ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016 Математика. Механика. Информатика
Вып. 2(33)

УДК 517.929.4

О развитии метода функций Ляпунова для дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием*

О. В. Дружинина[1], **Н. О. Седова**[2]
[1]Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук
Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65
ovdruzh@ipu.ru; +7(495)3349369
[2]Ульяновский государственный университет
Россия, 432000, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42
sedovano@ulsu.ru; +7(902)1220415

Изучается задача об устойчивости по Ляпунову для неавтономного нелинейного дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием в пространстве с исчезающей памятью. Предполагается, что правая часть системы удовлетворяет условиям типа Каратеодори. На основе модифицированного метода "конечномерных" функций Ляпунова обоснованы достаточные условия асимптотической устойчивости, которые дополняют и обобщают известные результаты для уравнений с бесконечным запаздыванием.

Ключевые слова: *нелинейное дифференциальное уравнение; бесконечное запаздывание; пространство с исчезающей памятью; условия Каратеодори; устойчивость; функции Ляпунова; системы Лотки–Вольтерра.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-14-20

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение с неограниченным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

где $t \in R^+$, $x(t) \in R^n$, и для функции $x \in C((-\infty, A), R^n)$ при каждом значении $t < A$ определим отображение $x_t :(-\infty,0] \to R^n$ по формуле $x_t(s) = x(t+s)$, $s \le 0$.

Решение $x(t;t_0,\varphi)$ уравнения (1) с начальной функцией $\varphi :(-\infty,0] \to R^n$ при $t \in [t_0,\beta)$, $\beta > t_0$, определяется как непрерывное и удовлетворяющее уравнению (1) на $[t_0,\beta)$, и такое, что $x_{t_0}(t_0,\varphi) = \varphi$.

Как и в случае ограниченного запаздывания, исследование устойчивости и асимптотического поведения решений уравнений с бесконечным запаздыванием осуществляется как на основе метода функционалов, так и с использованием функций и условий Разумихина [1, 2].

В представленной работе предлагается развитие метода исследования устойчивости для уравнения (1), основанного на использовании аксиоматического определения фазового пространства [3, 4] и пары Ляпунова–Разумихина [5].

Основное отличие предложенных достаточных условий устойчивости от из-

---

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 1.31 "Актуальные проблемы робототехники".

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

вестных аналогичных результатов заключается в более общих предположениях относительно как правой части системы (1), так и функции Ляпунова.

1. Основные определения и предположения

Пусть $|\cdot|$ – норма в R^n, B – действительное векторное пространство либо непрерывных функций, отображающих $R^- = (-\infty, 0]$ в R^n, и $\varphi = \psi$ в B, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для всех $s \in R^-$, либо измеримых функций, отображающих R^- в R^n, и $\varphi = \psi$ в B, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in R^-$ и $\varphi(0) = \psi(0)$. Кроме того, пусть в пространстве B определена норма $|\cdot|_B$ такая, что $(B, |\cdot|_B)$ является сепарабельным банаховым пространством. Для произвольного $a > 0$ определим множества $B_a = \{\varphi \in B \,|\, |\varphi|_B < a\}$, $\overline{B}_a = \{\varphi \in B \,|\, |\varphi|_B \le a\}$.

Допустим теперь, что правая часть уравнения (1) является функционалом $f : R^+ \times B_H \to R^n$ для некоторого $H > 0$, и для него имеет место следующее предположение [6]:

Предположение 1

Функционал $f(t, \varphi)$ в области $R^+ \times B_H$ непрерывен по φ при каждом фиксированном t, измерим по t при фиксированном φ, и для каждого $0<q<H$ существуют локально интегрируемые по Лебегу функции $M_q(t)$ и $L_q(t)$ такие, что для всех $\varphi, \psi \in \overline{B}_q$ и $t \in R^+$ справедливы оценки:

$$|f(t,\varphi)| \le M_q(t), \tag{2}$$

$$|f(t,\varphi) - f(t,\psi)| \le L_q(t)\,|\varphi - \psi|_B. \tag{3}$$

Кроме того, функции $M_q(t)$ и $L_q(t)$ удовлетворяют условиям: для любого $t \in R^+$ существует $N(q) > 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такие, что если E – измеримое подмножество интервала $[t, t+1]$, мера которого не больше δ, то

$$\int_E M_q(\tau)\,d\tau \le \varepsilon, \tag{4}$$

$$\int_t^{t+1} L_q(\tau)\,d\tau \le N(q). \tag{5}$$

Заметим, что поскольку x_t при каждом t "содержит" часть начальной функции, то качественное поведение отображения $T(t,\alpha)\varphi : \varphi \to x_t(\alpha, \varphi)$ зависит от начальных данных, и свойства решений системы (1) во многом зависят от выбора пространства B. Помимо "стандартных" желательных свойств (существования, непрерывной зависимости, продолжимости решений) с точки зрения качественного поведения решений уравнения, в частности, устойчивости, важны такие вопросы, как наличие предкомпактности положительной орбиты ограниченного решения в пространстве B и взаимосвязь свойств устойчивости в R^n и в функциональном пространстве B.

Удобным и продуктивным подходом оказался аксиоматический подход к определению пространства B, впервые систематически изложенный в работе [5] (см. также [7]). В последующих работах возникли раз-личные модификации оригинального набора требований, что было определено целями исследования и удобством формулировок и доказательств. В данной работе используется пространство с исчезающей памятью (или с равномерно исчезающей памятью) согласно определению из работы [6].

Таким образом, предположение 1 обеспечивает существование, единственность и непрывную зависимость решений уравнения (1) от начальных данных, при этом если решение ограничено по норме постоянной $h<H$, то оно неограниченно продолжается вправо [1] и положительная орбита такого решения $\{x_t(t_0, \varphi_0) : t \ge t_0\}$ предкомпактна в пространстве B. Кроме того, в предположении 1 уравнению (1) можно поставить в соответствие семейство *предельных уравнений* $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$, где $f^*(t, \varphi)$ есть предельный к f функционал, определяемый некоторой последовательностью $t_k \to +\infty$ как предельная точка последовательности $f(t + t_k, \varphi)$ в компактном функциональном пространстве

[6]. Свойства решений предельных уравнений тесно связаны с асимптотическими свойствами решений исходного уравнения, поэтому пре-дельные уравнения используются как само-стоятельный инструмент качественного ана-лиза неавтономных систем (см., напр., [3, 8]). Однако в сочетании с другими качественными мето-дами, в частности, с методом Ляпунова, эффективность исследования предельных уравнений значительно повышается [1, 2, 4, 8].

Предположим теперь, что $f(t,0)\equiv 0$, тогда уравнение (1) имеет нулевое решение, которое мы и будем исследовать на устойчивость по Ляпунову, используя стандартные определения [3].

Пусть $V=V(t,x)$, $V\in C^1(R\times G_H,R^+)$, есть функция Ляпунова, где $G_H=\{x\in R^n{:}|x|<H\}$. Ее производная в силу уравнения (1) есть функционал $V'{:}R^+\times B_H\to R$:

$$V'(t,\varphi)=\frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial t}+\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\partial V(t,\varphi(0))}{\partial x_i}f_i(t,\varphi).$$

Определим также функционал $W\in C(R^+\times B_H,R^+)$. Используем следующее определение [1] (для автономного случая соответствующее определение было дано в [9]):

Определение 1. *Пара* $(V,\ W)$ *называется парой Ляпунова–Разумихина, если* $V(t,x)\geq 0$, $V(t,0)=0$, $W(t,0)=0$, *и для каждого* $\rho>0$, $t\geq\rho$ *и* $\varphi\in B_H$ *такой, что* $\varphi_{-\rho}\in B_H$ *и* φ *непрерывна на* $[-\rho,0]$, *выполня-ется* $V(t,\varphi(0))\leq W(t,\varphi)\leq$
$\leq\max\{\max\limits_{-\rho\leq s\leq 0}V(t+s,\varphi(s)),W(t-\rho,\varphi_{-\rho})\}$, если $0<V(t,\varphi(0))=W(t,\varphi)$, то $V'(t,\varphi)\leq 0$.

2. Основные результаты

Рассмотрим задачу о локализации положительного предельного множества $\omega^+(x_t(\alpha,\varphi))=\bigcap\limits_{t\geq\alpha}\mathrm{Cl}\{x_s:s\geq t\}$ ограниченного решения уравнения (1), а затем сформулируем достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения в терминах пары Ляпунова–Разумихина, удовлетворяющей следующему дополнительному предположению:

Предположение 2

1. Функционал $W(t,\varphi)$, а также некоторый функционал $U:R^+\times B_H\to R^+$, для которого справедливы оценки $0\leq U(t,\varphi)\leq|V'(t,\varphi)|$, удовлетворяют условиям вида (2)–(5) (модифицированным в соответствии с областью определения функции и функционала). Заметим, что в силу непрерывной дифференцируемости функция $V(t,x)$ также удовлетворяет аналогичным условиям. Тогда любая последовательность $t_n\to+\infty$ определяет предельную совокупность (V^*,W^*,U^*).

2. Для произвольных равномерно непрерывной функции $\varphi\in B_H$, предельной совокупности (V^*,W^*,U^*) и $t\in R^+$ выполняется условие $W^*(t,\varphi)\leq\sup\limits_{s\leq 0}V^*(t+s,\varphi(s))$.

Теперь для каждой последовательности $t_k\to+\infty$, и чисел $t\in R^+$, $c\in R^+$ определим множества

$$(V^*)^{-1}(t,c)=\{\varphi\in B_H|\max_{-T(c)\leq s\leq 0}V^*(t+s,\varphi(s))=c\},$$
$$(V^*)_0^{-1}(t,c)=\{\varphi\in(V^*)_0^{-1}(t,c)|V^*(t,\varphi(0))=c\},$$
$$(V^*)^{-1}(0)=\{\varphi\in B_H|\sup_{s\leq 0}V^*(s,\varphi(s))=0\},$$
$$(U^*)^{-1}(t,0)=\{\varphi\in B_H|U^*(t,\varphi)=0\}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Предположим, что для системы (1) выполняются условия предположения 1 и существует пара Ляпунова–Разумихина* (V,W), *для которой справедливо предположение 2. Пусть решение* $x(t;\alpha,\varphi)$ *уравнения (1) определено и ограничено при всех* $t\geq\alpha$. *Тогда существует* $c_0=const\geq 0$ *такое, что для любой функции* $\psi\in\omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ *существуют предельная совокупность* (f^*,V^*,W^*,U^*), *соответствующая последовательности* $t_k\to+\infty$, *и решение* $x^*(t;0,\psi)$ *предельного уравнения* $\dot{x}(t)=f^*(t,x_t)$ *такие, что* $x_t^*\in\omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$, $x_t^*\in(V^*)^{-1}(t,c_0)$ *для всех* $t\in R^+$, *и если* $x_t^*\in(V^*)_0^{-1}(t,c_0)$, *то* $x_t^*\in(U^*)^{-1}(t,0)$.

Пусть $K(t_n, c) \subset B_H$ – множество, состоящее из целых решений x_t^* соответствующего последовательности $t_n \to +\infty$ уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$, обладающих свойством: для любого $t \in R^+$ найдется $\tau \in [t - T(c), t]$ такое, что $x_\tau^* \in (V^*)_0^{-1}(\tau, c_0) \cap (U^*)^{-1}(\tau, 0)$.

Заметим, что $0 \in K(t_n, 0)$ для любой последовательности $t_n \to +\infty$. Кроме того, из теоремы 1 следует, что в сделанных предположениях положительное предельное множество любого ограниченного решения уравнения (1) содержится в объединении множеств $K(t_n, c)$ по всем последовательностям $t_n \to +\infty$ для некоторого $c \geq 0$.

Определение пары Ляпунова–Разумихина позволяет получить достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1) в виде ограничений на функцию *V* и функционал *W*. При этом согласно результату о локализации положительного предельного множества можно ослабить эти ограничения по сравнению с традиционными для прямого метода, в первую очередь условие знакоопределенности производной *V'*. В частности, справедлива

Теорема 2. *Предположим, что дополнительно к условиям теоремы 1 функция $V(t, x)$ положительно определена и для некоторой последовательности $t_n \to +\infty$ множество $K(t_n, c) \subseteq K(t_n, 0)$ при достаточно малых $c \geq 0$. Тогда нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво. Если же для любой последовательности $t_n \to +\infty$ множество $K(t_n, c)$ пусто при достаточно малых $c > 0$, то нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство теорем 1 и 2 проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичных результатов в [1, 4].

Замечание 1. Условия теоремы 2 можно ослабить, в частности

1) отказаться от требования положительной определенности функции Ляпунова, заменив его следующим условием: нулевое решение асимптотически устойчиво относительно множества предельных нулей функции $V(t, x)$ и семейства предельных уравнений. Это означает, что для каждой предельной пары (f^*, V^*) нулевое решение соответствующего предельного уравнения асимптотически устойчиво при условии, что начальными точками отклонений являются $(0, \psi)$, $\psi \in (V^*)^{-1}(0)$; при этом числа, определяющие малость отклонений, могут быть выбраны одни и те же для всех предельных уравнений (см. [4]). Для положительно определенной функции это условие всегда выполняется, поскольку соответствующее множество $(V^*)^{-1}(0)$ содержит лишь нулевую функцию.

2) требование неположительности производной функции Ляпунова заменить на условие $V'(t, \varphi) \leq k(t)$, где $k(t) \in L_1(0, +\infty)$.

3) оценивать производную лишь при достаточно больших $t \geq T > 0$.

Замечание 2. Поскольку для не зависящей от *t* правой части уравнения (1) все предельные функционалы совпадают с $f(t, \varphi)$, а для периодической периода *T* они определяются формулой $f^*(t, \varphi) = f(t + h, \varphi)$ ($h \in [0, T)$), из теорем 1, 2 для таких уравнений легко получаются следствия, в которых не используются предельные уравнения. Для неавтономных уравнений также можно сформулировать результаты, в которых не фигурируют предельные уравнения, изменив определения "предельных множеств", задаваемых отображениями *V, W, U*. Например, вместо множества $(U^*)^{-1}(t, 0)$ используется множество

$$U^{-1}(\infty, 0) = \{\varphi \in B_H \mid \exists \varphi_n \to \varphi,\ t_n \to +\infty : \lim_{n \to \infty} U(t_n, \varphi_n) = 0\}.$$

Условие асимптотической устойчивости относительно множества предельных нулей функции $V(t, x)$ и семейства предельных уравнений в этом случае можно заменить требованием равномерной сходимости к нулю всех решений исходного уравнения, начинающихся в некотором множестве [2]. Получаемые утверждения будут аналогичны теоремам 1, 2 из [2].

С одной стороны, преимущество подобных результатов в том, что для их применения не требуется строить и исследовать предельные уравнения (а также заботиться об их существовании). С другой стороны, требования к "предельным множествам" в условиях асимптотической устойчивости становятся более ограничительными, поскольку исчезает возможность анализировать лишь подмножество, положительно инвариантное относительно соответствующего предельного уравнения.

Замечание 3. По сравнению с известными результатами, теоремы 1, 2 доказаны для более широкого класса функционалов $f(t,\varphi)$, свойства которых, в свою очередь, определяют способ определения предельных уравнений (отметим, что аналогичные условия в контексте методики предельных уравнений были предложены в работе [10] для обыкновенных дифференциальных уравнений).

В частности, в [1, 2, 4] предполагается непрерывность функционала $f(t,\varphi)$ и ограниченность на множествах вида $R^+ \times \overline{B}_h$ ($0 < h < H$), а также равномерная непрерывность и липшицевость на множествах вида $R^+ \times K$ для каждого компакта $K \subset B_H$. Аналогичные условия предполагаются также для функций *V, W* и *U*. Отказ от требования существования предельных уравнений в [2] позволяет опустить указанное требование равномерной непрерывности для всех функций, при этом для обоснования *равномерной* асимптотической устойчивости несколько усилено условие Липшица: общая постоянная Липшица должна существовать для всех аргументов из множества $R^+ \times \overline{B}_h$ при любом $h \in (0,H)$.

В работах [1, 2, 4] можно также найти изложение более ранних результатов об устойчивости для уравнений с бесконечным запаздыванием на основе метода функций Ляпунова.

3. Примеры

Приведенные результаты могут быть применены к исследованию качественного поведения многомерных математических моделей биологии, робототехники и биомеханики.

Для иллюстрации рассмотрим неавтономную систему типа Лотки–Вольтерра, моделирующую взаимодействие *n* биологических видов [11]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) = {} & b_i(x_i(t))g_i(t,x_t) \equiv b_i(x_i(t))[r_i(t) - a_i(t)x_i(t) + \\ & \int_{-\tau_i}^{0} x_i(t+s)d\mu_i(t,s) + \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{0} x_j(t+s)d\mu_{ij}(t,s) - \\ & - \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{0} x_j(t+s)d\nu_{ij}(t,s)], \\ & i = 1,\ldots,n, \quad t \ge 0.\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь для всех $i, j = 1,\ldots,n$ предполагается, что:

1) $b_i(0) = 0$, $b_i(x)$ не убывают на R^+;

2) $r_i(t)$, $a_i(t) \ge 0$, $\tau_i(t) \ge 0$ – ограниченные функции, $\sup\limits_{t\ge 0}\tau_i(t) = \tau_i$;

3) неотрицательные функции $\mu_i(t,s)$, $\mu_{ij}(t,s)$, $\nu_{ij}(t,s)$ по второму аргументу являются неубывающими и имеют ограниченную вариацию, а функции $\hat{\mu}_i(t) = \int_{-\infty}^{0} d\mu_i(t,s)$, $\hat{\mu}_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{0} d\mu_{ij}(t,s)$, $\hat{\nu}_i(t) = \int_{-\infty}^{0} d\nu_i(t,s)$ непрерывны и ограничены на R^+.

Определим дополнительно функцию $p_i(t) = \sum_{j=1}^{n}(\hat{\mu}_{ij}(t) + \hat{\nu}_{ij}(t))$. Предполагая, что допустимые начальные функции для решений системы (6) непрерывны, ограничены, неотрицательны и $\varphi_i(0) > 0$, рассмотрим эту систему в пространстве UC_g [1, 4, 6, 7]. Следующие определения дадим согласно [11]:

Определение 2. Систему (6) назовем диссипативной с равномерной верхней границей $M = (M_1,\ldots,M_2)$, если ее решения $x(t)$ с допустимыми начальными функциями неограниченно продолжаемы вправо и удовлетворяют условию $\limsup\limits_{t\to+\infty} x_i(t) \le M_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Определение 3. Неотрицательный вектор $x^* \in R^n$ назовем насыщенным равновесием системы (6), если для всех $i = 1,\ldots,n$ и всех $t \in R^+$ справедливы условия $x_i^* g_i(t,x^*) = 0$, $g_i(t,x^*) \le 0$.

В данных предположениях и обозначениях справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Предположим, что система* (6) *диссипативна с равномерной верх-*

ней границей $M=(M_1,\dots,M_n)$, x^* *– насыщенное равновесие системы* (6), *и существуют постоянные* $\varepsilon>0$, $\rho_1,\dots,\rho_n$, *такие, что для каждого* $i=1,\dots,n$ *и всех* $t\in R^+$ *выполняется одно из требований: либо*

$$a_i(t)\ge\hat{\mu}_i(t)+p_i(t)+\varepsilon\,,$$

либо

$$a_i(t)+\rho_i\hat{\mu}_i(t)\ge p_i(t)+\varepsilon\,,$$
$$1-\rho_i\ge\tau_i b_i(M_i)[a_i(t)+\hat{\mu}_i(t)+p_i(t)]+\varepsilon\,.$$

Тогда равновесие x^* *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство проводится с использованием теоремы 2.

Заметим, что ρ_i в условиях теоремы 3 могут быть отрицательными, однако, очевидно, $\rho_i<1$. Многие результаты, касающиеся устойчивости равновесий систем типа Лотки–Вольтерра, предполагают, что внутренняя "мгновенная" конкуренция (мгновенная обратная связь) для каждого вида должна преобладать над межвидовыми взаимодействиями. Вторая пара условий теоремы 3, в отличие от первого, может выполняться и при $a_i(t)=0$, если $\mu_i(t)$ достаточно велико, а τ_i достаточно малое. Это означает, что при отсутствии мгновенной обратной связи точка равновесия может сохранять устойчивость, если запаздывающая обратная связь достаточно сильная и при этом запаздывания не слишком велики.

В статье [11] в условиях теоремы 3 доказана сходимость $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x^*$. Отметим, что в доказательстве теоремы 3 с первым условием не используется свойство диссипативности системы (6), которое в силу неавтономности системы не всегда просто обосновать.

Дальнейшее обобщение доказанной теоремы возможно на основе замены $z_i(t)=\delta_i x_i(t)$ для некоторых постоянных $\delta_i>0$, $i=1,\dots,n$, и формулировки условий теоремы 3 для преобразованной системы. При этом возникает возможность варьирования условий за счет выбора чисел δ_i.

Возможное обобщение рассмотренной системы состоит в добавлении к взаимодействию популяций линейной системы, состояние которой описывается вектором $y_i(t)\in R^m$ (такая ситуация, например, возникает при введении в систему управлений):

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t)={}& b_i(x_i(t))G_i(t,x_t,y_t)\equiv b_i(x_i(t))[r_i(t)-a_i(t)x_i(t)+\\&\int_{-\tau_i}^{0}x_i(t+s)d\mu_i(t,s)+\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{0}x_j(t+s)d\mu_{ij}(t,s)-\\&-\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{0}x_j(t+s)d\nu_{ij}(t,s)+\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{0}y_k(t+s)d\eta_{ik}(t,s)],\\&\qquad i=1,\dots,n,\quad t\ge0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_k(t)={}& H_i(t,x_t,y_t)\equiv-c_k(t)y_k(t)-\int_{-\sigma_{ki}}^{0}y_k(t+s)d\alpha_k(t,s)+\\&+\sum_{l=1}^{m}\int_{-\infty}^{0}y_l(t+s)d\beta_{kl}(t,s)+\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{0}x_i(t+s)d\gamma_{ki}(t,s),\\&\qquad k=1,\dots,m,\quad t\ge0.\end{aligned}$$

Здесь все функции под интегралами функции удовлетворяют тем же условиям, что и аналогичные функции в системе (6), и для них определяются полные вариации по *s*, зависящие от *t*, $\sigma_k(t)\in[0,\sigma_k]$.

Для этой системы условия сходимости решений к неотрицательному равновесию (x^*,y^*), такому, что $x_i^*G_i(t,x^*,y^*)=0$, $G_i(t,x^*,y^*)\le0$, $H_k(t,x^*,y^*)=0$, в статье [11] имеют вид, аналогичный условиям теоремы 3. Например, первое условие теоремы 3 с учетом преобразования системы трансфор-мируется в следующее: существуют постоянные $\varepsilon>0$, $\rho_1,\dots,\rho_{n+m}$, такие, что для каждого $i=1,\dots,n$, $k=1,\dots,m$ и всех $t\in R^+$

$$a_i(t)\ge\hat{\mu}_i(t)+p_i(t)+\sum_{k=1}^{m}\hat{\eta}_{ik}(t)+\varepsilon\,,$$

$$c_k(t)\ge\hat{\alpha}_k(t)+\sum_{l=1}^{m}\hat{\beta}_{kl}(t)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\gamma}_{ki}(t)+\varepsilon\,.$$

Используя последовательно знакопостоянные функции, зависящие от *x* и *y*, и теорему 2 с учетом замечания 1, можно получить менее ограничительные условия, гарантирующие к тому же не только сходимость к равновесию, но и равномерную асимптотическую устойчивость этого равновесия:

$$a_i(t)\ge\hat{\mu}_i(t)+p_i(t)+\varepsilon\,,$$

$$c_k(t)\ge\hat{\alpha}_k(t)+\sum_{l=1}^{m}\hat{\beta}_{kl}(t)+\varepsilon\,.$$

Аналогично получаем альтернативную пару условий:

$$a_i(t) + \rho_i \mu_i(t) \ge p_i(t) + \varepsilon ,$$
$$1 - \rho_i \ge \tau_i b_i(M_i)[a_i(t) + \mu_i(t) + p_i(t)] + \varepsilon ,$$
$$c_k(t) + \rho_{n+k} \alpha_k(t) \ge \sum_{l=1}^{m} \beta_{kl}(t) + \varepsilon ,$$
$$1 - \rho_{n+k} \ge \sigma_k [c_k(t) + \alpha_k(t) + \sum_{l=1}^{m} \beta_{kl}(t)] + \varepsilon ,$$

не содержащих, в отличие от [11], функции $\hat{\eta}_{ik}(t),\ \hat{\gamma}_{ik}(t)$.

Список литературы

1. *Седова Н.О.* К методу Ляпунова–Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием // Диффенциальные уравнения. 2002. Т. 10. С. 1338–1347.
2. *Седова Н.О.* Устойчивость в системах с неограниченным последействием // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 128–140.
3. *Дружинина О.В., Седова Н.О.* Метод предельных уравнений исследования устойчивости для уравнений с бесконечным запаздыванием в условиях Каратеодори. II // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 715–725.
4. *Седова Н.О.* О развитии прямого метода Ляпунова для функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием // Математические заметки. 2008. Т. 84, вып. 6. С. 888–906.
5. *Hale J., Kato J.* Phase space for retarded equations with infinite delay // Funkcialai Ekvacioj. 1978. Vol. 21. P. 11–41.
6. *Дружинина О.В., Седова Н.О.* Метод предельных уравнений исследования устойчивости для уравнений с бесконечным запаздыванием в условиях Каратеодори. I // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 5. С. 572–583.
7. *Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990.
8. *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005.
9. *Haddock J. and Terjeki J.* On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // Journal of Differential Equations. 1990. Vol. 86. P. 1–32.
10. *Artstein Z.* Topological dynamics of ordinary differential equations // Journal of Differential Equations. 1977. Vol. 23. P. 216–223.
11. *Kuang Y.* Global stability in delay differential systems without dominating instantaneous negative feedbacks // Journal of Differential Equations. 1995. Vol. 119. P. 503–532.

On the method of Lyapunov functions for infinite delay equations

O. V. Druzhinina [1], **N. O. Sedova** [2]

[1]V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences
65, Profsoyuznaya st., Moscow, 117997, Russia
ovdruzh@ipu.ru; +7(495)3349369

[2] Ulyanovsk State University
42, L'va Tolstogo st., Ulyanovsk, 432000, Russia
sedovano@ulsu.ru; +7(902)1220415

The stability problem is studied for a nonautonomous nonlinear differential equation with infinite delay in a fading memory space. The right-hand side of the equation is assumed to satisfy Caratheodory's conditions. On the basis of the modified method of Lyapunov functions, some sufficient stability conditions, generalizing the known results for infinite delay equations, are obtained.

Keywords: *nonlinear differential equation; infinite delay; fading memory space; Caratheodory's conditions; stability; Lyapunov functions; Lotka–Volterra system.*