ИСТОРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.122(09)

О некоторых направлениях развития учения о перестановках с начала XIX столетия

А. Е. Малых
Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет
Россия, 614000, Пермь, ул. Сибирская, 24
malych@pspu.ru; 8(342) 212-75-73

В. И. Данилова
Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет
Россия, 614000, Пермь, ул. Сибирская, 24
vi-dan@mail.ru; 8(342) 212-75-73

Рассмотрены основные направления формирования учения о перестановках с начала XIX столетия. Описан исторический процесс накопления результатов исследований. Отмечен научный вклад в структуру и развитие учения в XIX–XX столетиях: Г.А. Роте, Э. Безу, П.С. де Лаплас, М. Штерн, О. Терквем, Д. Андре, Р. Спраг, Дж. Риордан, Д. Тушар, А. Кэли, Т. Мьюир, П. Тэйт и др. Установлена структура учения о перестановках, сложившаяся к середине XX века.

Ключевые слова: *теория перечисления*; *перестановки и их виды*: *сопряженные, присоединенные, дополнительные, обратные, альтернированные, квазиальтернированные, круговые и др.*; *инверсии и последовательности в перестановках*; *схемы ограничений.*

Введение

Предлагаемый материал относится к теории перечисления – важной составной части комбинаторного анализа. Многие вопросы ее развития, в том числе и современное состояние, до сих пор не решены.

Для выяснения общей структуры учения о перестановках, сложившейся к настоящему времени, нами на основе изучения и анализа первоисточников был выполнен поиск основных направлений его развития. Кроме того, представлены различные методы решения перечислительных задач, предпринята классификация последних. В результате оказались выделенными два тесно связанных между собой направления развития в зависимости от того, как трактуются перестановки: в виде упорядоченных совокупностей данных дискретных объектов или – как нарушение стандартного (естественного) порядка элементов. Первое носит комбинаторный характер и исторически появилось довольно рано, второе обычно используется в теории групп и стало развиваться со второй половины XIX столетия.

Предпринятое исследование позволило выявить основные этапы развития комбинаторного направления и раскрыть их содержание.

Этапы развития учения

1. Учение о перестановках имеет долгую историю. Составлением конечных упорядоченных дискретных множеств и нахождением их числа занимались еще в древней и средневековой Индии, странах ислама, Запад-

ной Европе. Как составная часть элементарной комбинаторики это учение оформилось к началу XVIII в. благодаря трудам Г.В. Лейбница и Я.I Бернулли. Оно содержало формулы для подсчета перестановок и размещений без повторений, с ограниченным и неограниченным повторениями элементов, а также выяснением зависимости между этими видами соединений. Кроме того, в XVIII в. были указаны многочисленные приложения найденных результатов к решению задач из различных разделов математики [1].

2. Начало XIX в. ознаменовало качественно новый этап в изучении перестановок: они стали предметом самостоятельного исследования. Актуальности таких работ способствовало решение задач алгебры, теории вероятностей, геометрии, теории чисел и других, смежных с комбинаторикой, дисциплин. Прежде всего, были найдены новые виды перестановок, изучена их структура, выяснены взаимосвязи. В работе [2] 1800 г. Г.А. Роте ввел понятие пары *родственных* перестановок, таких, что каждый k-й элемент, стоящий на l-м месте одной совпадает с элементом l, находящемся на k-м месте другой. Он изучал их свойства и доказал, в частности, первую теорему о том, что такие перестановки имеют одинаковый знак. Перестановка называется *родственной себе* или *самосопряженной* (термин принадлежит П.А. МакМагону), если в ней любой элемент k стоит на l-м месте, а l – на k-м. Для числа таких перестановок Роте привел без обоснования рекуррентную формулу

$$u_n = u_{n-1} + (n-1)\cdot u_{n-2}, \text{ где } u_1 = 1,\ u_2 = 2.$$

Строгое ее доказательство с использованием комбинаторных соображений дал Т. Мьюир (1889). Он же получил и независимую формулу для u_n :

$$u_n = 1 + C_n^2 + \frac{1}{2!}C_n^2 C_{n-2}^2 + \frac{1}{3!}C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2 + \ldots,$$

используя разложение определителя n-го порядка по определителям более низких порядков с нулями на главной диагонали [3]. Расширение понятию родственных перестановок дал П.А. МакМагон (1895).

3. Другими перестановками, связанными с данной, являются *обратная* (ее элементы записаны в обратном порядке) и *дополнительная* (каждый элемент $(n + 1 - k)$ получен заменой элемента k данной перестановки). Многочисленные работы на протяжении всего XIX в. были посвящены изучению свойств таких перестановок и выявлению зависимостей между ними. В частности, Т.Б. Спраг в конце столетия создал "новую алгебру", которую можно считать своеобразным итогом многочисленных исследований о перестановках.

Хотя рассмотрением инверсий в перестановках занимались еще Хр. Крамер (1750), Э. Безу (1764), П.С. де Лаплас (1772, 1776), первым стал изучать математическую сторону вопроса Г. Роте (1800), заложив тем самым основы теории. Он установил наибольшее и наименьшее число инверсий в перестановках из n элементов, а также их количество в двух взаимно обратных перестановках. Усилиями М. Штерна [4] и О. Терквема [5] (1838) получена формула для числа инверсий

$$\sum_{k=0}^{C_n^2} k \cdot J_k^{(n)} = \frac{1}{2} C_n^2 \cdot n!,$$

где $J_k^{(n)}$ – количество перестановок из n элементов, имеющих ровно k инверсий. Терквем доказал, кроме того, соотношения:

$$\sum_{\chi=0}^{C_n^2} J_\chi^{(n)} = n!;\quad J_\chi^{(n)} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} J_{\chi-\alpha}^{(n-1)},\quad \chi < \alpha;$$

$$\sum_{\alpha=0}^{C_n^2} (-1)^\alpha J_\alpha^{(0)} = 0 \text{ и другие.}$$

Он нашел также рекуррентную формулу для $J_\chi^{(n)}$: $J_\chi^{(n)} = J_\chi^{(n-1)} + J_{\chi-1}^{(n)}$. К концу XIX в. основные вопросы теории инверсий были решены.

4. Особый интерес ученых второй половины XIX в. касался исследований внутренней структуры перестановок. В ряде статей 1870-х гг. И.Д. Бьенэме ввел понятие *последовательностей в перестановках*: пусть a_1, a_2, …, a_n – некоторая перестановка из элементов; образовываются разности $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, …, $a_n - a_{n-1}$, и рассматриваются их знаки, для обозначения которых введены символы $sgn(a_{\alpha+1} - a_\alpha)$, $\alpha = \overline{2, n}$. Числа a_α, $a_{\alpha+1}$, …, a_β, следующие друг за другом, образуют последовательность в перестановке, если

$$sgn(a_\alpha - a_{\alpha-1}) \neq sgn(a_{\alpha+1} - a_\alpha) \neq \ldots$$
$$\neq sgn(a_\beta - a_{\beta-1}) \neq sgn(a_{\beta+1} - a_\beta).$$

Последовательность называется *возрастающей* (*убывающей*), когда разность $a_{\alpha+1} - a_\alpha$ положительна (отрицательна). Каждой из таких последовательностей Бьенэме дал геометрическую интерпретацию [6].

Подсчетом последовательностей в перестановках и изучению свойств последних посвятил более десятка работ конца XIX в. Д. Андре [7]. Ему принадлежит доказательство рекуррентной формулы для нахождения $P_{n,s}$ числа перестановок из n элементов, имеющих ровно s инверсий:

$$P_{n,s} = sP_{n-1,s} + 2P_{n-1,s-1} + (n-s)P_{n-1,s-2},$$

причем $P_{n,1} = 2$; $P_{n,2} = 2P_{n-1,2} + 4$; $P_{n,n+\alpha} = 0$ при $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$

Андре рассмотрел также частные виды перестановок: *альтернированные* (содержащие $n-1$ инверсий) и *квазиальтернированные* ($n-2$ инверсий), получив для их числа A_n и B_n, соответственно, общую и рекуррентную формулы:

$$A_n = C_{n-1}^0 A_0 A_{n-1} + C_{n-1}^2 A_2 A_{n-3} + C_{n-1}^4 A_4 A_{n-5} + \ldots =$$
$$= C_{n-1}^1 A_1 A_{n-2} + C_{n-1}^3 A_3 A_{n-4} + C_{n-1}^5 A_5 A_{n-6} + \ldots;$$
$$P_{n,n-1} = 2A_n;\ P_{n,n-2} = 2B_n;\ B_n = A_{n+1} - 2A_n.$$

Кроме того, для каждого вида перестановок ученый указал производящие функции [8, 9]. Андре решал также вопросы, связанные с *последовательностями в круговых перестановках*.

5. Еще одно направление исследований посвящено изучению перестановок, на позиции элементов которых наложены определенные ограничения. С XVIII в. и до нашего времени не теряет актуальности задача подсчета перестановок из n различных упорядоченных элементов, в которых p $(0 \le p \le n)$ не сохраняют своих первоначальных позиций. Одной из них («задаче о встречах») П.Р. де Монмор (1708) дал формулировку: определить $P_n^{(0)}$ число перестановок из n элементов, в которых ни один не занимает своей первоначальной позиции. К решению задачи и ее обобщениям обращались впоследствии многие. Дело в том, что аналогичные вопросы появлялись в различных естественнонаучных дисциплинах и ученые, принимаясь за их решение, не были знакомы с результатами других. Поэтому со времен Эйлера было получено большое количество рекуррентных формул, в частности:

$$P_n^{(0)} = nP_{n-1}^{(0)} + (-1)^n;\ P_n^{(0)} = (n-1)(P_{n-1}^{(0)} + P_{n-2}^{(0)});$$

$$P_n^{(0)} = \sum_{k=2}^{n}(k-1)C_n^k P_{n-k}^{(0)} + (n-1). \qquad (1)$$

Появилась и независимая формула

$$P_n^{(0)} = n!\sum_{r=2}^{n}(-1)^r \frac{1}{r!}, \qquad (2)$$

которая на протяжении XIX столетия неоднократно переоткрывалась, причем каждый автор приписывал себе приоритет в ее доказательстве. И. Эттингер (1837) и С. Кантор (1883) пришли к ней, исходя из комбинаторных соображений, М. Кантор (1857) – в геометрии при решении конфигурационных проблем, ставших актуальными со времен К.Г.Х. Штаудта; Д. Вейраух (1872), изучая свойства определителей, Силлхоф (1884) – в алгебре, А. Кэли (1890), занимаясь вопросами теории латинских квадратов. Перестановки, определяющие две строки таких квадратов, принято называть *противоречивыми*.

Однако, как было установлено, (1) и (2) были получены еще П. Монмором и Н.I Бернулли, о чем свидетельствует материал переписки этих ученых за 1710–1711 гг., помещенный во втором издании книги Монмора "Очерк анализа азартных игр" (1713) [10].

С перестановками, относящимися к "задаче о встречах", тесно связана "задача о гостях", предложенная Е. Люка (1891), и известная больше под французским названием как "задача о супружеских парах" [11]. В ней требуется определить число всевозможных размещений (за круглым столом) n супружеских пар при условии чередования мужчин и женщин и с запрещением жене сидеть рядом со своим мужем. В терминах перестановок с ограничениями на позиции их элементов она состоит в нахождении всех перестановок из n элементов, противоречивых с двумя данными противоречивыми перестановками. Именно в таком направлении предпринимались попытки ее решения в XIX – XX вв.

Уместно заметить, что еще за 13 лет до Люка П. Тэйт в своих исследованиях по теории узлов и переплетений (1878) пришел к аналогичной проблеме. Попытка найти общее решение не привела к успеху, правда, он получил рекуррентную формулу [12]. В том же году рекуррентные решения были даны Т. Мьюиром и А. Кэли. Первый сформулировал задачу в терминах определителей: найти число членов в разложении определителя n-го порядка, у которого все элементы, стоящие на главной диагонали, соседней с ней "ломаной" диагонали и первый элемент нижней строки равны нулю [13]. Для нахождения искомого числа перестановок T_n Мьюир доказал две формулы:

$$T_n = nT_{n-1} + 2T_{n-2} - (n-4)T_{n-3} - T_{n-4};$$

$$T_n = nT_{n-1} + \frac{n}{n-2}T_{n-2} + (-1)^{n-1}\frac{4}{n-2}.$$

А. Кэли получил рекуррентную формулу, используя метод включения и исключения, а также теоретико-групповые соображения:

$n! - 2[1]_n(n-1)! + (2[1, 1]_n + 3[2]_n)(n-2)! -$
$- (2^3[1, 1, 1]_n + 6[2, 1]_n + 4[3]_n)(n-3)! +$
$+ (2^4[1, 1, 1, 1]_n + 3{\cdot}2^2[2, 1, 1]_n + 3^2[2, 2]_n +$
$+ 4{\cdot}2[3, 1]_n + 5[4]_n)(n-4)! - \ldots,$

где символ $[\alpha, \beta, \ldots, \gamma]_n$ означает число способов выбора из n элементов $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ соседних, причем каждая группа соседних элементов отделена от другой хотя бы одним элементом. Коэффициент при этом символе находится как произведение

$$(\alpha+1)\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+1).$$

Для искомого числа перестановок Кэли построил также производящую функцию [14].

Независимое решение "задачи о гостях" было найдено лишь в 1934 г. Д. Тушаром:

$$T_n = n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}(n-k)!.$$

Кроме того, он построил производящие функции для этой задачи в случае круглого и прямоугольного (тогда гости рассаживаются по одну сторону) столов, установив, что между этими функциями имеет место рекуррентная зависимость [15].

К перестановкам с ограничениями на позиции элементов приводили и другие задачи практического характера. Так как число таких перестановок постоянно возрастало, то возникла проблема объединения их в классы.

6. С конца XIX в. стали разрабатываться общие подходы к решению перечислительных задач. Для реализации этой цели изучались соответствующие им схемы ограничений. Последние представляли собой квадратные таблицы, в которых переставляемые элементы соответствуют номерам столбцов, а их позиции – номерам строк. Крестик, стоящий на пересечении строки и столбца, означает соответствующее ограничение.

К настоящему времени выделились, как нам представляется, наиболее важные классы перечислительных задач, имеющие *диагональные* (лестничные), *прямоугольные* и *треугольные* схемы ограничений. Первые связаны с латинскими прямоугольниками, интерес к которым стал проявляться со времен Л. Эйлера (1782) [16]. В нормализованных $(2, n)$ – прямоугольниках вторые строки содержат только такие перестановки, которые фигурируют в "задаче о встречах". Между числом $K(2, n)$ таких прямоугольников и всеми решениями "задачи о встречах" имеется простая связь: $K(2, n) = P_n^{(0)}$. Более сложная зависимость между нормализованными трехстрочными латинскими прямоугольниками и числом решений T_n "задачи о гостях" была получена в 1949 г. Дж. Риорданом [17]:

$$K(3, n) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k P_{n-k}^{(0)} T_{n-2k},$$

где $$m = \left[\frac{n}{2}\right]; \quad T_0 = 1.$$

С середины XX в. стали появляться и общие результаты. Было получено много рекуррентных формул для подсчета $K(3, n)$ через прямоугольники более низких порядков (Дж. Риордан, 1952; П. Эрдеш и И. Капланский, 1946; С. Керевала, 1947; К. Ямамото, 1949, 1951 и др.).

Дальнейшим усложнением является переход к схемам ограничений, подобным трехступенчатой лестнице. Задачи такого рода некоторым образом связаны с четырехстрочными нормализованными латинскими прямоугольниками. Однако о них к настоящему времени известно немного.

Прямоугольные схемы ограничений появились при наличии в перестановках некоторого числа одинаковых элементов, как это имеет место, например, при решении задачи о парных картах, состоящей в подсчете числа таких карт в колоде, сложенной произвольным образом. Для случая двух колод парными считаются одинаковые карты, находящиеся в каждой из них на одной и той же позиции. Для большего числа колод открываются иные возможности. Парными можно называть одинаковые карты, занимающие одну и ту же позицию во всех колодах или по крайней мере в k из n. В общем случае спецификация колод (по числу колод каждого вида) является произвольной.

Простейшим является случай двух колод, в каждой из которых карты перенумерованы числами от 1 до n. Так как важны относительные, а не абсолютные позиции карт в колоде, то карты в одной из колод можно расположить в естественном порядке и сравнивать ее со второй, упорядоченной всевозможными способами. Порядок карт первой колоды определяет позиции, в которых может произойти образование пар, а спецификация второй колоды – элементы, которые могут оказаться парными в этих позициях. Если имеется s видов карт, учитывающихся при образовании пар, и в первой колоде число карт i-го типа равно n_i, а во второй – m_i, то схема образования пар будет состоять из s разобщенных прямоугольников, где i-й прямоугольник имеет размеры $n_i \times m_i$.

Колода обычных игральных карт содержит карты 13 различных достоинств. Карт каждого достоинства – 4, любая из них отличается мастью. Поэтому образование пар может осуществляться либо по достоинству, либо по масти и описывается в каждом случае соответствующими ладейными многочленами. Непосредственное вычисление каждого из них, даже для двух колод с большим числом карт, несмотря на ясность путей, практически неосуществимо, поэтому его обычно заменяют приближенными методами. Еще более усложняются задачи, когда рассматривается несколько ($n > 2$) колод. В исследованиях этого направления, начиная с 50-х гг. XX в., основным является получение асимптотических результатов (Р. Спраг, 1949; Дж. Риордан, 1954; Н. Менделаски, 1956; К. Ямамото, 1956 и др.).

Наконец, треугольные схемы ограничений тесно связаны с задачей С. Ньюкомба, состоящей в следующем: колода карт произвольной спецификации складывается в одну стопку до тех пор, пока карты выпадают в порядке возрастающего (неубывающего) старшинства. При появлении карты младшей предшествующей складывается новая стопка и т.д. Сколькими способами можно получить k таких стопок? Эта задача эквивалентна перечислению по числу подъемов перестановок из n занумерованных элементов, среди которых могут быть и одинаковые при условии, что стоящие рядом одинаковые элементы считаются расположенными в возрастающем порядке. Результаты этого направления практически стали появляться с 50-х гг. XX в. (А. Сэйд, 1949; Дж. Риордан, 1951, 1953; Л. Карлиц, 1953 и др.). Не утрачено внимание к ним и в наши дни.

Проявление значительного интереса к комбинаторному анализу, начиная с середины XX в., связано с бурным развитием кибернетики, дискретной математики и широким использованием компьютерной техники. В этот же период активизировался интерес к классическим комбинаторным задачам и, в частности, перестановкам.

Заключение

Таким образом, комбинаторное направление учения о перестановках, сложившееся к настоящему времени, имеет богатую историю, разнообразные практические приложения и изобилует еще не решенными вопросами.

Другой подход к трактовке перестановок, связанный с нарушением стандартного расположения элементов, стал изучаться в теории групп подстановок с середины XIX в. В этом случае каждая перестановка может быть однозначным образом представлена в виде циклов и влечет появление новых видов комбинаторных задач, в частности: определить число перестановок из n содержащих в точности ($0 \le k \le n$) единичных циклов, т.е. в которых k элементов сохраняют свои позиции; l r-циклов; k r- или s-циклов и т.д. Кроме того, на сами циклы могут быть наложены ограничения, например, чтобы они содержали элементы в определенной последовательности и др. Это направление учения о перестановках, назовем его *алгебраическим*, также получило разнообразные приложения и заслуживает отдельного освещения.

Список литературы

1. *Малых А.Е.* Формирование комбинаторного анализа: монография / Перм. пединститут. Пермь, 1989. Деп. в ВИНИТИ 13.11.89. № 7166. В 89. 245 с.
2. *Rothe H.A.* Über Permutationen in Beziehung auf die Stellen ihrer Elemente // Hindenburg C.F. Zweite summlung combinatorich – analytischer Abhandlungen. Leipzig, 1800. S.263–305.
3. *Muir Th.* On self-conjugate permutations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1891. Bd. 17. P. 7–13.
4. *Stern M.A.* Aufgaben und Lehrsatz // J. für die reine und angew. Math. 1838. Vol. 45. S. 181–187.
5. *Terquem O.* Démonstration d′un théorème combinatoire de M. Stern // J. Math. pures et appl. 1838. T. 3. P. 556–558.
6. *Binaymé J.* Application d′un théorème nouveau du calcul probabilités // C. R. Acad. Sci. Paris, 1875. T. 81. P. 417–426.

7. *Andrè D.* Mémoire sur combinaisons régulieres et leure applications // Ann. Sci. de l'Ecole Normale supériure, 1876. T. 5(2). P. 155–198.
8. *Andrè D.* Sur les permutations alterneés // J. Math. pures et appl., 1881. T. 7(3). P.167–184.
9. *Andrè D.* Mémoire sur les permutations quasi-alterneés // J. Math. pures et appl. 1895. T. 1(5). P. 315–350.
10. *Montmort P.R.* Essay d'analyse sur les jeux de hazard. Paris, 1713.
11. *Lucas E.* Theorie des nombres. Paris, 1891. P. 481–495.
12. *Tait P.G.* Scientific Papers. Cambridge, 1898. Vol. 1.
13. *Muir Th.* On Professor Tait's problem of arrangement // Proc. Roy Soc. Edinburgh, 1878. Vol. 9. P. 382–387.
14. *Cayley A.* Note on Mr. Muir's solution of problem of arrangement // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1878. Vol. 9. P. 388–391.
15. *Touchard J.* Sur un problème de permutations // C. R. Acad. Sci. Paris, 1934. T. 198. P. 631–633.
16. *Euler L.* Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. Opera omnia, 1923. Ser. 1_7.
17. *Riordan J.* Three line latin rectangles // Amer. Math. Monthly, 1950. Bd. 51. P.450–452.

About some directions of development permutations doctrine from the beginning of XIX century

A. E. Malykh
Perm State Humanitarian Pedagogical University, Russia, 614000, Perm, Sibirskaja st., 24
malych@pspu.ru; 8(342) 212-75-73

V. I. Danilova
Perm State Humanitarian Pedagogical University, Russia, 614000, Perm, Sibirskaja st., 24
vi-dan@mail.ru; 8(342) 212-75-73

Main directions of formation permutations doctrine from the beginning of XIX century were examined. Historical process of accumulation scientific results was described. Scientific contribution in structure and development doctrine XIX–XX centuries was indicated: G.A. Rothe, E. Bezout, P.S. de Laplace, M. Stern, O. Terquem, D. Andrè, P. Spraque, J. Riordan, J. Touchard, A. Cayley, Jh. Muir, P. Tait and ets. Structure permutations doctrine to the middle of XX century was determined.

Key words: *theory of enumeration*; *permutations and their kinds*: *conjugated*, *adjoined*, *complementary*, *converse*, *alternating, quasialternating*, *circular and ets.*; *inversions and successions in permutations*; *restricted schemes.*