МАТЕМАТИКА

УДК 517.988

Об одном обобщенном уравнении пантографа

А. Р. Абдуллаев
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29

Е. А. Скачкова
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
skachkovaea@gmail.com; 8 (342) 2-396-345

Рассматривается периодическая краевая задача для одного обобщенного уравнения типа пантографа. Получены новые достаточные условия разрешимости задачи.

Ключевые слова: *обобщенное уравнение пантографа; периодические решения.*

Введение

Функционально-дифференциальное уравнение первого порядка со сжатием или растяжением аргумента вида

$$x'(t) = ax(kt) + bx(t),$$

где a и b – постоянные коэффициенты (действительные или комплексные) в литературе называется "уравнение пантографа". Такое название уравнение получило благодаря работе Дж. Р. Окендона и А.Б. Тайлера [1], опубликованной в 1971 г. и посвященной описанию динамики токоприемника (пантографа) электровоза. К уравнению пантографа приводят задачи из самых разных областей: техники, биологии, астрофизики, теории чисел.

Систематическое изучение уравнения пантографа началось с работ Л. Фокса, Дж. Р. Окендона, А.Б. Тайлера [2], Т. Като, Дж. Б. Маклеода [3]. Различные обобщения этого уравнения изучались, например, в работах [4–7].

В общем случае, уравнение, допускающее запись в виде

$$F(t, x(k_0 t), x'(k_1 t), \ldots, x^{(n)}(q_n t)) = 0,$$

в литературе принято называть обобщенным уравнением пантографа.

В предлагаемой работе исследуется на разрешимость обобщенное уравнение пантографа с периодическими краевыми условиями:

$$x''(t) + a(t)x'(k_1 t) + b(t)x(k_2 t) = f(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x(l), \quad x'(0) = x'(l), \quad (2)$$

где $t \in [0;l]$ функции $a, b, f : [0;l] \to R^1$, $k_i \in (0,1], i = \overline{1,2}$.

1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Уточним основные понятия и термины, используемые в статье. Пусть $L_p = L_p[0;l]$, $1 < p < \infty$ – пространство суммируемых в p-ой степени функций $y : [0,l] \to R$ с нормой $\|y\|_p = \left(\int_0^l |y(s)|^p ds\right)^{1/p}$; $W_p = W_p[0;l]$ – пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x:[0,l]\to R^1$ таких, что $x''\in L_p$, с нормой $\|x\|_{W_p}=|x(0)|+|x'(0)|+\|x''\|_p$; $L_\infty=L_\infty[0;l]$ – пространство измеримых и ограниченных в существенном функций $x:[0,l]\to R$ с нормой $\|x\|_\infty=\underset{t\in[a;b]}{vrai\sup}|x(t)|$.

Обозначим через W_p^0 пространство

$$W_p^0=\{x\in W_p[0;l]/x(0)=x(l),x'(0)=x'(l)\}$$

с нормой пространства W_p.

Всюду в статье q – сопряженный с p показатель, т.е. такой, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1<q<\infty$.

Определение. Под решением задачи (1), (2) будем понимать всякую функцию $x\in W_p[0;l]$, удовлетворяющую почти всюду на $[0;l]$ уравнению (1) и периодическим краевым условиям задачи (2).

Задача (1), (2) допускает в пространстве W_p^0 запись в виде операторного уравнения

$$Lx=Fx, \tag{3}$$

где операторы $L,F:W_p^0\to L_p$ определяются следующим образом:

$$(Lx)(t)=x''(t),$$

$$(Fx)(t)=-a(t)x'(k_1t)-b(t)x(k_2t)+f(t).$$

Здесь и далее $a,b_j\in L_\infty$, $f\in L_p$.

Для линейного оператора $L:X\to Y$, где X,Y – банаховы пространства, через $\ker L$ и imL соответственно обозначим ядро и образ оператора.

Нам потребуется понятие обобщенно обратного к оператору L оператора. Пусть $P:X\to X$ – проектор на ядро оператора L и $P^C=I-P$ – дополнительный проектор. Понятие обобщенно обратного оператора имеет различные трактовки, в работе мы будем следовать определению, сформулированному в [8].

Определение. Оператор

$$K_p:imL\to X$$

будем называть обобщенно обратным к оператору $L:X\to Y$, ассоциированным с проектором *P*, если справедливы равенства:

1) $LK_p=I_0$, где $I_0:imL\to Y$ – оператор естественного вложения;

2) $K_pL=P^c$;

3) $P^cK_p=K_p$.

Следующая лемма дает некоторые характеристики оператора L, которые потребуются нам далее. Приведем ее здесь без доказательства.

Лемма 1. Для оператора $L:W_p^0\to L_p$ справедливы следующие утверждения:

1. Ядро и образ оператора L определяются равенствами

$$\ker L=\{x\in W_p^0\ /\ x(t)\equiv C, C\in R\},$$

$$imL=\{y\in L_p\ /\int_0^l y(\tau)d\tau=0\}.$$

2. Операторы $P:W_p^0\to W_p^0$ и $Q:L_p\to L_p$, определяемые равенствами

$$Px=x(0),\ Qy=y-\frac{1}{l}\int_0^l y(s)ds,$$

являются проекторами соответственно на ядро и образ оператора L.

3. Обобщенно обратный для оператора L, ассоциированный с проектором P, имеет вид

$$K_Py=\int_0^t(t-s)y(s)ds+\frac{t}{l}\int_0^l sy(s)ds$$

и его норма удовлетворяет неравенству

$$\|K_P\|\le 1+\sqrt[q]{\frac{l}{q+1}}.$$

Для определения условий разрешимости уравнения (3), а следовательно, и задачи (1), (2), воспользуемся следующей теоремой.

Для удобства дальнейшего изложения работы приведем формулировку теоремы в удобной для нас редакции.

Теорема 1 [9]. Пусть $X=\ker L\oplus X_0$ – разложение в прямую сумму замкнутых подпространств и выполнены следующие условия:

1) L – нетеров;

2) F – вполне непрерывен, его норма удовлетворяет оценке:

$$\|Fx\|_Y\le\alpha+\beta\|x\|_X;$$

3) существуют такие числа γ, $\delta \ge 0$, что для каждого элемента $x_0 \in X_0$ существует элемент $u \in \ker L$, удовлетворяющий требованиям $F(x_0 + u) \in imL$, $\|u\| \le \gamma \|x_0\| + \delta$;

4) $\beta(1+\gamma)\|K_P\| < 1$.

Тогда уравнение (3) имеет хотя бы одно решение.

Нам потребуется следующая

Лемма 2. Для любого элемента $x \in W_p$ справедливы неравенства:

$$|x(kt)| \le \alpha_0 \|x\|_{W_p}, \ |x'(kt)| \le \alpha_1 \|x\|_{W_p},$$

где $$\alpha_0 = \max\left\{1; kl; kl\sqrt[q]{\frac{kl}{q+1}}\right\},$$

$$\alpha_1 = \max\left\{1; \sqrt[q]{kl}\right\}.$$

Доказательство. Для доказательства первого неравенства леммы используем представление

$$x(kt) = x(0) + kt\,x'(0) + \int_0^{kt} (kt - s)x''(s)ds.$$

Получим

$$|x(kt)| \le |x(0)| + kt|x'(0)| + \int_0^{kt} |(kt-s)x''(s)|ds \le$$

$$\le |x(0)| + kl|x'(0)| + kl\sqrt[q]{\frac{kl}{q+1}}\|x''\|_p \le$$

$$\le \alpha_1 \|x\|_{W_p}.$$

Аналогично доказывается второе неравенство. Лемма доказана.

2. Теорема существования

Сформулируем и докажем теорему существования в терминах исходной задачи.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\int_0^l f(t)dt = 0$;

2) $\int_0^l b(t)dt \ne 0$;

3) $\beta(1+\gamma) < 1$;

где $\beta = \sqrt[p]{l}(\widetilde{a}\alpha_{11} + \widetilde{b}\alpha_{02})$, $\gamma = \dfrac{\beta\sqrt[q]{l}}{\left|\int_0^l b(t)dt\right|}$,

$$\alpha_{11} = \max\left\{1; \sqrt[q]{k_1 l}\right\},$$

$$\alpha_{02} = \max\left\{1; k_2 l; k_2 l\sqrt[q]{\frac{k_2 l}{q+1}}\right\},$$

$$\widetilde{a} = \|a\|_\infty, \ \widetilde{b} = \|b\|_\infty.$$

Тогда задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение в пространстве $W_p[0;l]$.

Доказательство. Для доказательства теоремы проверим условия 1)–4) теоремы 1.

Очевидно, что условие 1) теоремы 1 справедливо.

Нетрудно видеть, что оператор

$$F : W_p^0 \to L_p,$$

$$(Fx)(t) = -a(t)x'(k_1 t) - b(t)x(k_2 t) + f(t)$$

является вполне непрерывным и для его нормы справедлива оценка:

$$\|Fx\|_p \le \alpha + \beta\|x\|_{W_p^0},$$

где $\alpha = \|f(t)\|_p$, $\beta = \sqrt[p]{l}(\widetilde{a}\alpha_{11} + \widetilde{b}\alpha_{02})$.

Действительно, с применением леммы 2, получим

$$\|Fx\|_p \le \|-a(t)x'(k_1 t) - b(t)x(k_2 t) + f(t)\|_p \le$$

$$\le \|f(t)\|_p + \sqrt[p]{l}(\widetilde{a}\alpha_{11} + \widetilde{b}\alpha_{02})\|x\|_{W_p} = \alpha + \beta\|x\|_{W_p^0}.$$

Таким образом, условие 2) теоремы 1 выполнено.

Для проверки выполнения третьего условия теоремы 1 применим методику, аналогичную методике, использованной авторами в работе [10]. Рассмотрим уравнение

$$Q^C F(x+u) = 0, \qquad (4)$$

где $u \in \ker L$, x – некоторый элемент X_0. Если при каждом фиксированном $x \in X_0$ данное уравнение имеет решение, то существует оператор T, удовлетворяющий условию $F(x+Tx) \in imL$. Составим уравнение (4) для нашего случая:

$$\int_0^l \big(f(t) - a(t)x'(k_1 t) - b(t)x(k_2 t) - b(t)u\big)dt = 0,$$

где $u \in \ker L$.

В качестве оператора $T : X_0 \to \ker L$ возьмем оператор

$$Tx = -\frac{1}{\int\limits_0^l b(t)dt} \int\limits_0^l \left(a(t)x'(k_1 t) + b(t)x(k_2 t)\right)dt.$$

Этот оператор существует, что следует из условий 1) и 2) теоремы. Оценим норму этого оператора.

Имеем

$$\|Tx\|_{W_p^0} \le \frac{1}{\left|\int\limits_0^l b(t)dt\right|}\left(\widetilde{a}\int\limits_0^l |x'(k_1 t)|dt + \widetilde{b}\int\limits_0^l |x(k_2 t)|dt\right) \le$$

$$\le \frac{\beta\sqrt[q]{l}}{\left|\int\limits_0^l b(t)dt\right|}\|x\|_{W_p^0} = \gamma\|x\|_{W_p^0}.$$

Выполнение условия 3) теоремы 1 доказано.

Справедливость условия 4) теоремы 1 немедленно следует из леммы 1 (утверждение 3 об оценке нормы обобщенно обратного оператора K_P) и условия 4) теоремы.

Следовательно, существует хотя бы одно решение операторного уравнения (3), а значит и рассматриваемой периодической краевой задачи (1), (2). Теорема доказана.

3. Обсуждение результатов и некоторые обобщения

В этом пункте рассмотрим некоторые следствия из теоремы 2, а также проведем анализ полученных условий разрешимости.

Для содержательного анализа полученного результата рассмотрим следующий частный случай.

Рассмотрим уравнение

$$x''(t) + b\,x(kt) = f(t), \qquad (5)$$

полагая $p = q = 2$. Здесь $t \in [0; l]$ функция $f \in L_2$ $b \in R^1$, $b \ne 0$, $k \in (0,1]$. В качестве анализируемых параметров выступят параметры b, k, l.

Условия разрешимости периодической краевой задачи для уравнения (5) сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\int\limits_0^l f(t)dt = 0$;

2) $b \ne 0$;

3) $\sqrt{l}|b|\overline{\alpha}\left(1 + \overline{\alpha}\right) < 1$;

где $\overline{\alpha} = \max\left\{1; kl; kl\sqrt{\frac{kl}{3}}\right\}$.

Тогда задача (5), (2) имеет хотя бы одно решение в пространстве $W_2[0; l]$.

В случае, когда параметры задачи таковы, что $kl \le 1$ условие 3) теоремы 3 принимает вид: $2\sqrt{l}|b| < 1$.

На рис. 1 изображена область разрешимости задачи (5), (2) в рассматриваемом случае.

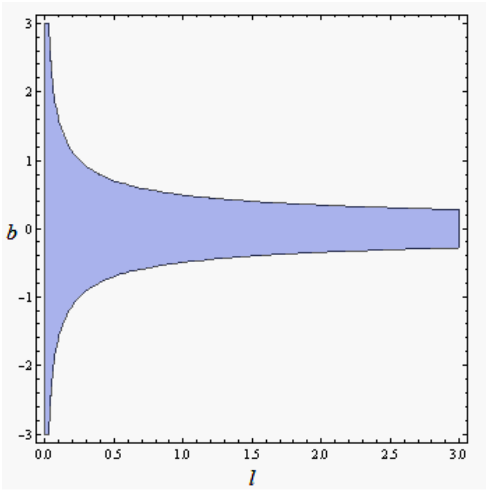

Рис. 1. *Область разрешимости задачи (5), (2) по параметрам* (l, b) *в случае* $kl \le 1$ *при* $k = 0{,}1$

Из рис. 1 видно, что с увеличением длины промежутка, на котором рассматривается периодическая краевая задача, параметр b должен быть как можно меньше.

Считаем, что особенность этого случая состоит в том, что коэффициент «сжатия» k не присутствует в условиях разрешимости.

В случае, когда $1 < kl \le 3$ условие 3) теоремы 3 будет иметь вид:

$$\sqrt{l^3}k|b|(1 + kl) < 1.$$

На рис. 2–4 изображены области разрешимости задачи (5), (2) в пространстве параметров (k, b), (k, l) и (l, b) соответственно.

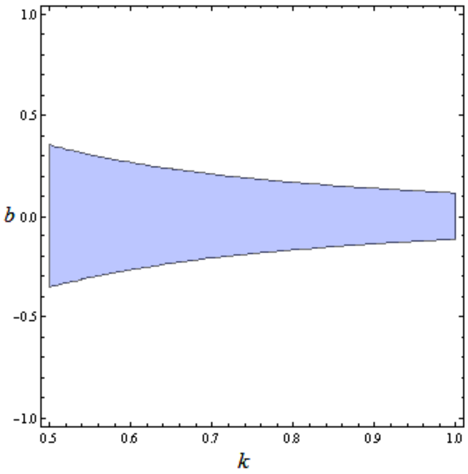

Рис. 2. *Область разрешимости задачи (5), (2) по параметрам* (k,b) *в случае* $1<kl\le 3$ *при* $l=2$

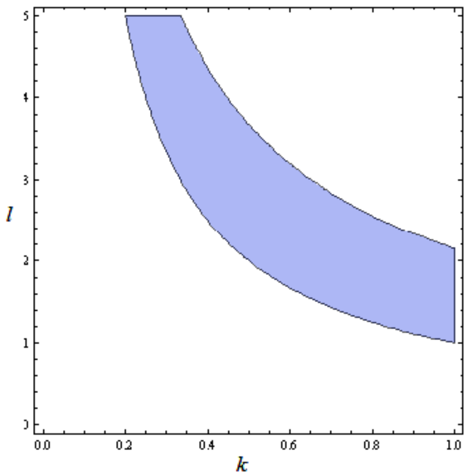

Рис. 3. *Область разрешимости задачи (5), (2) по параметрам* (k,l) *в случае* $1<kl\le 3$ *при* $b=0{,}1$.

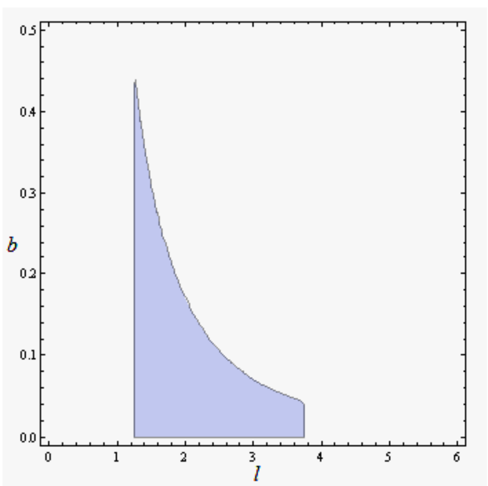

Рис. 4. *Область разрешимости задачи (5), (2) по параметрам* (l,b) *в случае* $1<kl\le 3$ *при* $k=0{,}8$

Отметим, что случай $b>0{,}5$ требует более детального анализа с применением, возможно, численного моделирования.

Также очевидно, что при малых значениях параметра b, длина промежутка, на котором рассматривается задача, может быть достаточно большой.

В случае, когда $kl>3$ условие 3) теоремы 3 будет иметь вид:

$$kl^2|b|\sqrt{\frac{k}{3}}(1+kl\sqrt{\frac{kl}{3}})<1.$$

Этот случай требует дополнительного исследования и ему будет посвящена отдельная работа.

Рассматриваемый в статье подход позволяет обобщить теорему 2 на случай уравнения:

$$x''(t)+\sum_{i=1}^{m_1}a_i(t)x'(k_i t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m_2}b_j(t)x(\bar{k}_j t)=f(t), \qquad (6)$$

где $a_i\in L_\infty$, $k_i\in(0,1]$, $i=\overline{1,m_1}$, $b_j\in L_\infty$, $\bar{k}_j\in(0,1]$, $j=\overline{1,m_2}$, $f\in L_p$.

Соответствующее утверждение приведем без доказательства. Справедлива

Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\int_0^l f(t)dt=0$;

2) $\sum_{j=1}^{m}\int_0^l b_j(t)dt\neq 0$;

3) $\beta(1+\gamma)<1$;

где $$\beta=\sqrt[p]{l}\left(\sum_{i=1}^{m_1}\tilde{a}_i\alpha_{1i}+\sum_{j=1}^{m_2}\tilde{b}\,\alpha_{0j}\right),$$

$$\gamma=\frac{\beta\sqrt[q]{l}}{\left|\sum_{j=1}^{m}\int_0^l b_j(t)dt\right|},$$

$$\alpha_{1i}=\max\{1;\sqrt[q]{k_i l}\},\ \tilde{a}_i=\|a_i\|_\infty,\ i=\overline{1,m_1},$$

$$\alpha_{0j}=\max\left\{1;k_2 l;k_2 l\sqrt[q]{\frac{k_2 l}{q+1}}\right\},\ \tilde{b}_j=\|b_j\|_\infty,$$

$$j=\overline{1,m_2}.$$

Тогда задача (6), (2) имеет хотя бы одно решение в пространстве $W_p[0;l]$.

Список литературы

1. *Ockendon J. R., Tayler A. B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1971. № 332. P. 447–468.
2. *Fox L., Mayers D.F., Ockendon J.R. and Tayler A.B*, On a functional differential equation, J. Inst. Math. Appl. 8 (1971), P. 271–307.
3. *Kato T., McLeod J. B.* Functional–differential equation y’ = ay(λt)+by(t)// Bull. Amer. Math. Soc. 1971. 77, № 6. P. 891–937.
4. *Iserles A.* On the generalized pantograph functional–differential equation // European J. Appl. Math. 1993. 4. P. 1–38.
5. *Гребенщиков Б.Г., Рожков В.И.* Почти периодические решения одной квазилинейной системы с линейным запаздыванием // Сибирский математический журнал. 1994. Т.35, № 4. С. 768–773.
6. *Liu M.Z., Li D.* Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation. Appl. Math. And Computation. 155(3), 2004. P. 853–871.
7. *Xinlong* Feng. An analytic study on the multi-pantograph delay equations with variable coefficients. Bull. Math. Soc. Sci. Math. roumanie. Tome 56(104), № 2. 2013. P. 205–215.
8. *Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б.* Элементы теории топологически нетеровых операторов. Челябинск, 1994. 93 с.
9. *Абдуллаев А.Р.* О разрешимости квазилинейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений // Функционально-дифференциальные уравнения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1992. С. 80–87.
10. *Абдуллаев А.Р., Скачкова Е.А.* Периодические решения системы линейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 4(23). С. 9–13.

On the multi-pantograph equation

A. R. Abdullaev
State National Research Politechnical University of Perm, Russia, 614990, Perm, Komsomolskyi pr., 29
h.m@pstu.ru; 8 (342) 2-391-570

E. A. Skachkova
Perm State University, Russia, 614990, Perm, Bukirev st., 15
skachkovaea@gmail.com; 8 (342) 2-396-345

Periodic boundary value problem for the multi-pantograph equation is considered. In this paper we give new sufficient conditions for it’s solvability.

Key words: *multi-pantograph equation; periodic solutions.*