ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2015 Математика. Механика. Информатика
Вып. 4(31)

УДК 517.929

Об осциллирующих и знакоопределенных решениях одного класса функционально-дифференциальных уравнений

В. В. Малыгина, Т. Л. Сабатулина
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр., 29
mavera@list.ru; 8(342)2391564

Для неавтономных дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием получены эффективные условия положительности функции Коши и осцилляции решений. В случае постоянных коэффициентов и запаздываний найденные достаточные признаки образуют дихотомию свойств решений.

Ключевые слова: *функционально-дифференциальные уравнения; положительность функции Коши; осцилляция.*

1. Постановка задачи

Для обыкновенных дифференциальных уравнений задачи отыскания знакоопределенных и осциллирующих решений ставились и решались начиная с классических работ С.А.Чаплыгина [1].

Для функционально-дифференциальных уравнений эти задачи не утратили актуальности. Однако, в силу существенного расширения объекта и специфики, связанной с наличием у таких уравнений "памяти", исследование этих вопросов усложнилось и потребовало привлечения новых идей и методов [2–5].

1.1. Осциллирующие уравнения

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$\big(Lx\big)(t) \equiv \equiv \dot{x}(t) + \sum_{k=0}^{N} a_k(t)x(t - r_k(t)) = 0, \quad t \in R_+. \tag{1}$$

При отрицательных значениях аргумента полагаем $x(\xi) = \varphi(\xi)$. Под решением понимаем (см. [2]) непрерывное продолжение начальной функции φ, обращающее (1) в тождество.

Определение 1. *Будем называть решение уравнения* (1) *осциллирующим, если оно имеет на полуоси неограниченную последовательность нулей.*

Рассмотрим частный случай уравнения (1) при $a_k(t) \equiv a_k = const$, $r_k(t) \equiv r_k = const$. Полученному автономному уравнению поставим в соответствие характеристическую функцию $P(\lambda) = \lambda + \sum\limits_{k=0}^{N} a_k e^{-\lambda r_k}$. Следующий результат дает критерий осцилляции любого решения в терминах корней характеристической функции.

Предложение 1 [6]. *Все решения автономного уравнения* (1) *являются осциллирующими тогда и только тогда, когда характеристическая функция* $P(\lambda)$ *не имеет вещественных корней.*

Предложение 1 делает корректным введение понятия *осциллирующего автономного уравнения.* Однако в большинстве работ, по-

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-96050 р_урал_а).

священных осцилляции решений *произвольных* уравнений вида (1), авторы ставят задачу аналогичным образом [5–9], придерживаясь следующего определения.

Определение 2. *Будем называть уравнение* (1) *осциллирующим, если все его решения осциллируют.*

1.2. Положительность функции Коши

Рассмотрим соответствующее (1) неоднородное уравнение

$$\left(Lx\right)(t) = f(t), \quad t \in R_+, \tag{2}$$

доопределим x нулем при отрицательных значениях аргумента, отнесем функцию φ к правой части, а начальное условие будем задавать только в начальной точке (подробнее см. [3]). Тогда решение уравнения (2) при любой локально-суммируемой правой части f представляется в виде

$$x(t) = C(t,0)x(0) + \int_0^t C(t,s)f(s)ds,$$

а функция $C(t,s)$ (функция Коши) становится центральным объектом исследования [3, 4, 10, 11].

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, функция Коши для уравнений вида (1) не обязательно положительна, и одной из актуальных задач оказывается описание класса уравнений, у которых функция Коши положительна.

Существует широкий класс автономных уравнений вида (1), для которых осциллируемость решений и положительность функции Коши оказываются взаимно-дополнительными свойствами. Это позволяет получить для неавтономных уравнений два ряда достаточных признаков (осцилляции и положительности функции Коши соответственно), сходных и по формулировкам, и по методам доказательств.

В данной работе рассматривается класс функционально-дифференциальных уравнений, для которых удалось найти универсальную характеристику – функцию, определяющую и свойство знакоопределенности, и свойство осцилляции решений. Эта функция эффективно выстраивается по коэффициентам уравнения. Через ее верхнюю границу определяются условия положительности функции Коши, а через нижнюю – условия осцилляции решений. Для случая автономного уравнения верхняя и нижняя границы этой функции совпадают, и пространство параметров уравнения разбивается на два непересекающихся множества: область знакоопределенных и область осциллирующих решений. Их общей границей является известная константа $1/e$.

Часть приведенных в работе утверждений – известные результаты, полученные разными авторами существенно различными методами. На наш взгляд, важно, что все приведенные ниже признаки можно рассматривать с единых позиций, реализуя в разных вариантах *метод дифференциальных неравенств* [4, 10, 11].

2. Признаки знакоопределенности и осцилляции

Рассмотрим простейшее автономное уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t-r) = 0, \quad t \in R_+, \tag{3}$$

и соответствующий ему квазиполином [2] $P(\lambda) = -\lambda + ae^{\lambda r}$, $\lambda \in \Re$. Для уравнения (3) давно и хорошо известны результаты о знакоопределенности и осцилляции решений.

Теорема 1 [2]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- $ar \le 1/e$;
- *функция Коши уравнения* (3) *положительна;*
- *квазиполином* $P(\lambda)$ *имеет вещественные корни.*

Теорема 2 [9]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- $ar > 1/e$;
- *уравнение* (3) *является осциллирующим;*
- *квазиполином* $P(\lambda)$ *не имеет вещественных корней.*

Рассмотрим т.н. "полуавтономное" уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t-r(t)) = 0, \quad t \in R_+, \tag{4}$$

где функция r измерима, ограничена и неотрицательна, $r = \inf_t r(t)$, $R = \sup_t r(t)$.

Применим теорему 1 к исследованию уравнения (4). Нам понадобится также утверждение, известное в литературе (см. [4, 10, 11]) как "лемма о дифференциальном неравенстве". Приведем его здесь в удобной для нас формулировке.

Предложение 2. *Пусть в уравнении* (1) $a_k(t) \ge 0$ *при всех* $k = \overline{0,N}$ *и существует такая абсолютно непрерывная на* R *функция* $v(t) > 0$, *что* $\left(Lv\right)(t) \le 0$. *Тогда функция Коши уравнения* (1) *положительна.*

Теорема 3. *Если* $aR \le 1/e$, *то функция Коши уравнения* (4) *положительна.*

Доказательство. В случае $a \le 0$ положительность функции Коши очевидна. Если же $a > 0$, то из теоремы 1 следует, что в предположениях доказываемого утверждения квазиполином $P(\lambda) = -\lambda + ae^{\lambda R}$ имеет вещественный корень $\lambda = \lambda_0$, причем $\lambda_0 > 0$. Положим $v(t) = e^{-\lambda_0 t} > 0$ и воспользуемся предложением 2. Легко видеть, что

$$\left(Lv\right)(t) \equiv \dot{v}(t) + av(t - r(t)) =$$
$$= e^{-\lambda_0 t}\left(-\lambda_0 + ae^{\lambda_0 r(t)}\right) \le e^{-\lambda_0 t} P(\lambda_0) = 0 . \ \blacktriangle$$

Теорема 4. *Если* $ar > 1/e$, *то уравнение* (4) *является осциллирующим.*

Доказательство. Предположим, что существует неосциллирующее решение уравнения (4) $v = v(t)$. Это означает, что найдется такое $T \ge 0$, что при всех $t \ge T$ справедливы неравенства $v(t) > 0$ и (в силу уравнения (4)) $\dot{v}(t) < 0$, т.е. функция v монотонно убывает. Так как $r(t) \ge r$, то $v(t - r(t)) \ge v(t - r)$, следовательно,

$$\left(Lv\right)(t) \equiv \dot{v}(t) + av(t - r) \le$$
$$\le \dot{v}(t) + av(t - r(t)) = 0 .$$

В силу предложения 1 получаем, что функция Коши уравнения (3) положительна, что, согласно теореме 1, эквивалентно неравенству $ar \le 1/e$. Получили противоречие с условием. $\blacktriangle$

Теорему 4 можно очевидным образом усилить, заменив точную нижнюю грань нижним пределом.

Следствие 1. *Если* $\varliminf_{t\to\infty} r(t) > 1/ae$, *то уравнение* (4) *является осциллирующим.*

Замечание. В теореме 3 нельзя заменить точную верхнюю грань верхним пределом, как показывает следующий пример.

Пример. Рассмотрим последовательность $\omega_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n$, $n \in N$.

Очевидно, что $\omega_n > 1/e$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 1/e$. Из теоремы 2 следует, что при любом $r = \omega_n$ любое решение уравнения (3) осциллирует.

Пусть в уравнении (4) $a = 1$. Рассмотрим решение уравнения с начальным условием $x(0) = 1$ и нулевой начальной функцией. Положим $r(t) = \omega_1$ и построим решение от начальной точки 0 до первого нуля t_1. Далее положим $r(t) = \omega_2$, построим решение уравнения (1) при $t > t_1$ до первого нуля t_2 и т.д. В итоге получим уравнение, функция Коши которого не только не сохраняет знак, но даже осциллирует. При этом $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = 1/e$.

Перейдем к уравнению с переменным коэффициентом:

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \in R_+ . \qquad (5)$$

Здесь a – локально суммируемая, а r – измеримая неотрицательная функция.

Теорема 5. *Пусть* $a(t) \ge 0$ *и*

$$\sup_t \int_{t-r(t)}^{t} a(s)ds \le 1/e .$$

Тогда функция Коши уравнения (5) *положительна.*

Доказательство.

Пусть $\omega = \sup\limits_t \int_{t-r(t)}^{t} a(s)ds$. Так как $\omega \le 1/e$, то по теореме 1 квазиполином $-\lambda + e^{\lambda\omega}$ имеет вещественный корень $\lambda = \lambda_0$, причем $\lambda_0 > 0$.

Положим

$$v(t) = e^{-\lambda_0 \int_0^t a(s)ds}$$

и подставим в (5):

$$\left(Lv\right)(t) \equiv a(t)v(t)\left(-\lambda_0 + e^{\lambda_0 \int_{t-r(t)}^{t} a(s)ds}\right) \le$$
$$\le a(t)v(t)\left(-\lambda_0 + e^{\lambda_0\omega}\right) = a(t)v(t)P(\lambda_0) = 0 .$$

Ссылка на предложение 2 завершает доказательство. ▲

Теорема 6 [5]. *Пусть* $a(t) \ge 0$,

$$\varlimsup_{t\to\infty} \int_{t-r(t)}^{t} a(s)ds > 1/e.$$

Тогда уравнение (5) *является осциллирующим.*

Доказательство.

Обозначим $\varphi(t) = \int_0^t a(s)ds$. В силу неотрицательности a, φ – монотонно возрастающая абсолютно непрерывная функция.

Пусть $E_t = \{s \in R_+ : \varphi(s) = \varphi(t)\}$, $t \in R_+$. Легко видеть, что $E_t = [\alpha, \beta]$, причем возможны ситуации как $\alpha = \beta$, так и $\alpha < \beta$. Заметим, что второму случаю соответствует не более чем счетное множество отрезков. Занумеруем их в любом порядке и положим

$$E = \bigcup_n (\alpha_n, \beta_n].$$

Тогда $\varphi(R_+ \setminus E) = \varphi(R_+)$, а поскольку φ является взаимно-однозначным отображением множества $R_+ \setminus E$ на его образ, то на $\varphi(R_+)$ определена обратная функция φ^{-1}. Переопределим запаздывание в уравнении (5) следующим образом:

$$r_0(t) = \begin{cases} r(t), \text{ если } t - r(t) \notin E, \\ t - \alpha_n, \text{ если } t - r(t) \in [\alpha_n, \beta_n]. \end{cases}$$

Отметим, что при $r(t) = r_0(t)$ уравнение (5) можно рассматривать на множестве $R_+ \setminus E$, и оно является осциллирующим одновременно с исходным уравнением.

Сделаем в уравнении (5) замену переменных $u = \varphi(t)$, $x(\varphi^{-1}(u)) = y(u)$. Функция y является решением уравнения

$$y'(u) + y(u - \rho(u)) = 0, \quad u \in R_+,$$

где $\rho(u) = \int_{\varphi^{-1}(u) - r(\varphi^{-1}(u))}^{\varphi^{-1}(u)} a(s)ds$, т.е. получаем уравнение вида (4), к которому можно применить следствие 1. Осталось заметить, что

$$\varlimsup_{u\to\infty} \rho(u) = \varlimsup_{t\to\infty} \int_{t-r_0(t)}^{t} a(s)ds = \varlimsup_{t\to\infty} \int_{t-r(t)}^{t} a(s)ds. \text{▲}$$

3. Некоторые обобщения

Теперь рассмотрим уравнение (5) с коэффициентом любого знака. Введем традиционные обозначения:

$$a^+ = \max\{a, 0\},\ a^- = \min\{a, 0\}.$$

Теорема 7. *Если положительна функция Коши уравнения*

$$\dot{x}(t) + a^+(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \in R_+, \qquad (6)$$

то функция Коши уравнения (5) *также положительна.*

Доказательство. Пусть $C(t,s)$ и $C^+(t,s)$ – функции Коши уравнений (5) и (6) соответственно. Так как $a(t) = a^+(t) + a^-(t)$, то $C(t,s)$ удовлетворяет при всех $t \ge s$ уравнению:

$$C_t'(t,s) + a^+(t)C(t - r(t), s) = -a^-(t)C(t - r(t), s),$$

или, в эквивалентной интегральной форме,

$$C(t,s) = C^+(t,s) - \qquad (7)$$

$$-\int_s^t C^+(t,\zeta)a^-(\zeta)C(\zeta - r(\zeta), s)d\zeta.$$

По условию теоремы, $C^+(t,s) > 0$. Допустим, что при некотором $s \in R_+$ функция $C(t,s)$ меняет знак. Обозначим через t_0 ее первый нуль и положим в формуле (7) $t = t_0$. Так как $a^-(t) \le 0$, то второе слагаемое в правой части формулы (7) неотрицательно. Первое слагаемое положительно по условию теоремы. Следовательно, правая часть (7) положительна, что невозможно, так как $C(t_0, s) = 0$. Следовательно, функция Коши уравнения (5) положительна. ▲

Объединяя результаты теорем 5 и 7, легко получить следующий точный и эффективно проверяемый признак положительности функции Коши.

Следствие 2. *Пусть*

$$\sup_t \int_{t-r(t)}^{t} a^+(s)ds \le 1/e.$$

Тогда функция Коши уравнения (5) *положительна.*

Полученные результаты можно применить к исследованию уравнения более общего вида:

$$\dot{x}(t)+a(t)x(t)+b(t)x(t-r(t))=0, \quad t\in R_+, \qquad (8)$$

где a и b – локально суммируемые функции, r – измеримая неотрицательная функция.
Сделаем в уравнении (8) замену переменных

$$x(t)=e^{-\int\limits_0^t a(s)ds}y(t).$$

Получаем

$$\dot{y}(t)+p(t)y(t-r(t))=0, \quad t\in R_+, \qquad (9)$$

где $$p(t)=b(t)e^{\int\limits_{t-r(t)}^t a(s)ds}.$$

Заметим, что нули функций x и y совпадают. Следовательно, найдя условия знакоопределенности и осцилляции решений для уравнения (9), мы установим аналогичные свойства для решений уравнения (8). С другой стороны, уравнение (8) имеет вид (5), и мы можем применить к нему результаты, установленные выше. Наиболее интересными являются теорема 6 и следствие 2, получим их аналоги для уравнения (8).

Теорема 8 [10]. *Пусть*

$$\sup_t \int\limits_{t-r(t)}^t b^+(s)e^{\int\limits_{s-r(s)}^s a(\zeta)d\zeta}ds\le 1/e.$$

Тогда функция Коши уравнения (8) *положительна.*

Теорема 9. *Пусть* $b(t)\ge 0$,

$$\varliminf_{t\to\infty} \int\limits_{t-r(t)}^t b(s)e^{\int\limits_{s-r(s)}^s a(\zeta)d\zeta}ds> 1/e.$$

Тогда уравнение (8) *является осциллирующим.*

Список литературы

1. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 103 с.
2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
4. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во ПГУ, 2001. 230 с.
5. *Györi I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations with applications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991.
6. *Трамов М.И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1975, № 3. С.92–96.
7. *Tang X.H.* Oscillation of first order delay differential equations with distributed delay. J. Math. Anal. Appl. 2004. № 289. P. 367–378.
8. *Berezansky L.*, *Braverman E.* On some constants for oscillation and stability of delay equations. Proc. Amer. Math. Soc., 2011. Vol. 139, № 11. P. 4017–4026.
9. *Коплатадзе Р.Г.*, *Чантурия Т.А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения. 1982. № 8. С. 1463–1465.
10. *Гусаренко С.А., Домошницкий А.И.* Об асимптотических и осцилляционных свойствах линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференциальные уравнения. 1989. № 12. С. 2090–2103.
11. *Чудинов К.М.* Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнений с последействием // Известия вузов. Математика. 2014. № 4. С.52–61.

On the oscillation and fixed sign properties of solutions for a class of functional differential equations

V. V. Malygina, T. L. Sabatulina
Perm National Research Polytechnic University, Russia, 614990, Perm, Komsomolsky ave., 29

mavera@list.ru; 8(342) 2391564

Effective conditions of the positiveness of the Cauchy function and the oscillation of solutions for nonautonomous differential equations with concentrated delay are obtained. In the case of constant coefficients and delays the obtained sufficient conditions generate a dichotomy of the properties of solutions.

Key words: *functional differential equations; positiveness of the Cauchy function; oscillation.*