблем в этой области на период до 1987г. приведены в работе [1]. Отметим также работу [2], в которой изучены условия разрешимости уравнения второго порядка с краевыми условиями $x(0)=0$, $x(1)=0$. В основе исследования лежит техника дифференциальных неравенств, позволяющая допускать достаточно общие ограничения на сингулярный коэффициент.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект №14-01-00338.

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

В работах пермской школы используется подход, связанный с определением пространства решений, изоморфного прямому произведению $B \times R^n$, где B – банахово пространство. Такой подход позволяет изучать уравнения с сингулярностями специального вида. Так, в работе С.М. Лабовского [3], в частности, получены условия разрешимости уравнения $\pi(t)\ddot{x}(t) + (Tx)(t) = f(t)$ с условиями $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, суммируемой правой частью f и коэффициентом π вида $\pi(t) = t(1-t)$. В работе Е.И. Бравого [4] $\pi(\mathrm{t}) = \prod_{i=1}^{n}(t - a_i)$, где $a_i \in [0,1]$. В статье [5] в качестве $\pi(t)$ выступают функции t; $1-t$; $t(1-t)$, краевые условия имеют вид $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$; $x(1) = 0$, $x(1) = 0$; $x(0) = 0$, $x(1) = 0$ соответственно. В [6] получены условия разрешимости двухточечной задачи для уравнения

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{t}\dot{x}(t) - \frac{1}{t^2}x(t) = f(t).$$

Все перечисленные результаты подробно изложены в монографии [7, с. 151–182].

Там же получены условия разрешимости уравнения химического реактора $\ddot{x}(t) + \frac{k}{t}\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ и соответствующего линейного уравнения

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{t}\dot{x}(t) + (Tx)(t) = f(t).$$

В статье [8] получены условия разрешимости полуоднородной задачи Коши для уравнения $\ddot{x}(t) + \frac{m}{t^2}x(t) = f\left(t, x(t)\right)$.

Отметим также работу [9], в которой рассматривается уравнение с отклонением в сингулярном слагаемом. Предлагаемая работа является продолжением работ [8] и [9].

1. Предварительные обозначения

Всюду далее будем полагать, что $1 < p < \infty$ и $p' = \frac{p}{p-1}$.

Пусть $L^p[0,1] = L^p$ – пространство измеримых функций $z:[0,1] \to R$, удовлетворяющих условию

$$\|z\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |z(s)|^p\, ds\right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть, далее, $W_0^{2,p}[0,1] = W_0^{2,p}$ – пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x:[0,1] \to R$, имеющих принадлежащую пространству L^p вторую производную и удовлетворяющих условиям (2). Норму в пространстве $W_0^{2,p}$ определим равенством $\|x\|_{W_0^{2,p}} = \|\ddot{x}\|_{L^p}$.

Решением задачи (1)–(2) будем называть функцию $x \in W_0^{2,p}$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду на отрезке $[0,1]$.

Будем рассматривать случай $m \le -2$. Также определим константу $\gamma = \frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$. Тогда $m = \gamma - \gamma^2$ и $\gamma \ge 2$.

Определим оператор $\delta : W_0^{2,p} \to L^p$ равенством

$$(\delta x)(t) = \ddot{x}(t) + \frac{m}{t^2(1-t)^2}x(t),\ t \in [0,1].$$

Также определим на пространстве L^p линейный интегральный оператор Λ с ядром

$$\Lambda(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(1-s)t}{1-2\gamma}\left(\dfrac{1-t}{t}\dfrac{s}{1-s}\right)^{\gamma}, & \textit{если } 0 \le \mathrm{s} \le \mathrm{t} \le 1, \\ \dfrac{(1-t)s}{1-2\gamma}\left(\dfrac{t}{1-t}\dfrac{1-s}{s}\right)^{\gamma}, & \textit{если } 0 \le \mathrm{t} < \mathrm{s} \le 1. \end{cases}$$

2. Вспомогательные результаты

Теорема 1. Оператор Λ действует в пространство $W_0^{2,p}$.

Доказательство.

1. Покажем, что вторая производная функции $(\Lambda z)(t)$ суммируема со степенью p при любом $z \in L^p$.

Нетрудно видеть, что функция $\frac{d^2}{dt^2}(\Lambda z)(t)$ имеет вид $\frac{d^2}{dt^2}(\Lambda z)(t) =$

$$= z(t) + \frac{\gamma^2-\gamma}{1-2\gamma}\frac{1}{t^3}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma-2}\int_0^t\left(\frac{s}{1-s}\right)^{\gamma}(1-s)z(s)ds +$$

$$+\frac{\gamma^2-\gamma}{1-2\gamma}\frac{1}{(1-t)^3}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma-2}\int_t^1\left(\frac{1-s}{s}\right)^{\gamma} sz(s)ds.$$

Определим на пространстве L^p операторы A_1 и A_2 равенствами

$$(A_1z)(t) = \frac{1}{t^3}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma-2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\left(\frac{s}{1-s}\right)^{\gamma}(1-s)z(s)ds \text{ и } (A_2z)(t) = \frac{1}{(1-t)^3}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma-2}\int_t^1\left(\frac{1-s}{s}\right)^{\gamma} sz(s)ds \text{ соответственно.}$$

Также определим функции $A_1(t,s) =$

$$=\left(\frac{1-t}{t}\frac{s}{1-s}\right)^{\gamma-2}\frac{1}{t^3}\frac{s^2}{1-s}\theta(t-s) \text{ и } A_2(t,s) =$$

$$=\left(\frac{t}{1-t}\frac{1-s}{s}\right)^{\gamma-2}\frac{1}{(1-t)^3}\frac{(1-s)^2}{s}\theta(s-t).$$

Так как $\frac{1-t}{t}\frac{s}{1-s}\theta(t-s)\le 1$, то в силу условия $\gamma \ge 2$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{1-t}{t}\frac{s}{1-s}\right)^{\gamma-2}\theta(s-t)\le 1.$$

Аналогично $\left(\frac{t}{1-t}\frac{1-s}{s}\right)^{\gamma-2}\theta(t-s)\le 1$.

Поэтому $A_1(t,s)\le \hat{A}_1(t,s) = \frac{1}{t^2}\frac{s}{1-s}\theta(t-s)$,

$$A_2(t,s)\le \hat{A}_2(t,s) = \frac{1}{(1-t)^2}\frac{1-s}{s}\theta(s-t).$$

Покажем, что линейный интегральный оператор $\hat{A}_1$ с ядром $\hat{A}_1(t,s)$ является ограниченным оператором в пространстве L^p. Для доказательства применим тест Шура [10, с. 33], [11]. Согласно этому утверждению, существование неотрицательной функции u и положительной функции v таких, что для почти всех t и s выполняются неравенства

$$\left[\int_0^1 A(t,s)v(s)ds\right]^{p-1}\le \alpha u(t)$$

и

$$\int_0^1 A(t,s)u(t)dt \le \beta\left[v(s)\right]^{p-1},$$

гарантирует ограниченность линейного интегрального оператора A с положительным почти всюду ядром $A(t,s)$ и оценку нормы $\|A\|^p_{L^p\to L^p}\le \alpha\beta$.

Для оператора $\hat{A}_1$ функции u и v могут определяться равенствами

$$u(t) = \begin{cases} t^{-1/p'}, & \text{если } 0\le t\le \frac{1}{2},\\ (1-t)^{-1/p'}, & \text{если } \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}$$

$$v(s) = \begin{cases} s^{-1/p}, & \text{если } 0\le s\le \frac{1}{2},\\ (1-s)^{-1/p}, & \text{если } \frac{1}{2}\le s\le 1.\end{cases}$$

Можно показать, что $\|\hat{A}_1\|_{L^p\to L^p}\le 2p$. Поэтому $\| A_1 \|_{L^p\to L^p}\le \| \hat{A}_1 \|_{L^p\to L^p}\le 2p$.

Перейдем к переменным $\tau = 1-t$, $\zeta = 1-s$. Тогда функция $\hat{A}_2(t,s)$ примет вид $\hat{\hat{A}}_2(\tau,\zeta) = \frac{1}{\tau^2}\frac{\zeta}{1-\zeta}\theta(\tau-\zeta)$. Применим тест Шура и получим оценку $\left\|\hat{\hat{A}}_2\right\|_{L^p\to L^p}\le 2p$. Отсюда $\|A_2\|_{L^p\to L^p}\le\left\|\hat{A}_2\right\|_{L^p\to L^p} = \left\|\hat{\hat{A}}_2\right\|_{L^p\to L^p}\le$ $\le 2p$.

Итак, функция $\frac{d^2}{dt^2}(\Lambda z)(t)$ суммируема со степенью p при $z\in L^p$.

2. Покажем, что функция $(\Lambda z)(t)$ при любом $z\in L^p$ удовлетворяет условиям (2).

Функция $(\Lambda z)(t)$ имеет вид $(\Lambda z)(t) =$

$$=\frac{1}{1-2\gamma}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma} t\int_0^t\left(\frac{s}{1-s}\right)^{\gamma}(1-s)z(s)ds +$$

$$+\frac{1}{1-2\gamma}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma}(1-t)\int_t^1\left(\frac{1-s}{s}\right)^{\gamma} sz(s)ds.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left|(\Lambda z)(t)\right| \le \frac{1}{2\gamma-1}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma} t\int_0^t s^{\gamma}(1-s)^{1-\gamma}\left|z(s)\right|ds +$$

$$+\frac{1}{2\gamma-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma}(1-t)\int_t^1 (1-s)^{\gamma} s^{1-\gamma}\left|z(s)\right|ds .$$

Поэтому в силу неравенства Гельдера для трех функций [12, с. 18] справедлива оценка

$$\left|(\Lambda z)(t)\right| \le \frac{1}{2\gamma-1}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma} t\left(\int_0^t s^{2\gamma p'}ds\right)^{1/2p'} \cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^t (1-s)^{2(1-\gamma)p'}ds\right)^{1/2p'}\|z\| +$$

$$+\frac{1}{2\gamma-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma}(1-t)\left(\int_t^1 (1-s)^{2\gamma p'}ds\right)^{1/2p'} \cdot$$

$$\cdot\left(\int_t^1 s^{2(1-\gamma)p'}ds\right)^{1/2p'}\|z\| \le \frac{2t(1-t)}{2\gamma-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1-t}{2\gamma p'+1}\cdot\frac{t}{2(\gamma-1)p'+1}\right)^{1/2p'}\|z\| .$$

Отсюда $(\Lambda z)(0)=0$ и $(\Lambda z)(1)=0$.

Далее, функция $\dfrac{d}{dt}(\Lambda z)(t)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\Lambda z)(t) = \frac{1}{1-2\gamma}\,\frac{(1-\gamma)-t}{t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma-1} \cdot$$

$$\cdot\int_0^t \left(\frac{s}{1-s}\right)^{\gamma}(1-s)z(s)ds +$$

$$+\frac{1}{1-2\gamma}\,\frac{\gamma-t}{1-t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma-1}\int_t^1 \left(\frac{1-s}{s}\right)^{\gamma} sz(s)ds .$$

Нетрудно видеть, что

$$\left|\frac{d}{dt}(\Lambda z)(t)\right| \le \frac{1}{2\gamma-1}\,\frac{(\gamma-1)-t}{t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma-1} \cdot$$

$$\cdot\int_0^t s^{\gamma}(1-s)^{1-\gamma}\left|z(s)\right|ds +$$

$$+\frac{1}{2\gamma-1}\,\frac{\gamma-t}{1-t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma-1}\int_t^1 (1-s)^{\gamma} s^{1-\gamma}\left|z(s)\right|ds .$$

Поэтому в силу неравенства Гельдера для трех функций справедлива оценка

$$\left|\frac{d}{dt}(\Lambda z)(t)\right| \le \frac{1}{2\gamma-1}\,\frac{(\gamma-1)-t}{t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma-1} \cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^t s^{2\gamma p'}ds\right)^{1/2p'}\left(\int_0^t (1-s)^{2(1-\gamma)p'}ds\right)^{1/2p'}\|z\| +$$

$$+\frac{1}{2\gamma-1}\,\frac{\gamma-t}{1-t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma-1}\left(\int_t^1 (1-s)^{2\gamma p'}ds\right)^{1/2p'} \cdot$$

$$\cdot\left(\int_t^1 s^{2(1-\gamma)p'}ds\right)^{1/2p'}\|z\| \le$$

$$\le\left(\frac{1-t}{2\gamma p'+1}\cdot\frac{t}{2(\gamma-1)p'+1}\right)^{1/2p'}\|z\| .$$

Отсюда $\dfrac{d}{dt}(\Lambda z)(0)=0$ и $\dfrac{d}{dt}(\Lambda z)(1)=0$.

Замечание. Фактически доказанная теорема содержит утверждение о том, что для любого элемента $z \in L^p$ соответствующий элемент $x = \Lambda z$ принадлежит пространству $W_0^{2,p}$.

С л е д с т в и е. Оператор $\Lambda : L^p \to W_0^{2,p}$ ограничен, причем его норма не превышает величины $1+\dfrac{\gamma^2-\gamma}{2\gamma-1}4p$.

Доказательство следует из определения нормы в пространстве $W_0^{2,p}$ и представления функции $\dfrac{d^2}{dt^2}(\Lambda z)(t)$.

Теорема 2. Оператор Λ является обратным к оператору δ.

Доказательство

1. Найдем значение суперпозиции операторов δ и Λ:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Lambda z)(t) = z(t) + \frac{1}{1-2\gamma}\,\frac{\gamma^2-\gamma}{t^2(1-t)^2}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma} t \cdot$$

$$\cdot\int_0^t\left(\frac{s}{1-s}\right)^{\gamma}(1-s)z(s)ds + \frac{1}{1-2\gamma}\,\frac{\gamma^2-\gamma}{t^2(1-t)^2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma}\cdot$$

$\cdot(1-t)\displaystyle\int_t^1\left(\frac{1-s}{s}\right)^{\gamma} sz(s)ds$. Так как $m=\gamma-\gamma^2$, то $\delta\Lambda z = z$.

2. Найдем суперпозицию операторов Λ и δ:

$$(\Lambda\delta x)(t) = \frac{1}{1-2\gamma}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma} t\int_0^t \left(\frac{s}{1-s}\right)^{\gamma}(1-s)\ddot{x}(s)ds +$$

$$+\frac{1}{1-2\gamma}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\gamma} t\int_0^t \frac{\gamma-\gamma^2}{s^2(1-s)}\left(\frac{s}{1-s}\right)^{\gamma} x(s)ds +$$

$$+\frac{1}{1-2\gamma}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma}(1-t)\int_0^t \left(\frac{1-s}{s}\right)^{\gamma} s\ddot{x}(s)ds +$$

$$+\frac{1}{1-2\gamma}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\gamma}(1-t)\int_t^1 \frac{\gamma-\gamma^2}{s(1-s)^2}\left(\frac{1-s}{s}\right)^{\gamma} x(s)ds$$

Интегрируя дважды по частям слагаемые, содержащие $\ddot{x}$, получим равенство $\Lambda\delta x = x$.

3. Достаточные условия разрешимости краевой задачи (1)–(2)

Теорема 3. Пусть $m \le -2$ и справедливы следующие условия:

а) для почти всех $t \in [0,1]$ и любых $u, v \in R$ выполняется неравенство $|f(t,u,v)| < a(t) + b_1|u| + b_2|v|$, где функция $a(\cdot)$ суммируема со степенью p, b_1 и b_2 – неотрицательные константы;

б) $\left(1 - \frac{4pm}{\sqrt{1-4m}}\right)\left(\frac{b_1}{p^{1/p}} + \frac{b_2}{p^{2/p}}\right) < 1$.

Тогда задача (1)–(2) имеет хотя бы одно решение в пространстве $W_0^{2,p}$.

Доказательство

Нелинейный оператор $F : W_0^{2,p} \to L^p$, определенный равенством

$$(Fx)(t) = f\left(t, x(t), x'(t)\right),$$

представим в виде суперпозиции $F = N\left[J, D\right]$. Здесь оператор Немыцкого $N : L^p \times L^p \to L^p$, оператор вложения $J : W_0^{2,p} \to L^p$ и оператор дифференцирования $D : W_0^{2,p} \to L^p$ определены равенствами $N\left(z_1, z_2\right) = f\left(t, z_1(t), z_2(t)\right)$, $Jx = x$ и $Dx = \dot{x}$.

В условиях теоремы для оператора Немыцкого N справедлива оценка

$$\left\|N\left(z_1, z_2\right)\right\| \le \|a\|_{L^p} + b_1\|z_1\|_{L^p} + b_2\|z_2\|_{L^p}.$$

Операторы J и D обладают свойством полной непрерывности. Кроме того, для произвольного $x \in W_0^{2,p}$ справедливы оценки

$$\|Dx\|_{L^p} \le \frac{1}{p^{1/p}}\|\ddot{x}\|_{L^p}, \quad \|Jx\|_{L^p} \le \frac{1}{p^{2/p}}\|\ddot{x}\|_{L^p}.$$

С учетом сказанного ранее можно утверждать, что оператор F как суперпозиция вполне непрерывного оператора $[J, D] : W_0^{2,p} \to L^p \times L^p$ и ограниченного оператора $N : L^p \times L^p \to L^p$ обладает свойством полной непрерывности. Кроме того, для произвольного $x \in W_0^{2,p}$ справедлива оценка

$$\|Fx\|_{L^p} \le \|a\|_{L^p} + b_F\|x\|_{W_0^{2,p}},$$

где $b_F = \frac{b_1}{p^{1/p}} + \frac{b_2}{p^{2/p}}$.

В силу неравенства $m \le -2$ существует ограниченный оператор Λ, обратный к оператору $\delta : W_0^{2,p} \to L^p$. Поэтому разрешимость задачи (1)–(2) эквивалентна существованию решения операторного уравнения $x = \Lambda Fx$ с вполне непрерывным оператором ΛF. Неравенство б) гарантирует оценку $\|\Lambda Fx\|_{W_0^{2,p}} \le a + b\|x\|_{W_0^{2,p}}$ с константой

$$b = \|\Lambda\| b_F < 1.$$

Это в свою очередь гарантирует существование замкнутого шара $\overline{B}(0, r)$, для которого выполнены условия теоремы Шаудера. Применение теоремы Шаудера завершает доказательство.

Список литературы

1. *Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Д.* Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики: Новые достижения. 1987. Т. 30. С. 105–201.
2. *Kiguradze I.T., Lomtatidze A.G.* On Certain Boundary Value Problems for Second-Order Linear Ordinary Differential Equations with Singularities // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1984. № 101. P. 325–347.
3. *Лабовский С.М.* О положительных решениях двухточечной краевой задачи для линейного сингулярного функционально-дифферен-циального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1988. № 10. Т. 24. С. 1695–1704.

4. *Бравый Е.И.* О регуляризации сингулярного линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1994. № 1. Т.30. С. 26–34.
5. *Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И.* О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 3–11.
6. *Алвеш М.Ж.* Об одной нелинейной краевой задаче с несуммируемой особенностью // Известия вузов. Математика. 2000. № 4. С.56–59.
7. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.
8. *Абдуллаев А. Р., Конопацкая Е.В., Плехова Э.В.* О дифференциальном операторе второго порядка с сингулярным потенциалом // Научно-технический вестник Поволжья. 2014. № 6. С. 14–18.
9. *Плаксина В.П., Плаксина И.М., Плехова Э.В.* О разрешимости задачи Коши для квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения // Известия вузов. Математика. 2016. №2. С. 54–61.
10. *Халмош П., Сандер В..* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985. 159 с.
11. *Абдуллаев А.Р., Плаксина И.М.* Об оценке спектрального радиуса одного сингулярного интегрального оператора // Известия вузов. Математика. 2015. № 2. С. 3–9.
12. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996. 480 с.

Sufficient solvability conditions for the boundary value problem for a second order quasilinear singular differential equation

V. P. Plaksina[1], **I. M. Plaksina**[2], **E. V. Plekhova**[3]
Perm National Research Polytechnical University; 29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia
[1]vpplaksina@list.ru; 8(342)2391697
[2]impl@list.ru; 8(342)2391506
[3]elvira.plekhova@mail.ru; 8(342)2391697

Solvability conditions are obtained for a two-point boundary value problem for a second order quasilinear singular equation. The result is based on the properties of Green's operator of the corresponding semi-homogeneous linear problem. Its boundedness is proved, the upper estimate of its norm is obtained. Solvability conditions for the initial task are obtained from solvability conditions for an equivalent operator equation.

Keywords: *singular ordinary differential equation; boundary value problem; Green's operator; quasilinear equation.*