УДК 530.1, 536 .75

Уравнения дробного порядка для диффузии и релаксации в фрактальных средах*

В. С. Кирчанов
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 6140990, Комсомольский пр., 29
Kirchanovvs@pstu.ru; 89091048466

Получено решение дробного уравнения, описывающего аномальную релаксацию и диффузию в изотропном фрактальном пространстве, в виде произведения функции Фокса на функцию Миттаг-Леффлера, обобщающее результат, полученный в работе [7] и более простое, чем в работе [6]. Использовалась дробная производная Римана–Лиувилля с ($0<\alpha \le 1$). В квантовом случае получено решение обобщенного дробного квантовостатистического уравнения Неймана–Колмогорова для неполного статистического оператора, описывающего случайные блуждания квантовой спиновой частицы по фрактальному пространству и задерживающейся в ловушках. Решение содержит квантовые миттаг-леффлеровские (негармонические) дробные осцилляции, аномальную релаксацию, шумовые дробные осцилляции и экспоненциальное дробное диффузионное затухание.

Ключевые слова: *фрактальное пространство; дробные производные; аномальные диффузия и релаксация.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-30-37

Введение

Целью работы являются два примера на применение дробного исчисления. Это простой модельный пример решения дробного уравнения, описывающего аномальную релаксацию и диффузию во фрактальных[1–5] пространствах и времени, который ранее рассматривался, например, в работах [6, 7].

Вторым примером является квантовый случай, где мы рассматриваем решение обобщенного квантовостатистического уравнения Неймана–Колмогорова для статистического оператора, ранее полученного методом случайных траекторий [8, 9], для фрактальных пространства и времени.

В обоих случаях для контраста сначала рассматриваем уравнение и его решение в целочисленном дифференциальном исчислении и затем его обобщение в дробном исчислении.

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

1. Диффузия и релаксация в классической системе

Рассмотрим классическую задачу Коши для функции $f(x,t)$ где переменными являются координаты $x = (x_1, x_2, x_3)$ и время t ($0<t\le T$)

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = G\nabla^2 f(x,t) - \frac{1}{\tau} f(x,t), \quad (1.1)$$

где G – коэффициент диффузии, $\nabla^2 \equiv \Delta$ – оператор Лапласа, τ – время релаксации.

Это уравнение описывает трехмерный нестационарный массообменный процесс при постоянном коэффициенте диффузии. Его фундаментальное решение в трехмерном случае хорошо известно [10]:

$$f(x,t) = 8^{-1}(\pi G t)^{-\frac{3}{2}} exp\left\{-\frac{x^2}{4Gt} - \frac{t}{\tau}\right\}. \quad (1.2)$$

Обобщение уравнения (1.1), описывающее стохастический перенос во фрактальных пространстве и времени, имеет вид [6]

$$D_t^{\alpha} f(x,t) = G\nabla^{2\beta} f(x,t) - \frac{1}{\tau^{\alpha}} f(x,t),$$
$$(0< \alpha \le 1), (0< 2\beta \le 1) \quad (1.3)$$

с начальным условием $f(x,t=0)=f_0(x)$.

Здесь приводится регуляризованная дробная производная Римана–Лиувилля по времени t [7]

$$D_t^\alpha f(x,t) \equiv D_{0+}^\alpha f(x,t) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{f_0(x)}{t^\alpha} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t f(x,\theta)(t-\theta)^{-\alpha}d\theta \qquad (1.4)$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{f_0(x)}{t^\alpha}$$

где $\Gamma(1\text{-}\alpha)$ – гамма функция.

Будем искать фундаментальное решение уравнения (1.3). Применим к нему прямое комплексное преобразование Фурье по координате x:

$$F_x\left[f(t)\right] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-ikx}dx \equiv F(k,t),$$

$$k = (k_1,k_2,k_3), \qquad (1.5)$$

$$F_x\left[D_{0+}^\alpha f(x,t)\right] = D_{0+}^\alpha F(k,t),$$

$$\left[\nabla^{2\beta} f(x,t)\right] = (-ik)^{2\beta}F(k,t)], \qquad (1.6)$$

где $$(-ik)^{2\beta} = |k|^{2\beta}\,exp(-i\pi\beta\ sign\ k). \qquad (1.7)$$

Радиальная часть дробного лапласиана может быть представлена виде [1]

$$\nabla^{2\beta} = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial^\beta}{\partial r^\beta}\left(r^{n-1}\frac{\partial^\beta}{\partial r^\beta}\right), \qquad (1.8)$$

где радиальная производная является дробной производной Римана–Лиувиллля по радиальной переменной:

$$\frac{\partial^\beta}{\partial r^\beta}f(r,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^r f(r',t)(r-r')^{-\beta}dr',$$

$$(0 \le \mathrm{r}),\quad (0< \beta \le 1), \qquad (1.9)$$

что соответствует случаю диффузии в изотропной фрактальной среде.

Подставляя (6–9) в (3) получаем уравнение для Фурье трансформы:

$$D_t^\alpha F(k,t) = -\frac{1}{T^\alpha(k)}F(k,t), \qquad (1.10)$$

с начальным условием $F(k,0)=F_0(k)$.

Здесь

$$-\frac{1}{T^\alpha(k)} = G(-ik)^{2\beta} - \frac{1}{\tau^\alpha}. \qquad (1.11)$$

Решение уравнения (1.10) – это функция Миттаг-Леффлера (см. приложение, формулу (П1))

$$F(k,t) = F_0(k)E_{\alpha,1}\left(-\frac{t^\alpha}{T^\alpha}\right) =$$

$$F_0(k)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[G(-ik)^{2\beta}-\tau^{-\alpha}\right]^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)} \qquad (1.12)$$

Применяя обратное Фурье преобразование, получаем

$$f(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}F(k,t)dk =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} dke^{ikx}F_0(k)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[G(-ik)^{2\beta}-\tau^{-\alpha}\right]^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)} \qquad (1.13)$$

Рассмотрим частные случаи формулы (1.13).

а) Если коэффициент диффузии $G = 0$, возникает чистая аномальная релаксация, описываемая уравнением

$$D_t^\alpha f(x,t) = -\frac{1}{\tau^\alpha}f(x,t) \qquad (1.14)$$

с начальным условием $f(x,t=0)=f_0(x)$.

Решением уравнения (1.14) является функция Миттаг-Леффлера, которая играет роль экспоненциальной функции в дробном исчислении

$$f(x,t) = f_0(x)E_{\alpha,1}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\right) =$$

$$f_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha n+1)}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\right)^n \qquad (1.15)$$

Решение проверяется прямой подстановкой выражения (1.15) в уравнение (1.14) и использованием формулы дробного дифференцирования степенной функции с произвольным показателем (см. П5).

Функцию Миттаг-Леффлера также можно выразить через функцию Фокса [11], представляемую в виде интеграла Меллина–Бернса (см. П7–8)

$$f(x,t) = f_0(x)H_{1,2}^{1,1}\left[\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\Big|\begin{matrix}(0,1)\\(0,1),(0,\alpha)\end{matrix}\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)}z^{-s}ds \qquad (1.16)$$

где $z=\left(t\tau^{-1}\right)^\alpha$.

Пример 1

Если $\alpha = 1$, то $f(x,t) = f_0(x)e^{-\frac{t}{\tau}}$ – экспоненциальная релаксация,

если $\alpha = \dfrac{1}{2}$, то

$$f(x,t) = f_0(x)(2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{t}{\tau}} Erfc\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2},$$

(см. П. 4).

б) Если $\tau^{-\alpha} = 0$, то получаем из (1.3) уравнение для аномальной диффузии:

$$D_t^{\alpha} f(x,t) = G\nabla^{2\beta} f(x,t). \qquad (1.17)$$

В работе [6] к этому уравнению после преобразования Фурье по координатам применяют преобразование Лапласа по времени. Мы будем следовать подходу, развитому в работе [7]. Перепишем трансформу Фурье (12) для модуля $|k|$.

$$F(|k|,t) = F_0(|k|)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[t^{\alpha}G|k|^{2\beta}\right]^n}{\Gamma(\alpha n+1)} = F_0(|k|)H_{1,2}^{1,1}\left[t^{\alpha}G|k|^{2\beta} \mid {}^{(0,1)}_{(0,1),\,(0,\alpha)}\right] \qquad (1.18)$$

и применим n-мерное обратное Фурье преобразование для радиальной функции (формулу Бохнера) (см. П. 6):

$$f(|x|,t) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(2\pi)^n |x|^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^{\infty}\rho^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho|x|)\times H_{1,2}^{1,1}\left[Gt^{\alpha}|\rho|^{2\beta} \mid {}^{(0,1)}_{(0,1),\,(0,\alpha)}\right]d\rho. \qquad (1.19)$$

После применения формулы интегрирования (П.9), выражение становится следующим:

$$f(|x|,t) = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{n/2}|x|^{\frac{n-2}{2}}|x|^{\frac{n+2}{2}}}\times H_{3,2}^{1,2}\left[Gt^{\alpha}\left(\frac{2}{|x|}\right)^{2\beta} \mid {}^{\left(\frac{2-n}{2},\beta\right)\,(0,1)\,(0,1)}_{(0,1),\,(0,\alpha),}\right] \qquad (1.20)$$

Применяя формулу симметрии (П. 10) получаем выражение

$$f(|x|,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}|x|^n} H_{2,3}^{2,1}\left[\frac{|x|^{2\beta}}{2^{2\beta}t^{\alpha}G} \mid {}^{(1,1)\,(1,\alpha)}_{\left(\frac{n}{2},\beta\right),\,(1,1),\,(1,1)}\right] \qquad (1.21)$$

Используя формулу понижения порядка для функции Фокса (П. 11) приходим к окончательному результату:

$$f(|x|,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}|x|^n} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^{2\beta}}{2^{2\beta}t^{\alpha}G} \mid {}^{(1,\alpha)}_{\left(\frac{n}{2},\beta\right),\,(1,1)}\right]. \qquad (1.22)$$

Решение (1.22) может быть выражено через интеграл Меллина–Бернса в виде

$$f(|x|,t) = \frac{(2\pi i)^{-1}}{\pi^{\frac{n}{2}}|x|^n}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\beta s\right)\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+\alpha s)} z^{-s} ds. \qquad (1.23)$$

При $\beta = 1$ решение (1.22) уравнения (1.17) переходит в формулу, полученную в работе [7].

В случае $F_0(k) = 1$, т.е. $f_0(x) = \delta(x)$ можно предложить приближенное решение уравнения (1.3) в виде

$$f(|x|,t) \cong \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}|x|^n} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x^{2\beta}|}{2^{2\beta}t^{\alpha}G} \mid {}^{(1,\alpha)}_{\left(\frac{n}{2},\beta\right),\,(1,1)}\right]\times E_{\alpha,1}\left(-\frac{t^{\alpha}}{\tau^{\alpha}}\right) \qquad (1.24)$$

Оценки при $n = 1$, $\alpha = \beta$, приводят к формуле [6].

$$f(|x|,t) \approx \frac{1}{Gt^{1/2}} exp\left\{-\frac{|x|^{2\alpha}}{2^{2\alpha}t^{\alpha}G} - \frac{t^{\alpha}}{\tau^{\alpha}}\right\}. \qquad (1.25)$$

2. Диффузия и релаксация в квантовой системе

Ранее в теории магнитной релаксации методом случайных траекторий для спиновой подсистемы отделенной от решетки было получено точное уравнение для неполного среднего матрицы плотности $<\rho>$ [8]

$$\frac{\partial <\rho>(x,t)}{\partial t} = \left(-i\hat{L}(x,\hat{s}) + L_x(x,t)\right) <\rho>(x,t) \qquad (2.1)$$

где $\hat{L}(x,\hat{s})... = \hbar^{-1}\left[\hat{H}(x,\hat{s}),...\right]$ – оператор Лиувилля, $\hat{s}$ – спиновая переменная, x – классическая переменная, L_x – оператор уравнения Фоккера–Планка (Колмогорова) $i = \sqrt{-1}$.

В простейшем одномерном случае это уравнение принимает вид [9]

$$\frac{\partial < \rho > (x,t)}{\partial t} = -i\hat{L}(x,\hat{s}) < \rho > (x,t) + \left(-\frac{1}{\tau} + G\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) < \rho > (x,t) \quad (2.2)$$

Используя подстановку

$$< \rho > (x,t) = exp\left(-i\hat{L}(x,\hat{s})t\right)\rho^*(t) \quad (2.3)$$

получаем решение уравнения (2.2) в следующем виде:

$$< \rho > (x,t) = \exp\left\{-i\hat{L}(x,\hat{s})t - \frac{t}{\tau}\right\} \times \exp\left\{-i\frac{t^2}{2}G\frac{\partial\hat{L}(x,\hat{s})}{\partial x^2}\right\} \times \exp\left\{-\frac{t^3}{3}G\left(\frac{\partial\hat{L}(x,\hat{s})}{\partial x}\right)^2\right\}\rho^*(0) \quad . (2.4)$$

Здесь первый сомножитель – затухающие резонансные осцилляции, второй сомножитель – шумовые осцилляции, третий сомножитель – диффузионное затухание, содержащее квадрат оператора Лиувилля. Подробности в работе [9]. Наличие осцилляционного члена в уравнении (2.1) отличает диффузию в квантовом случае от классического случая (1.1).

Для квантовой спиновой частицы, совершающей случайные блуждания по фрактальному пространству и задерживающейся в ловушках, можно предложить уравнение, обобщающее (2.1).

$$D_t^\alpha \rho(x,t) = \left(-i\hat{L}(x,\hat{s}) - \frac{1}{\tau^\alpha} + G\frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}}\right)\rho(x,t),$$

$$(0< \alpha \le 1), (0< 2\beta \le 1). \quad (2.5)$$

Рассмотрим частные случаи уравнения (2.5).

а) Пусть G = 0, тогда уравнение (2.2) становится следующим:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\rho(x,t) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{t^\alpha}\rho(x,t) = -iL(x,s)\rho(x,t) - \frac{1}{\tau^\alpha}\rho(x,t) \quad . (2.6)$$

Его решением согласно (1.15) является функция Миттаг-Леффлера

$$\rho(x,t) = E_{\alpha,1}\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha - \frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\right]\rho(x,0). \quad (2.7)$$

Решение проверяется путем прямого почленного дробного дифференцирования степенной функции с произвольным показателем (см. П.5). Для вычисления матричных элементов полезна формула

$$E_{\alpha,1}\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right]\rho(x,0) = E_{\alpha,1}\left[-i\hbar^{-1}\hat{H}(x,\hat{s})t^\alpha\right] \times \rho(x,0)E_{\alpha,1}\left[+i\hbar^{-1}\hat{H}(x,\hat{s})t^\alpha\right] \quad (2.8)$$

Приближенное решение уравнения (2.5) можно принять в следующем виде

$$\rho(x,t) \cong E_{\alpha,1}\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right]E_{\alpha,1}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau^\alpha}\right)\rho(x,0). \quad (2.9)$$

Первый сомножитель дает квантовые негармонические осцилляции, которые мы назовем *миттаг-леффлеровские* осцилляции, второй – аномальную релаксацию.

б). Если положить $\tau^{-\alpha} = 0$, то получается следующее уравнение:

$$D_t^\alpha \rho(x,t) = -i\hat{L}(x,\hat{s})\rho(x,t) + G\frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}}\rho(x,t). \quad (2.10)$$

Применим подстановку

$$\rho(x,t) = E_{\alpha,1}\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right]\ \rho^*(t), \quad (2.11)$$

тогда для вычисления дробной производной от статистического оператора будем использовать обобщенную формулу Лейбница для дробного дифференцирования произведения двух функций с остаточным членом (П.13) с n=2.

$$D_t^\alpha \rho(x,t) = D_t^\alpha\left[E_{\alpha,1}\left(-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right)\rho^*(t)\right] \equiv D_+^\alpha(u \cdot v), \quad (2.12)$$

где

$$D_+^\alpha(u \cdot v) = D_t^\alpha\left[E_{\alpha,1}\left(-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right)\right] \cdot \rho^*(t) + \alpha D_t^{\alpha-1}\left[E_{\alpha,1}\left(-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right)\right] \cdot \frac{\partial\rho^*(t)}{\partial t} + R_2 \quad . (2.13)$$

Поскольку функция Миттаг-Леффлера является решением уравнения (1.14), то справедливо выражение

$$D_t^\alpha E_{\alpha,1}\left(-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right) = -i\hat{L}(x,\hat{s})E_{\alpha,1}\left(-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right). \quad (2.14)$$

Остаточный член согласно формуле (П.13) принимает вид

$$R_2 = R_1 - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{E_{\alpha,1}\left(-i\hat{L}(x,\hat{s})\theta^\alpha\right)}{(t-\theta)^\alpha} \frac{\partial \rho^*(\theta)}{\partial \theta} d\theta, \tag{2.15}$$

$$R_1 = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{E_{\alpha,1}\left(-i\hat{L}(x,\hat{s})\theta^\alpha\right)}{(t-\theta)^{\alpha+1}} \left[\rho^*(t) - \rho^*(\theta)\right] d\theta. \tag{2.16}$$

Оценки остаточных членов R_1 и R_2 требуют отдельного рассмотрения.

Для вычисления дробной второй производной по координате используем формулу почленного дробного дифференцирования (П.12):

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \rho(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \left[-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right]^k. \tag{2.17}$$

Предположим степенную зависимость оператора Лиувилля от координаты

$$\hat{L}(x,\hat{s}) = bx^n \cdot \hat{L}(\hat{s}), \tag{18}$$

где n =1, 2,…, b – постоянная.

Тогда, используя повторно формулу почленного дифференцирования и формулу (П.5) для дробного дифференцирования по координате x, получаем

$$\frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} E_{\alpha,1}\left(-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[-\hat{L}(\hat{s})t^\alpha bx^n\right]^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \times \frac{\Gamma(1+nk)}{\Gamma(1+nk-2\beta)} \frac{1}{x^{2\beta}} \tag{2.19}$$

Подставляя выражения (2.13–15), (2.19) в (2.10) и опуская R₂, получаем уравнение для $\rho^*(t)$:

$$\alpha D_{0+}^{\alpha-1} E_{\alpha,1}\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right] \cdot \frac{\partial \rho^*(t)}{\partial t} = G \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} E_{\alpha,1}\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right] \cdot \rho^*(t) \tag{2.20}$$

Вычислим первый сомножитель в (2.20), используя формулы (П.12) и (П.5)

$$D_{0+}^{\alpha-1} E_{\alpha,1}\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right] = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} D_{0+}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right]^k}{\Gamma(\alpha k+1)} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})\right]^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^t \theta^{\alpha k} d\theta \right) = . \tag{2.21}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})\right]^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{t^{\alpha k+1}}{\alpha k+1} \right) =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})t^\alpha\right]^k}{\Gamma(\alpha k+2-\alpha)} t^{1-\alpha}$$

Решение уравнения (2.21) относительно

$$\rho^*(t) = \exp\left\{ \frac{G}{\alpha} \int_0^t \frac{\frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} E_{\alpha,1}\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})\theta^\alpha\right]}{D_{0+}^{\alpha-1} E_{\alpha,1}\left[-i\hat{L}(x,\hat{s})\theta^\alpha\right]} d\theta \right\} \rho_0^*. \tag{2.22}$$

Если обозначим

$$z = -i\hat{L}(\hat{s})bx^n\theta^\alpha, \quad b_k = \frac{\Gamma(1+nk)}{\Gamma(1+nk-2\beta)},$$

$$a_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha k+2-\alpha)} \tag{2.23}$$

и подставим (2.19) и (2.21) в (2.22), то получим показатель экспоненты в виде отношения двух рядов

$$\rho^*(t) = \exp\left\{ \frac{G}{\alpha x^{2\beta}} \int_0^t \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \theta^{1-\alpha}} d\theta \right\} \rho_0^*. \tag{2.24}$$

Применим формулу деления рядов (П.15), получим выражение для $\rho^*(t)$ в виде

$$\rho^*(t) = \exp\left\{ \frac{G\Gamma(2-\alpha)}{\alpha x^{2\beta}} \times \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \left[-i\hat{L}(\hat{s})bx^n\right]^k \int_0^t \frac{\theta^{\alpha k}}{\theta^{1-\alpha}} d\theta \right\} \rho_0^* \tag{2.25}$$

После интеграции по времени получаем выражение для решения уравнения (2.20) в виде

$$\rho^*(t) = \exp\left\{\frac{Gt^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}{\alpha^2 x^{2\beta}}\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\left[-i\hat{L}(\hat{s})bx^n t^{\alpha}\right]^k}{k+1}\right\}\rho_0^* . \tag{2.26}$$

Подставляя (2.26) в (2.11), и удерживая первые три члена в сумме, получаем окончательно следующее приближенное решение обобщенного уравнения (2.5):

$$\rho(x,t) \cong E_{\alpha,1}\left[-it^{\alpha}\hat{L}(\hat{s})bx^n\right]\times E_{\alpha,1}\left(-\frac{t^{\alpha}}{\tau^{\alpha}}\right)\exp\left\{\frac{t^{\alpha}G\Gamma(2-\alpha)}{\alpha^2\Gamma(1-2\beta)}\right\}\times \exp\left\{-\frac{it^{2\alpha}\hat{L}(\hat{s})bx^n G\Gamma(2-\alpha)}{2\alpha^2 x^{2\beta}}c_1\right\}\times \exp\left\{-\frac{t^{3\alpha}\hat{L}^2(\hat{s})b^2x^{2n}G\Gamma(2-\alpha)}{3\alpha^2 x^{2\beta}}c_2\right\}...\rho^*(0).$$

$$(0<\alpha\le 1),\quad (0<2\beta\le 1). \tag{2.27}$$

Коэффициенты c_0, c_1, c_2 принимают вид

$$c_0 = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)},$$

$$c_1 = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-2\beta)} - \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2)\Gamma(1-2\beta)},$$

$$c_2 = \frac{\Gamma(1+2n)}{\Gamma(1+2n-\beta)} - \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2)}c_1 - \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)}c_0 .$$

Если теперь сравнить решение (2.27) квантового дробного уравнения (2.5) с решением (2.4) квантового целочисленного уравнения (2.2), то видно, что первый сомножитель соответствует квантовым негармоническим (миттаг-леффлеровским) осцилляциям, второй сомножитель – аномальной релаксации, третий сомножитель – экспоненциально возрастает, четвертый – содержит шумовые осцилляции, пятый сомножитель – это диффузионное затухание, содержащее квадрат оператора Лиувилля. Остальные члены в решении (2.27) требуют отдельного рассмотрения.

Заключение

Следует сказать, что из-за недостатка места не изучено асимптотическое поведение полученных результатов. Тем не менее, полученные результаты достаточно интересны: в классическом случае получена формула (1.24) для аномальной диффузии и релаксации, обобщающая результат работы [7], и более простая, чем в работе [6]. В квантовом случае получен новый результат (2.27) при решении обобщенного квантовостатистического уравнения Неймана–Колмогорова для неполного релевантного статистического оператора, содержащий негармонические осцилляции, аномальную релаксацию и аномальное диффузионное затухание.

Для удобства применения составлено математическое приложение, см. также приложение в обзоре [2].

Приложение

1.Функция Миттаг-Леффлера [11] с. 221:

$$E_{\alpha}(z) \equiv E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} . \tag{П.1}$$

2.Функция типа Миттаг-Леффлера [11] с. 224, [13], с. 117:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} . \tag{П.2}$$

В книге [13] и справочнике [12] другое обозначение индексов.

3. $$E_{\alpha,\alpha}(\lambda z^{\alpha}) = \lambda^{-1}z^{1-\alpha}\frac{d}{dz}E_{\alpha,1}(\lambda z^{\alpha}) \tag{П.3}$$

(λ – постоянная), формула проверяется почленным дифференцированием рядов.

4. $$E_{\frac{1}{2},1}\left(z^{1/2}\right) = (2\pi)^{-1/2}e^{-z}Erfc\left(-z^{1/2}\right), \tag{П.4}$$

где $$Erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} exp\left(-z^2\right)dz .$$

5. Дробная производная Римана–Лиувилля степенной функции с произвольным показателем [4], с. 140, ф. 1:

$$D_{0+}^{\alpha}\left(t^{\mu}\right) \equiv \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\left(t^{\mu}\right) = \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\mu-\alpha)}t^{\mu-\alpha} \tag{П.5}$$

6. Формула Бохнера для радиальной функции (зависящей от $|x| = r$) [4] с. 358:

$$f(|x|,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}F(|k|,t)dk = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n |x|^{\frac{n-2}{n}}}\int_0^{\infty}F(\rho,t)\rho^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(\rho|x|)d\rho \tag{П.6}$$

7. Функция Фокса – интеграл Меллина–Бернса [12] с. 626:

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z|\begin{matrix}(\mathrm{a}_1,A_1),\dots(\mathrm{a}_p,A_p)\\(b_1,B_1),\dots(b_q,B_q)\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+B_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-A_js)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+A_js)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-B_js)}z^{-s}ds \qquad (\text{П}.7)$$

8. Выражение функции типа Миттаг-Леффлера через функцию Фокса [12] с. 728:

$$E_{\alpha,\beta}(-z)=H_{1,2}^{1,1}\left[z\,|\begin{matrix}(0,1)\\(0,1),(1-\beta,\alpha)\end{matrix}\right]. \qquad (\text{П}.8)$$

9. Формула для интегрирования функции Фокса и специальной функции [12] с. 355:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}J_\nu(\sigma x)H_{p,q}^{m,n}\left[\omega x^r|\begin{matrix}[\mathrm{a}_p,A_p]\\[b_q,B_q]\end{matrix}\right]=\frac{2^{\alpha-1}}{\sigma^\alpha}H_{p+2,q}^{m,n+1}$$

$$\left[\omega\left(\frac{2}{\sigma}\right)^r|\begin{matrix}\left(1-\frac{\alpha+\nu}{2},\frac{r}{2}\right),[\mathrm{a}_p,A_p],\left(1-\frac{\alpha-\nu}{2},\frac{r}{2}\right)\\[b_q,B_q]\end{matrix}\right] \qquad (\text{П}.9)$$

10. Формула симметрии функции Фокса [12] с. 628:

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\,|\begin{matrix}[\mathrm{a}_p,A_p]\\[b_q,B_q]\end{matrix}\right]=H_{q,p}^{n,m}\left[\frac{1}{z}\,|\begin{matrix}[1-\mathrm{b}_q,B_q]\\[1-a_p,A_p]\end{matrix}\right]. \qquad (\text{П}.10)$$

11. Формула понижения порядка функции Фокса [12] с. 628:

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z|\begin{matrix}(a_1,A_1),\dots(a_p,A_p)\\[b_{q-1},B_{q-1}],(a_1,A_1)\end{matrix}\right]=$$

$$H_{p-1,q-1}^{m,n-1}\left[\mathrm{z}|\begin{matrix}(a_2,A_2),\dots(a_p,A_p)\\[b_{q-1},B_{q-1}]\end{matrix}\right] \qquad (\text{П}.11)$$

12. Формула для почленного дробного дифференцирования ряда [4] с. 215:

$$\left(D_{a+}^\alpha\sum_{n=0}^\infty f_n\right)(x)=_n\left(\sum_{n=0}^\infty D_{a+}^\alpha f_n\right)(x). \qquad (\text{П}.12)$$

13. Обобщенное правило Лейбница для дробного дифференцирования двух функций с остаточным членом [4] § 17:

$$D_+^\alpha(u,v)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}D_+^{\alpha-k}(u)\cdot v^{(k)}+R_n, \qquad (\text{П}.13)$$

где

$$R_n=\frac{(-1)^n}{\Gamma(-\alpha)\cdot(n-1)!}\int_0^t(t-T)^{-\alpha-1}u(T)\,dT\dots$$

$$\dots\int_T^t(t-\xi)^{n-1}v^{(n)}(\xi)d\xi.$$

$\binom{\alpha}{k}=\frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}$ – биномиальный коэффициент.

14. Для дробного дифференцирования сложной функции $f(g(x))$ можно предложить формулу

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}f(g(x))=\frac{\partial^\beta}{\partial g^\beta}\frac{\partial g^\beta}{\partial x^\beta}, \qquad (\text{П}.14)$$

где дробная производная функции $f(x)$ по другой функции $g(x)$ определяется формулой [4] с. 249.

$$\frac{\partial^\beta f}{\partial g^\beta}\equiv D_{a+;g}^\beta f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{1}{g'(x)}\times$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{f(y)}{[g(x)-g(y)]^\beta}g'(y)\,dy$$

Однако выражения, полученные по формулам (П.12) и (П.14) для функции $f(g(x))=E_{\alpha,1}\left[-\hat{L}(\hat{s})bx^nt^\alpha\right]$, совпадают только при $n=1$.

15. Формула для деления функциональных рядов:

$$\sum_{k=0}^\infty b_kz^k\left(\sum_{k=0}^\infty a_kz^k\right)^{-1}=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^\infty c_kz^k, \qquad (\text{П}.15)$$

где

$$c_n=b_n-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^n c_{n-k}a_k\ ;\ c_0=b_0;$$

$$c_1=b_1-\frac{a_1}{a_0}c_0;\ c_2=b_2-\frac{a_1}{a_0}c_1-\frac{a_2}{a_0}c_0.$$

16. Формула для вычисления экспоненциального оператора от квадрата оператора Лиувилля (двойного коммутатора) [8]:

$$exp\{-a^2\hat{L}^2\}_{\dots}=\int_{-\infty}^\infty dx\,exp\{-\pi x^2-i2\sqrt{\pi}\cdot xa\hat{L}\}_{\dots}. \qquad (\text{П}.16)$$

Список литературы

1. *Зеленый Л.М., Милованов А.М.* Фрактальная топология и странная кинетика // Успехи физических наук. 2004. Т. 174, № 8. С. 809–852.
2. *Учайкин В.В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. 2003. Т. 173, № 8. С. 847–874.
3. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
4. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. *Чукбар К.В.* Стохастический перенос и дробные производные // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1995. Т. 108, вып. 5(11). С. 1875–1884.
6. *Кобелев В.Л., Романов Е.Н., Кобелев Я.Л. и др.* Нелинейная релаксация и диффузия в фрактальном пространстве // ДАН. 1998. Т. 361, № 6. С. 755–758.
7. *Кочубей А.Н.*Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 660–672.
8. *Кирчанов В.С.* Диффузия в ЯКР // Известия вузов. Физика. 1985. № 6. С. 14–16;
9. *Кирчанов В.С.* Диффузия и релаксация дробного порядка во фрактальных средах в классическом и квантовом случае// Известия вузов. Физика. 2009. Т.52, № 4. С. 15–23.
10. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
11. *Бейтман Г. и Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции // Эллиптические и автоморфные функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. Т. 3. С. 221.
12. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
13. *Джрбашян М.М* Интегральные преобразования и представления в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Fractional order equations for the diffusion and relaxation in fractal media

V. S. Kirchanov

Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia
Kirchanovvs@pstu.ru, 89091048466

We used the fractional Riemann–Liouville derivative with ($0 < \alpha \leq 1$) and solved a fractional equation describing anomalous diffusion and relaxation in the isotropic fractal space. The solution is obtained as a product of Fox's function to the Mittag–Leffler function; it generalizes the result obtained in [7] and is simpler than in [6]. In the quantum case, we solve the generalized fractional quantum statistical Neumann–Kolmogorov equation for the incomplete statistical operator describing random walks of spin quantum particles in fractal space and their delays in traps. The solution contains quantum Mittag–Leffler (non-harmonic) fractional oscillations, abnormal relaxation, noise fractional oscillations, and exponential fractional diffusion attenuation.

Keywords: *fractal medium; fraction derivate; anomalous diffusion and relaxation.*