МАТЕМАТИКА

УДК 517.929

О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с последействием*

А. С. Баландин, В. В. Малыгина
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29
balandin-anton@yandex.ru; 8(342)2391564

Изучается вопрос о существовании и структуре решений для линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений на оси. В начале статьи приведен подробный обзор литературы по данной теме. Показана конечномерность пространства решений для однородных уравнений, решение которых принадлежит заданному пространству интегрально ограниченных функций,. Базис этого пространства образуют решения экспоненциального типа, порожденные корнями характеристического уравнения. Ключевой момент доказательства основного результата – разложение решения в ряд по системе экспонент с последующей трансформацией уравнения к виду, допускающему применение преобразования Фурье. Полученные результаты применяются к исследованию разрешимости сингулярного уравнения с последействием.

Ключевые слова: *автономные дифференциальные уравнения с последействием; разрешимость на оси; двусторонние решения; пространства функций с экспоненциальным весом.*
DOI: 10.17072/1993-0550-2016-2-7-13

1. История вопроса

Задача о восстановлении процесса с последействием по его конечной картине естественным образом приводит к необходимости изучать дифференциальные уравнения с запаздыванием на отрицательной полуоси. К той же задаче соответствующей заменой независимой переменной приводят исследования дифференциальных уравнений с опережением на положительной полуоси [1, § 6] или краевых задач для сингулярных функционально-дифференциальных уравнений с коэффициентами, имеющими на конечном отрезке несуммируемые особенности [2].

Важно понимать, что задача разрешимости дифференциального уравнения с последействием на отрицательной полуоси принципиально отличается от аналогичной задачи на положительной полуоси. Это видно уже на примере самого простого уравнения:

$$\dot{x}(t) + ax(t-1) = 0 . \qquad (1)$$

Построение решения уравнения (1) на множестве $R_+ = [0, +\infty)$ не вызывает никаких за-

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки Российской Федерации (задание №2014/152, проект № 1890).

*Статья написана по материалам международного симпозиума "Дифференциальные уравнения. Сто лет математической науке Урала". Пермь. 16–19 мая 2016.

труднений: достаточно задать на отрезке $[-1,0]$ начальную функцию – и решение уравнения (1) последовательным интегрированием однозначно определится в любой точке множества R_+. Если же задать начальную функцию на отрезке $[0,1]$ и попытаться построить решение уравнения (1) на множестве $R_- = (-\infty, 0]$, то из уравнения (1) при $a \neq 0$ получаем равенство $x(t) = -\frac{1}{a}\dot{x}(t+1)$, которое формально дает возможность найти решение на интервалах $(-1,0)$, $(-2,-1)$, …, последовательно дифференцируя участок решения, построенный на предыдущем интервале. Легко, однако, заметить, что границы интервалов могут оказаться для него точками разрыва, т.е. даже в классе непрерывных функций это решение не всегда существует: выбрав в качестве начальной функции многочлен степени n, мы неизбежно получим функцию, разрывную в точке $t=-n$.

Если построить решение требуется на конечном отрезке $[-T,0]$, то, как показано в [3, с. 65], можно подчинить начальную функцию конечному набору условий, выполнение которых обеспечивает существование непрерывного (и даже дифференцируемого) решения на $[-T,0]$. Но здесь возникает новая проблема. В работе [1, с. 51] показано, что для решения уравнения (1) нарушается непрерывная зависимость от начальных условий, т.е. задача "продолжения назад" (как и большинство обратных задач) оказывается некорректной. Поэтому вопрос ее регуляризации потребовал отдельного исследования. В работе [4] некорректная задача нахождения решения линейного уравнения с запаздыванием на $[-T,0]$ сводится к операторному уравнению первого рода в гильбертовом пространстве, к которому применяется метод регуляризации Тихонова.

Таким образом, для конечного отрезка отрицательной полуоси задачу построения решения для уравнения с последействием можно считать практически решенной.

Если же ставить аналогичным образом задачу построения непрерывного решения на отрицательной полуоси как продолжение начальной функции, то, помимо разрешимости уравнения относительно $x(t)$ [3, § 2.5], мы будем вынуждены подчинить начальную функцию ряду жестких ограничений [5, с. 160]. Она должна быть, во-первых, бесконечно дифференцируемой, а во-вторых, удовлетворять счетному набору условий согласования (например, для уравнения (1) это будут условия $ax^{(n-1)}(0) = -x^{(n)}(1)$ для всех $n \in N$). При этом конструктивного описания класса функций, для которых эти условия выполнены, нет даже для простейших уравнений. Использовать технику и результаты исследований для конечного отрезка не удается, так как разница между задачей на конечном отрезке и полуоси принципиальная.

Другой взгляд на задачу связан с тем, что разрешимость уравнения с последействием на отрицательной полуоси эквивалентна разрешимости того же уравнения на всей оси. В такой постановке задача становится более удобной для изучения, хотя класс всех решений и здесь оказывается слишком широким для того, чтобы описать его полностью. Большинство авторов, занимавшихся этой задачей, следовало естественной логике поиска решений в более узком классе, – но с целью дать в нем конструктивное описание всех решений уравнения. Выбор класса решений – право автора, и поначалу количество различных классов едва ли не совпадало с количеством авторов.

J.W. Green в работе [6] для уравнения $\dot{x}(t) = x(t+h)$, где $h \in R$, дал описание класса решений, являющихся четными и нечетными на оси функциями. Оказалось, что в этом случае должно выполняться равенство $h = \pi/2 \left(\mathrm{mod}\, 2\pi\right)$, а все решения – это либо $x(t) = A\cos t$, либо $x(t) = B\sin t$.

Столь же просто описывается класс периодических (**H. Robbins**, [7]) или ограниченных [6] на оси решений этого уравнения: $x(t) = A\cos t + B\sin t$, причем снова оказывается, что $h = \pi/2 \left(\mathrm{mod}\, 2\pi\right)$.

F. Schürer в работе [8] доказал, что если число нулей двустороннего решения уравнения $\dot{x}(t) = ax(t-1)$ на всех интервалах $\alpha \le t \le \alpha + 1$, $\alpha \in R$, равномерно ограничено, то такое решение представляет собой сумму конечного числа простейших, экспоненциальных. Следовательно, у решений, не являющихся конечной комбинацией экспоненциальных, – количество нулей на отрезках единичной длины неограниченно возрастает. Но… большая проблема, как проверить попадание решения в указанный класс. Ведь вопрос о распределении нулей решения – отдельная сложная задача.

А.Ф. Леонтьев [9], **Э. Пинни** [10], **L.Bruwier** [11], **A. C. Dixon** [12] рассматривали дифференциально-разностные уравнения, у которых аргумент либо изначально считается комплексным, либо предполагает возможность его продолжения в комплексную плоскость. При этом продолжение должно быть таким, чтобы решение, как функция комплексной переменной, обладало хорошими свойствами: являлось аналитическим в некоторой области, было целой или мероморфной функцией. Несмотря на то, что в работах [9–12] установлен ряд сильных и интересных результатов, они, к сожалению, не применимы к ситуации, когда уравнение рассматривается только на вещественной оси. Построенный в работе [13] пример показывает, что уравнение (1) при $t \in R$ имеет решение, продолжение которого в комплексную плоскость не является ни целой, ни аналитической, ни мероморфной функцией.

Более поздние работы показали, что самой плодотворной оказалась идея ограничить скорость роста решений при $t \to \pm\infty$ некоторой заданной функцией.

E. Schmidt [14] (и позднее другим методом **E. Titchmarsch** [15]) установили, что если уравнение имеет вид

$$x^{(n)}(t) + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{p} a_{km} x^{(m)}(t + h_k) = 0, \quad t \in R,$$

то *всякое решение, непрерывное на оси вместе с производными и ведущее себя при* $t \to \pm\infty$ *как* $O(|t|^{\alpha})$, $\alpha > 0$, *представляется в форме* $x(t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) e^{i\varphi_k t}$, *где* $q_k(t)$ *– многочлены с произвольными коэффициентами степени на единицу меньше кратности корня* $i\varphi_k$ *соответствующего квазиполинома.*

H.R. Pitt в работе [16] рассмотрел скалярное автономное уравнение весьма общего вида

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(k)}(t-s)\,dr_k(s) = 0, \quad t \in R, \qquad (2)$$

с сосредоточенными и распределенными отклонениями любого знака (включает уравнения запаздывающего, опережающего и нейтрального типа). Допусти́м и случай чисто разностных уравнений (при $n = 0$). В работе [16] показано, что *если при всех* $k = 0,1,\ldots,n$ *решения уравнения* (2) *подчинены условиям*

$$\left| x^{(k)}(t) \right| \le A\left((1+|t|^{m_1}) e^{\sigma_1 t} + (1+|t|^{m_2}) e^{\sigma_2 t} \right),$$

где $-\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < \infty$, m_1, m_2 *– целые числа, то пространство решений* допускает полное описание и *является замыканием линейной оболочки множества функций вида* $t^m e^{p_k t}$, *где* p_k *– корни характеристического квазиполинома, лежащие в полосе* $\sigma_1 \le \operatorname{Re} p \le \sigma_2$.

В статье **А.М. Зверкина** [17] изучены периодические дифференциальные уравнения запаздывающего типа, решения которых имеют подэкспоненциальный рост на R_-. Установлено, что любое решение может быть представлено в виде конечной суммы решений типа Флоке. Для автономных уравнений основной результат совпадает с приведенной выше теоремой работы [16].

В монографии **А.Д. Мышкиса** [1, с. 56] на примере уравнения $\dot{x}(t) = x(t+1)$ ($t \in R_+$, $x(t) = O(e^{\alpha t})$ при $t \to +\infty$) обсуждается схема исследования, аналогичная использованной в работах [16–17], и делается вывод о представлении решения в виде линейной комбинации конечного набора функций $t^m e^{p_k t}$, где p_k – корни квазиполинома, $p = e^p$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} p \le \alpha$.

В упомянутой выше работе [6] для уравнения $\dot{x}(t) = x(t+h)$ ($h \in R$) в предположении, что решения – целые функции показательного типа, также удалось установить конечномерность пространства решений.

Очень эффективно выделение конечномерного пространства экспоненциально-оцененных решений для уравнений с так называемым "малым" отклонением. Эти исследования начаты работами **Ю.А. Рябова** [18–19] (см. также обзор [20]). Оказалось, что точный выбор показателя экспоненты в оценке скорости роста решений на бесконечности плюс ограничения на "малость" отклонения аргумента обеспечивают для скалярных уравнений одномерность пространства решений. Особенно впечатляет, что результат справедлив и для неавтономных уравнений.

Приведем формулировку одной из теорем такого типа.

Пусть $\sup\limits_t |a(t)| = a_0$, $\sup\limits_t |h(t)| = h_0$ и $a_0 h_0 < 1/e$. *Тогда для любых* $t_0, x_0 \in R$ *существует ровно одно решение уравнения* $\dot{x}(t) = a(t)x(t-h(t))$, *определенное на всей оси и удовлетворяющее условиям* $x_0 = x(t_0)$, $x(t) = O(e^{|t|/h_0})$ ($|t| \to \infty$).

В настоящей работе также реализуется подход к исследованию уравнений с последействием, основанный на априорном выборе пространства решений, имеющих на R_- заданную скорость роста. Но, в отличие от перечисленных выше работ, поточечная экспоненциальная оценка решения заменяется интегральной. В таких пространствах также удалось найти эффективные условия разрешимости и описать структуру пространства решений.

2. Основной результат

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение с ограниченным последействием

$$\dot{x}(t) + \int_0^{\omega} x(t-s)\,dr(s) = 0, \quad t \in R, \qquad (3)$$

где $\omega > 0$, функция $r : [0, \omega] \to C$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$. Найдем условия разрешимости и структуру пространства решений уравнения (3) в пространствах

$$L^{\alpha} = \left\{ x \in D_{loc} : \int_{-\infty}^{0} |x(t)| e^{-\alpha t}\, dt < \infty \right\},$$

где α – произвольное вещественное число.

Важную роль при изучении уравнения (3) играет его *характеристическая функция*:

$$g(p) = p + \int_0^{\omega} e^{-p\xi}\, dr(\xi), \quad p \in C.$$

Пусть $\{p_n\}_{n \in N_0}$ – множество всех корней функции g, занумерованных так, чтобы $\operatorname{Re} p_0 \ge \operatorname{Re} p_1 \ge \ldots \ge \operatorname{Re} p_n \ge \ldots$. Порядок нумерации корней с одинаковой вещественной частью произволен. Через k_n обозначим кратность корня p_n.

Теорема 1. *Любое решение уравнения* (3) *в пространстве* L^{α} *представимо в виде:*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_n > \alpha} q_n(t) e^{p_n t},$$

где q_n *– полином степени* $k_n - 1$ *с произвольными комплексными коэффициентами.*

Остановимся кратко на основных моментах доказательства теоремы 1. Любое решение уравнения (3) на R_+ имеет (см., напр., [21]), асимптотическое представление в виде линейной комбинации экспоненциальных решений, соответствующих последовательности $\{p_n\}_{n \in N_0}$. Вычитая из этой суммы слагаемые, принадлежащие L^{α}, доказываем, что остаток суммы равен нулю (это удается сделать за счет приведения исходного уравнения к виду, допускающему применение преобразования Фурье).

Следствие 1. *Уравнение* (3) *имеет в пространстве* L^{α} *только тривиальное решение, если и только если* $\alpha \ge \operatorname{Re} p_0$.

3. Примеры

Сравним теорему 1 с результатами, указанными в п. 1.

1. В работах [14, 15] в качестве пространства решений рассматривалось пространство

$$P_m = \left\{ x \in D_{loc} : \sup_{t \in R} \frac{|x(t)|}{1 + |t|^m} < \infty \right\},$$

где m – любое целое неотрицательное число. Поскольку при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{0} |x(t)| e^{\varepsilon t} dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{|x(t)|}{1+|t|^m} \left(1 + |t|^m\right) e^{\varepsilon t} dt \le$$

$$\le \left(\sup_{t \in R_-} \frac{|x(t)|}{1+|t|^m} \right) \int_{-\infty}^{0} \left(1 + |t|^m\right) e^{\varepsilon t} dt < \infty,$$

то $P_m \subseteq L^{-\varepsilon}$, причем ε можно выбрать сколь угодно малым.

Используя теорему 1, получаем, что любое решение уравнения (3) в пространстве $L^{-\varepsilon}$ представимо в виде:

$$x(t)=\sum_{\operatorname{Re} p_n>0} q_n(t)e^{p_n t}+\sum_{\operatorname{Re} p_l=0} q_l(t)e^{p_l t},$$

где q_n – полином степени k_n-1. Если добавить условие $x\in P_m$, то первая сумма отбрасывается и полученный результат совпадает с представлением решения, установленным в работах [14, 15].

2. В работах [6, 16] и [1, с. 56] рассматривалось пространство решений

$$L_\infty^\alpha=\left\{x\in D_{loc}:\sup_{t\in R_-}\left(\left|x(t)\right|e^{-\alpha t}\right)<\infty\right\},$$

где α – любое вещественное число. Поскольку при любом $\varepsilon>0$ справедлива оценка

$$\int_{-\infty}^{0}\left|x(t)\right|e^{-(\alpha-\varepsilon)t}dt\le$$

$$\le\sup_{t\in R_-}\left(\left|x(t)\right|e^{-\alpha t}\right)\int_{-\infty}^{0}e^{\varepsilon t}dt<\infty,$$

то $L_\infty^\alpha\subseteq L^{\alpha-\varepsilon}$.

С помощью теоремы 1 получаем, что любое решение уравнения (3) в пространстве L_∞^α представимо в виде:

$$x(t)=\sum_{\operatorname{Re} p_n>\alpha} q_n(t)e^{p_n t}+\sum_{\operatorname{Re} p_l=\alpha} c_l e^{p_l t},$$

где q_n – произвольный полином степени k_n-1, c_l – любые комплексные числа. Данный результат совпадает с представлением решения, полученным в работах [6, 16] и [1, с. 56].

3. Возьмем в качестве пространства решений пространство Степанова–Массера:

$$M_{m,p}^\alpha=\left\{x\in D_{loc}:\sup_{t\in R_-}\int_t^{t+1}\frac{|x(s)|^p}{1+|s|^m}e^{-\alpha s}ds<\infty\right\},$$

где $\alpha\in R$, $1\le p<\infty$, $m\in N_0$. При любом $\varepsilon>0$ справедливы неравенства:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{|x(s)|^p}{1+|s|^m}e^{-(\alpha-\varepsilon)s}ds\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_{-k-1}^{-k}\frac{|x(s)|^p}{1+|s|^m}e^{-(\alpha-\varepsilon)s}ds\right)\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-\varepsilon k}\int_{-k-1}^{-k}\frac{|x(s)|^p}{1+|s|^m}e^{-\alpha s}ds\right)\le$$

$$\le\left(\sup_{t\in R_-}\int_t^{t+1}\frac{|x(s)|^p}{1+|s|^m}e^{-\alpha s}ds\right)\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\varepsilon k}<\infty.$$

Далее, с учетом неравенства Гёльдера имеем:

$$\int_{-\infty}^{0}\left|x(t)\right|e^{-(\alpha/p-\varepsilon)t}dt\le$$

$$\le\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{|x(t)|^p}{1+|t|^m}e^{-(\alpha-\varepsilon/2)t}dt\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{0}\left(1+|t|^m\right)^{q/p}e^{\varepsilon qt/2}dt\right)^{1/q}<\infty,$$

где $1/p+1/q=1$. Следовательно, $M_{m,p}^\alpha\subseteq L^{\alpha/p-\varepsilon}$. С помощью теоремы 1 получаем, что любое решение уравнения (3) в пространстве $M_{m,p}^\alpha$ представимо в виде:

$$x(t)=\sum_{p\operatorname{Re} p_n>\alpha} q_n(t)e^{p_n t}+\sum_{p\operatorname{Re} p_l=\alpha}\tilde{q}_l(t)e^{p_l t},$$

где q_n – полином степени k_n-1, $\tilde{q}_l$ – полином степени $\min\{k_l-1,m\}$.

Отметим, что разрешимость уравнения (2) в пространстве $M_{m,p}^\alpha$ анонсировалась в работе [16], но строго была доказана только в пространстве L_∞^α. Как показано выше, разрешимость в пространстве $M_{m,p}^\alpha$ может быть исследована (на основе теоремы 1) по крайней мере для уравнений вида (3).

4. Краевая задача для сингулярного уравнения

Покажем, как работают полученные выше результаты на примере сингулярного уравнения с линейно-преобразованным аргументом, аналогичного уравнениям из работы [2]:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)+\frac{a}{t}x\left(\frac{t}{b}\right)=0,\ t\in(0,1],\\ x(+0)=0,\end{cases}\tag{4}$$

где $a,b\in R$, $b>1$.

В соответствии с [2], будем искать решение задачи (4) в пространстве абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций, для которых

$$\int_0^1 |\dot{x}(t)|^p dt < \infty \ (1 < p < \infty).$$

С помощью замены $t = b^u$, $x(b^u) = y(u)$ сведем уравнение (4) к уравнению вида (3):

$$y'(u) + (a\ln b)\,y(u-1) = 0, \quad u \in R_-. \quad (5)$$

Выберем пространство, в котором удобно искать решение уравнения (5). Решение уравнения (4) непрерывно на отрезке $[0,1]$, а значит, ограничено на нем. Следовательно, $y \in L_\infty^0$. Условие $x(+0) = 0$ переходит, соответственно, в условие $y(-\infty) = 0$.

Отметим ряд свойств нулей характеристической функции уравнения (5), лежащих в правой полуплоскости и на мнимой оси.

Во-первых, все они простые.

Во-вторых, только корень с наибольшей вещественной частью может быть вещественным.

В-третьих, если два корня имеют одинаковую вещественную часть, то они – комплексно-сопряженные.

Используя пример 2 из раздела 3, и учитывая условие $y(-\infty) = 0$, получаем, что решение уравнения (5):

a) при $a\ln b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ только тривиальное;

b) при $a\ln b \in \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right]$ представимо в виде

$$y(u) = A_0 e^{\beta_0 u},$$

где β_0 – вещественный корень характеристической функции;

c) при $a\ln b \in \left(-\frac{3\pi}{2} - 2\pi m, \frac{\pi}{2} - 2\pi m\right]$, $m \in N$, представимо в виде

$$y(u) = A_0 e^{\beta_0 u} + \\ + \sum_{n=1}^{m} e^{\beta_n u}\left(A_n \cos(\gamma_n u) + B_n \sin(\gamma_n u)\right),$$

где $\beta_0 \in R$, $\beta_n = \operatorname{Re} p_{2n} = \operatorname{Re} p_{2n+1}$, $\gamma_n = |\operatorname{Im} p_{2n}| = |\operatorname{Im} p_{2n+1}|$;

d) при $a\ln b \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \frac{5\pi}{2} + 2\pi m\right)$, $m \in N_0$, представимо в виде

$$y(u) = \sum_{n=1}^{m+1} e^{\beta_n u}\left(A_n \cos(\gamma_n u) + B_n \sin(\gamma_n u)\right),$$

где $\beta_n = \operatorname{Re} p_{2n-1} = \operatorname{Re} p_{2n}, \gamma_n = |\operatorname{Im} p_{2n-1}| = |\operatorname{Im} p_{2n}|$.

Во всех представлениях $\beta_n > 0$, а A_n, B_n – произвольные вещественные числа.

Возвращаемся к уравнению (4) и заключаем, что его решение:

a) при $a\ln b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ только тривиальное;

b) при $a\ln b \in \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right]$ представимо в виде

$$x(t) = A_0 t^{\frac{\beta_0}{\ln b}};$$

c) при $a\ln b \in \left(-\frac{3\pi}{2} - 2\pi m, \frac{\pi}{2} - 2\pi m\right]$, $m \in N$, представимо в виде

$$x(t) = A_0 t^{\frac{\beta_0}{\ln b}} + \sum_{n=1}^{m} t^{\frac{\beta_n}{\ln b}}\left(A_n \cos(\gamma_n \log_b t) + \right. \\ \left. + B_n \sin(\gamma_n \log_b t)\right);$$

d) при $a\ln b \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \frac{5\pi}{2} + 2\pi m\right)$, $m \in N_0$, представимо в виде

$$x(t) = \sum_{n=1}^{m+1} t^{\frac{\beta_n}{\ln b}}\left(A_n \cos(\gamma_n \log_b t) + \right. \\ \left. + B_n \sin(\gamma_n \log_b t)\right).$$

Отметим, что свойства производной решения задачи (4) не использовались при изучении структуры пространства решений. Найденные представления решений показывают, что условие $\int_0^1 |\dot{x}(t)|^p dt < \infty$ обеспечивается автоматически. Ограничения на p тем более не существенны, пространство решений не меняется при любом $1 \le p \le \infty$.

Список литературы

1. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

2. *Плаксина В.П., Плаксина И.М., Плехова Э.В.* Условия разрешимости задачи Коши для квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Тамбовского ун-та. 2015. Т. 20, вып. 5. С. 1364–1369.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
4. *Долгий Ю.Ф., Путилова Е.Н.* Продолжение назад решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием как некорректная задача // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 8. С. 1317–1323.
5. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
6. *Green J.W.* A note on the solutions of the equation $f'(x)=f(x+a)$ // Math. Mag. 1953. Vol. 26, № 3. P. 117–120.
7. *Robbins H.* Two properties of the function $\cos x$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. № 50. P. 750–752.
8. *Schürer F.* Über die Funktional-Differentialgleichungen $f'(x+1)=af(x)$ // Ber. Verhandlung. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig. Math.- phus. Kl. 1912. № 64. S. 167–236.
9. *Леонтьев А.Ф.* Дифференциально-разностные уравнения // Математический сборник. 1949. Т. 24, № 3. С. 347–374.
10. *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: ИЛ, 1961.
11. *Bruwier L.* Sur l'application du calcul symbolique a la resolution d'equations fonctionneles // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1948. № 17. P. 230–245.
12. *Dixon A.C.* On the solving nuclei of certain integral equations whose nuclei are homogeneous and of degree-1 and the solution of a class of linear functional equations // Proc. London. Math. Soc. 1928. Vol. 27, № 2. P. 233–272.
13. *Баландин А.С.* О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. 2015. Т. 20, вып. 5. С. 1044–1050.
14. *Schmidt E.* Über eine Klasse linearer funktionalen Differentialgleichungen // Math. Ann. 1911. № 70. P. 499–521.
15. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
16. *Pitt H.R.* On a class of integro-differential equations // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1944. Vol. 40. Part 3. P. 199–211.
17. *Зверкин А.М.* О полноте системы решений типа Флоке для уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 3. С. 474–478.
18. *Рябов Ю.А.* Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени // Тр. семинара по диф. ур-м с откл. арг. 1965. № 3. С. 153–164.
19. *Рябов Ю.А.* Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени // ДАН СССР. 1963. Т. 151, № 1. С. 52–54.
20. *Driver R.* On Ryabov's asymptotic characterisation of the solutions of quasi-linear differential equations with small delays // SIAM Review. 1968. Vol. 10, № 3. P. 329–341.
21. *Зубов В.И.* К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Известия вузов. Математика. 1958. № 6. С. 86–95.

On solvability of autonomous delay differential equations on the real axis

A. S. Balandin, V. V. Malygina
Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia
balandin-anton@yandex.ru; 8(342)2391564

The existence and structure of solutions of autonomous functional differential equations on the real axis are studied. A detailed survey of papers on the subject is given at the beginning of the article. It is established that the space of solutions to homogeneous equations whose solutions are in the given space of integrally bounded functions is of finite dimensionality. The basis of the space is formed by the exponential type solutions generated by roots of the characteristic equation. The key point in the proof of the main result is the expansion of the solution in series by the exponential system. On this basis the equation is transformed so that the Fourier transform can be used. The results obtained are used for the study of the boundary problem for the singular equation with delay.

Keywords: *autonomous delay differential equations; solvability on the axis; two-sided solution; space of functions with exponential weight.*