

УДК 517.524

Решение алгебраических уравнений алгоритмом Рутисхаузера–Никипорца

В. И. Шмойлов¹, В. В. Селянкин², Г. А. Кириченко²

¹НИИ многопроцессорных вычислительных систем ЮФУ
Россия, 347900, Таганрог, ул. Чехова, 2

²Инженерно-технологическая академия ЮФУ
Россия, 347900, Таганрог, пер. Некрасовский 44
vt_gak@mail.ru; 8(8634)37-14-28

Приводятся аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n -й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. Такие конструкции были названы непрерывными дробями Никипорца. Для эффективного вычисления значений непрерывных дробей Никипорца используется рекуррентный алгоритм Рутисхаузера. В качестве примера рассмотрено решение алгебраического уравнения 41-й степени.

Ключевые слова: алгебраические уравнения; бесконечные определители Теплица; расходящиеся непрерывные дроби; r/φ -алгоритм.

Введение

Известны разнообразные применения алгебраических уравнений при решении научных и технических задач. Часто алгебраические уравнения появляются в задачах аэродинамики. При расчете устойчивости различных конструкций используют так называемые собственные значения матриц, определяемые из решения алгебраических уравнений, степень которых равна количеству учитываемых гармоник. Особенно часто алгебраические уравнения возникают при выполнении различных геометрических расчетов, в частности, при определении точек пересечения и сопряжения криволинейных контуров. Разным аспектам теории и практики алгебраических уравнений посвящены недавно опубликованные монографии [1, 2]. Тем не менее,

актуальной является оценка ситуации в этом разделе математики, которая была дана известным американским специалистом Р. Хеммингом [3]: "Задача нахождения корней многочленов возникает достаточно часто для того, чтобы оправдать тщательное изучение и разработку специальных методов ее решения. Различным методам нахождения действительных линейных и квадратичных множителей можно посвятить целую книгу. Тот факт, что существует так много методов, показывает, что не существует ни одного вполне удовлетворительного". В самом деле, известно более сотни алгоритмов и их модификаций, которые используются для нахождения нулей полиномов [4]. В основном, это алгоритмы численного решения алгебраических уравнений.

Ниже будут рассмотрены аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n -й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. Для нахождения комплексных корней допол-

© Шмойлов В.И., Селянкин В.В., Кириченко Г.А., 2015.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, НИР №2257 базовой части государственного задания № 2014/174.

нительно используется метод суммирования расходящихся непрерывных дробей, именуемый как r/φ -алгоритм [5], нашедший разнообразные применения в вычислительной математике [6–9].

1. Постановка задачи

Имеется алгебраическое уравнение степени n :

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0. \quad (1.1)$$

Запишем следующую производящую функцию:

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n} = 1 + c_1 x + \dots + c_m x^m + \dots \quad (1.2)$$

Коэффициенты α_i в (1.1) и (1.2) совпадают. Коэффициенты c_m последовательности (1.2) могут быть найдены из линейного рекуррентного уравнения

$$c_m = -(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \dots + \alpha_n c_{m-n}),$$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -\alpha_1. \quad (1.3)$$

Для определения корней алгебраического уравнения (1.1) Эйткен предложил формулы [10]:

$$x_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m+1}}{c_m}, \quad (1.4)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\begin{array}{cc|c} c_{m+1} & c_{m+2} & \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+1} \\ \hline c_m & c_{m+1} & c_m \end{array} \right)}{c_m} \right) = \frac{x_1 x_2}{x_1} = x_2, \quad (1.5)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\begin{array}{ccc|cc} c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+5} & c_{m+3} & c_{m+4} \\ \hline c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+2} & c_{m+3} \end{array} \right)}{c_m} \right) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2} = x_3 \quad (1.6)$$

Очевидно, что используя формулы Эйткена, можно непосредственно находить только действительные корни алгебраического уравнения (1.1). При определении комплексных корней алгебраического уравнения (1.1) используется r/φ -алгоритм.

2. Представление нулей полинома

Запишем формулы Эйткена в развернутом виде. В результате преобразований получим конструкции из отношений определителей матриц Теплица (2.1), диагональными элементами которых являются коэффициенты исходного уравнения (1.1).

$$x_i = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} \quad (2.1)$$

Отношения определителей (2.1), выражающие корни алгебраического уравнения (1.1) через его коэффициенты, будем называть функциями $N_i^{(n)}$. Для функций $N_i^{(n)}$ введем обозначение:

$$N_i^{(n)} = N_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Здесь следует подчеркнуть, что для алгебраических уравнений степени выше четвертой функции $N_i^{(n)}$ записываются аналогично их записи для алгебраических уравнений степени 2, 3 и 4.

Функции $N_i^{(n)}$, определяемые выражением (2.1), будем называть также непрерывными дробями Никипорца. Определение математической конструкции (2.1), как непрерывных дробей особой структуры, позволяет естественно ввести такое фундаментальное понятие как подходящая дробь, что упрощает описание способа решения алгебраических уравнений с использованием функций $N_i^{(n)}$ и r/φ -алгоритма.

Для нахождения комплексных корней уравнения (1.1), определяемых также формулой (2.1), необходимо дополнительно использовать r/φ -алгоритм. Модуль r_i и модуль аргумента φ_i искомого комплексного числа $x_i = r_i e^{i\varphi_i}$ устанавливаются здесь формулами:

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_{m=1}^m |\bar{x}_i^{(m)}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \quad (2.3)$$

где $\bar{x}_i^{(m)}$ – m -я подходящая дробь выражения (2.1), $k_i^{(m)}$ – число отрицательных подходящих дробей для i -го корня из m подходящих дробей.

Например, подходящие дроби для x_2 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2^{(1)} &= -\frac{|\alpha_2|}{1} : \frac{|\alpha_1|}{1}, \\ \bar{x}_2^{(2)} &= -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{|\alpha_2|} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{|\alpha_1|}, \\ \bar{x}_2^{(3)} &= -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_3 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

Рассматриваемый способ выходит за рамки традиционных методов суммирования, ибо позволяет за последовательностью вещественных подходящих дробей усмотреть некое комплексное число, которое, собственно, и представлено этой непрерывной дробью. Признаком комплексности такой расходящейся непрерывной дроби с вещественными элементами служат перемены знаков ее подходящих дробей, причем, эти перемены знаков происходят сколь угодно много раз. Другими словами, комплексная единица e^i устанавливается из "поведения" подходящих дробей непрерывной дроби. Параметры же комплексного числа $z = r_0 e^{i\varphi_0}$, т.е. его модуль r_0 и аргумент φ_0 могут быть определены, в частности, так называемым r/φ -алгоритмом, т.е. формулами (2.2) и (2.3).

В случае непрерывных дробей, сходящихся в классическом смысле, аргумент φ_0

примет значения 0 или π . Если $\varphi_0 = 0$, то значение сходящейся непрерывной дроби будет совпадать со значением модуля r_0 :

$$z = r_0 e^{i0} = r_0.$$

Если $\varphi_0 = \pi$, то значением сходящейся непрерывной дроби будет отрицательное число:

$$z = r_0 e^{i\pi} = -r_0.$$

Следует обратить внимание, что по формуле (2.3) определяется модуль аргумента комплексного числа. Знак аргумента φ устанавливается из анализа динамики в распределении подходящих дробей. Из рассмотрения калибровочных непрерывных дробей, представляющих комплексные числа, в [11] был сформулирован алгоритм определения знака аргумента φ по распределению значений подходящих дробей. Этот алгоритм основывается на анализе значений пар подходящих дробей. "Возрастающими" парами названы пары, для которых $P_n/Q_n < P_{n+1}/Q_{n+1}$. "Убывающими" парами являются пары, если $P_n/Q_n > P_{n+1}/Q_{n+1}$. Как следует из формулы (2.3), если $|\varphi| < \pi/2$, то большинство подходящих дробей из общего числа n подходящих имеет положительный знак. Большинство подходящих отрицательны, если $\pi/2 < |\varphi| < \pi$. При $0 < |\varphi| < \pi/2$ анализируются пары из положительных подходящих дробей. Если $\pi/2 < |\varphi| < \pi$, то анализируются пара из подходящих, имеющих отрицательные значения.

Итак, алгоритм определения знака φ формулируется следующим образом:

Если модуль аргумента комплексного числа, установленный по формуле (2.3), лежит в интервале $0 < |\varphi| < \pi/2$, то знак φ будет положительным, если число "убывающих" пар подходящих составляет большинство из общего числа анализируемых пар. Напротив, если большинство пар подходящих принадлежит к множеству "возрастающих" пар, то знак аргумента φ будет отрицательным.

Если по формуле (2.3) получим $\pi/2 < |\varphi| < \pi$, то знак угла φ будет положительным (если число "возрастающих" пар подходящих составляет большинство из общего числа анализируемых пар). Если большинство пар подходящих принадлежит к множеству "убывающих" пар, то знак аргумента φ будет отрицательным.

Схема r/φ -алгоритма может быть уяснена, если обратиться к разложению $e^{i\varphi}$ в цепную дробь.

Из формулы Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

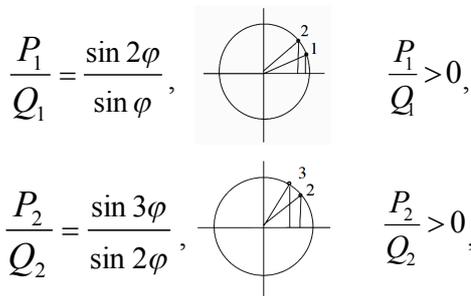
можно записать дробь:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}, \\ e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}}, \\ e^{i\varphi} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{e^{i\varphi}}}}}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

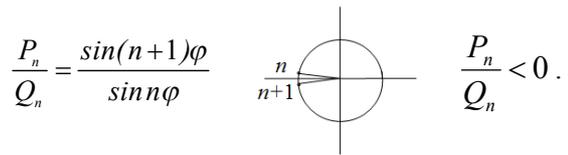
Запишем подходящие дроби непрерывной дроби (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= 2 \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}, \\ \frac{P_2}{Q_2} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi}, \\ &\dots \\ \frac{P_n}{Q_n} &= 2 \cos \varphi - \frac{1}{2 \cos \varphi - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{2 \cos \varphi}}} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin n\varphi} \end{aligned}$$

Изобразим графически несколько значений первых подходящих дробей непрерывной дроби (2.4).



Очевидно, с ростом номера n угол $(n+1)\varphi$ станет больше угла π .



Этот момент может быть зафиксирован, так как подходящая дробь P_n/Q_n примет отрицательное значение. Таким образом, перемещение радиуса-вектора от угла φ до угла $(n+1)\varphi$, несколько превышающего значение π , дает возможность, пусть и приближенно, определить аргумент комплексного числа $e^{i\varphi}$, представленного непрерывной дробью (2.4). Продолжая наблюдение за значениями подходящих дробей (2.4), запишем формулу, по которой можно определить модуль аргумента комплексного числа $e^{i\varphi_0}$:

$$|\varphi_0| = \frac{\pi k_n + \tilde{\varphi}}{n}, \quad (2.5)$$

где k_n – количество подходящих дробей, имеющих отрицательное значение из общего числа n подходящих дробей разложения (2.4), $\tilde{\varphi}$ – некоторый угол, причем, $\tilde{\varphi} < \varphi_0$. Если $n \rightarrow \infty$, то формула (2.5) примет вид (2.3).

Для определения подходящих непрерывных дробей (2.1), записываемых отношениями определителей Тейлора, может быть использован известный рекуррентный алгоритм "частных и разностей", или QD-алгоритм Рутисхаузера [12].

QD-алгоритм Рутисхаузера описывается формулами:

$$x_m^{(i+1)} = x_m^{(i)} + e_m^{(i)} - e_{m-1}^{(i)}, \quad (2.6)$$

$$e_m^{(i+1)} = e_m^{(i)} \frac{x_{m+1}^{(i+1)}}{x_m^{(i+1)}}. \quad (2.7)$$

В качестве начальных условий принимаются величины:

$$x_1^{(0)} = -\alpha_1, \quad x_m^{(0)} = 0, \quad (2.8)$$

$$e_m^{(0)} = \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

Кроме того,

$$x_1^{(i+1)} = x_1^{(i)} + e_1^{(i)}, \quad x_n^{(i+1)} = x_n^{(i)} - e_{n-1}^{(i)}.$$

На рис. 1 показан граф QD-алгоритма Рутисхаузера.

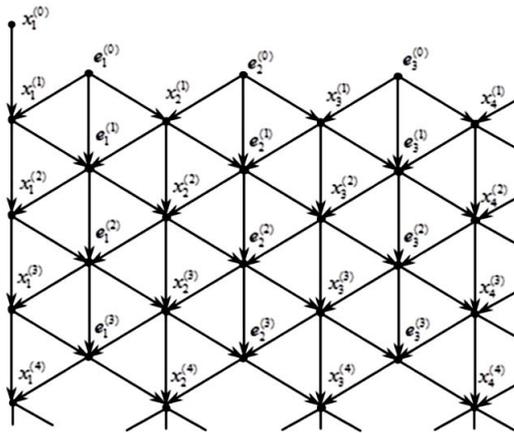


Рис. 1. Граф QD-алгоритма Рутисхаузера

3. Пример решения алгебраического уравнения

При помощи QD-алгоритма, описываемого формулами (2.6) и (2.7), и r/φ -алгоритма, определяемого формулами (2.2) и (2.3), вычислим корни уравнения 41-й степени, коэффициенты которого получены случайной выборкой чисел из диапазона $-100 \div 100$. Это уравнение имеет вид:

$$x^{41} + 3x^{40} - 59x^{39} + 5x^{38} + \dots - 23x^2 + 32x - 88 = 0. \quad (3.1)$$

В табл. 1 приведены коэффициенты

уравнения (3.1). В табл. 2 приведены значения комплексно-сопряженных корней уравнения (3.1), которые установлены с использованием r/φ -алгоритма.

Таблица 1. Коэффициенты уравнения (3.1)

3	-59	5	-2	-7	93	25	-98	17
53	-72	13	-58	41	-61	53	21	7
-65	-5	34	-35	10	50	-74	19	28
-69	31	-57	62	21	-19	-9	84	-91
71	-18	-23	32	-88	-	-	-	-

Во второй колонке табл. 2 даны значения модулей комплексных корней, полученных по формулам (2.2). Следует обратить внимание на то, что модули комплексных корней расположены строго "по убыванию" их значений. В 4-й колонке табл. 2 помещены аргументы комплексно-сопряженных корней уравнения (3.1), которые установлены по формуле (2.3) с дополнением рассмотренного выше алгоритма определения знака аргумента φ .

В колонках 3 и 5 табл. 2 показаны, соответственно, $\varepsilon_r = |r_{\text{сп}} - r_{\text{оп}}|$ и $\varepsilon_\varphi = |\varphi_{\text{сп}} - \varphi_{\text{оп}}|$, устанавливающие разности между значениями модулей и аргументов комплексных корней, полученных с использованием стандартной программы решения алгебраических уравнений, и найденных посредством r/φ -алгоритма.

Таблица 2. Таблица комплексных корней полинома (3.1), полученных с применением r/φ -алгоритма

Номер корня	Модуль комплексного числа, $r_{\text{оп}}$	$\varepsilon_r = r_{\text{сп}} - r_{\text{оп}} $	Аргумент комплексного числа, $\varphi_{\text{оп}}$	$\varepsilon_\varphi = \varphi_{\text{сп}} - \varphi_{\text{оп}} $
x_3	1,3019122199828	0,0000038517218	1,571197196476	0,0000009574580
x_4	1,3019082503388	0,0000001179128	-1,571197196476	0,0000009574611
x_6	1,1336538077234	0,0000000709322	2,6298586990174	0,0000002914310
x_7	1,1336525274871	0,0000012081657	-2,629858699017	0,0000002848706
x_8	1,0869383026749	0,0000017286840	0,1914006817622	0,0000005166982
x_9	1,0869354354131	0,0000011385722	-0,191400681762	0,0000005166972
x_{10}	1,0412819238570	0,0000000130998	2,3480642079786	0,0000009824865
x_{11}	1,0412817732513	0,0000001558209	-2,348064207978	0,0000009855573
x_{12}	1,0215922084783	0,0000013892163	0,8725166677112	0,0000003337546
x_{13}	1,0215906324747	0,0000001747125	-0,872516667711	0,0000003281448
x_{14}	1,0161379018867	0,0000001633531	0,3475862675395	0,0000001302110
x_{15}	1,0161375417953	0,0000001329612	-0,347586267539	0,0000001638676
x_{16}	1,0078346494686	0,0000002941667	2,8171646751842	0,0000005863828
x_{17}	1,0013938524304	0,0000001742622	-2,817164673613	0,0000012830690
...
x_{33}	0,9695952467424	0,0000004233652	1,0435543983844	0,0000014338352
x_{34}	0,9695950456178	0,0000002222481	-1,043554398384	0,0000014341905
x_{35}	0,9532571437562	0,0000002464457	0,7306333749298	0,0000012722923
x_{36}	0,9532590219768	0,0000021258793	-0,730630303131	0,0000018137859
x_{37}	0,9417139140609	0,0000020610021	1,2600946776292	0,0000005117380
x_{38}	0,9417131186608	0,0000012698637	-1,260094677629	0,0000004437064
x_{39}	0,8837665210792	0,0000005380907	1,8060238911429	0,0000007800379
x_{40}	0,8837659938563	0,0000000510283	-1,806023891142	0,0000007549626

На рис. 2 показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют действительные корни x_1 и x_2 алгебраического уравнения (3.1).



На рис. 3 (а, б) и 4(а, б) показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют комплексно-сопряженные корни x_8 и x_9 , а также x_{16} и x_{17} алгебраического уравнения (3.1).



Рис. 2. Подходящие дроби, представляющие действительные корни x_1 и x_2 алгебраического уравнения (3.1)

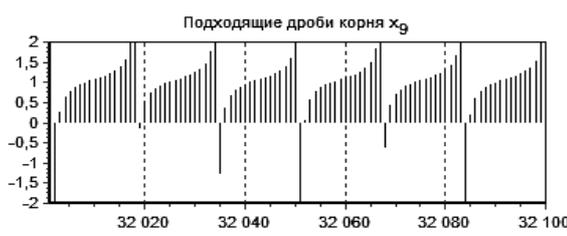
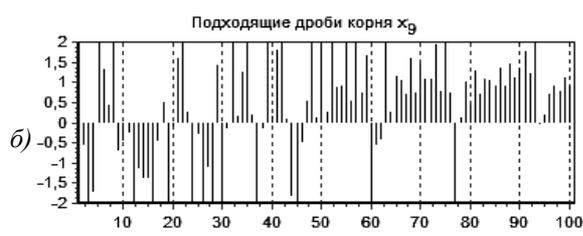
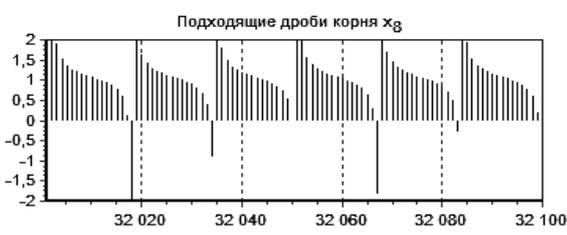
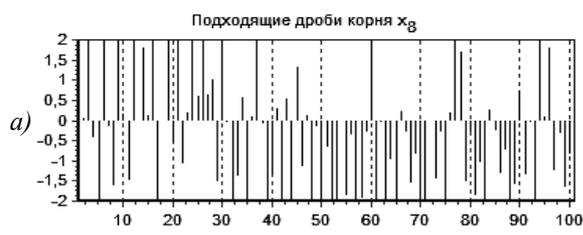


Рис. 3. Подходящие дроби, представляющие комплексные корни x_8 и x_9 алгебраического уравнения (3.1)

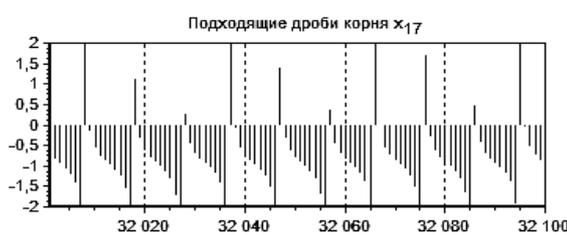
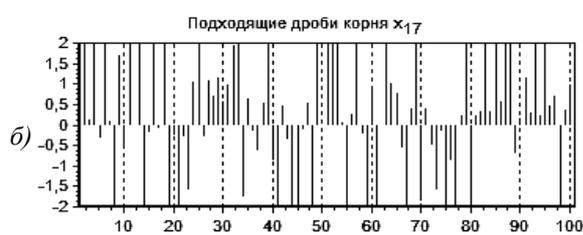
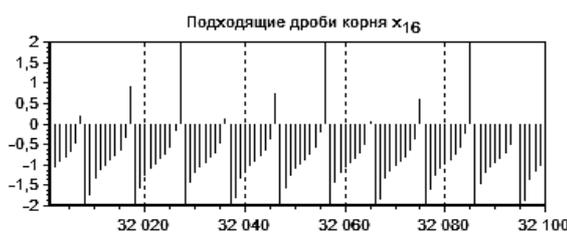
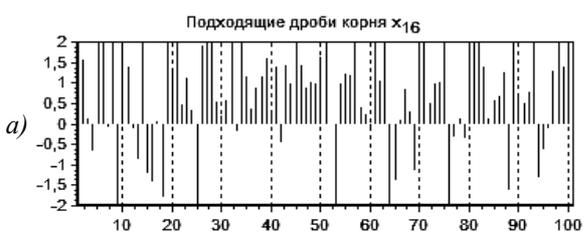


Рис. 4. Подходящие дроби, представляющие комплексные корни x_{16} и x_{17} алгебраического уравнения (3.1)

В алгоритме Рутисхаузера, чтобы найти комплексно-сопряженные корни x_i и x_{i+1} алгебраического уравнения (1.1) определяются

коэффициенты квадратных уравнений $x^2 + px + q = 0$ по правилу:

$$x_i^{(n)} + x_{i+1}^{(n)} = -p_{i,j+1}^{(n)}, \quad (3.2)$$

$$x_i^{(n-1)} \cdot x_{i+1}^{(n)} = q_{i,j+1}^{(n)}. \quad (3.3)$$

На рис. 5–8 показаны графики значений $p^{(n)}$ и $q^{(n)}$ для комплексно сопряженных корней x_8 и x_9 , а также x_{16} и x_{17} алгебраическо-

го уравнения (3.1). Значения p и q соответствующих квадратных уравнений фиксируются в правых частях графиков.

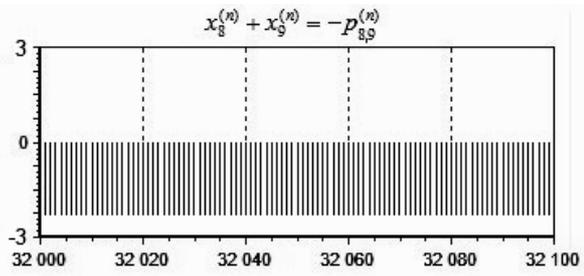
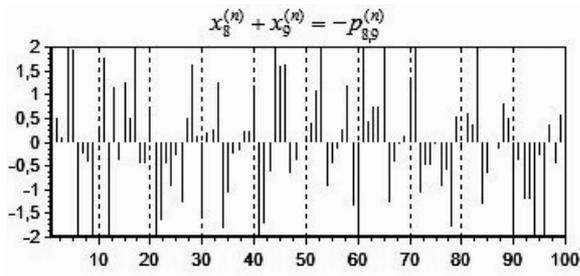


Рис. 5. Значения $p_{8,9}^{(n)}$ для определения корней x_8 и x_9 уравнения (3.1) методом Рутисхаузера

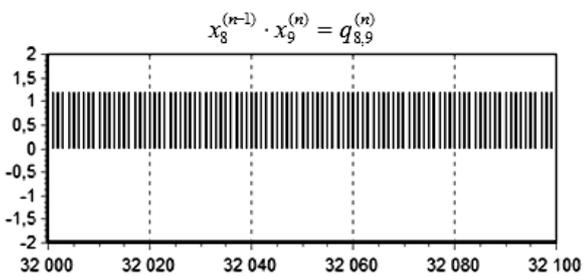
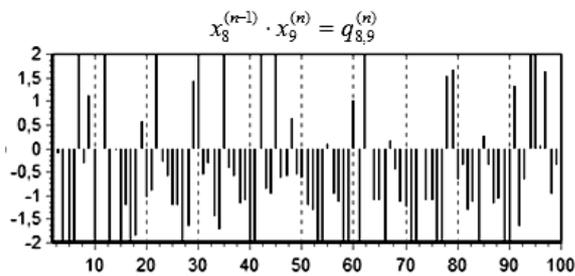


Рис. 6. Значения $q_{8,9}^{(n)}$ для определения корней x_8 и x_9 уравнения (3.1) методом Рутисхаузера

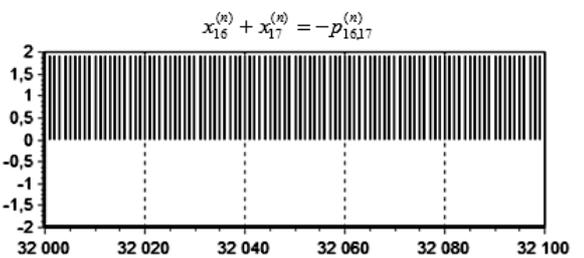
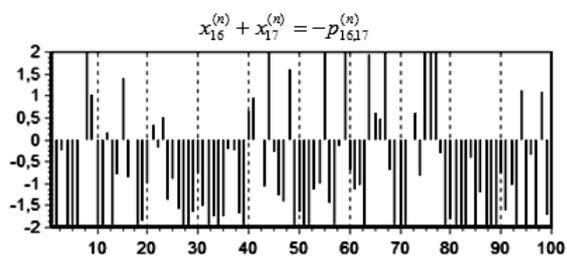


Рис. 7. Значения $p_{16,17}^{(n)}$ для определения корней x_{16} и x_{17} уравнения (3.1) методом Рутисхаузера

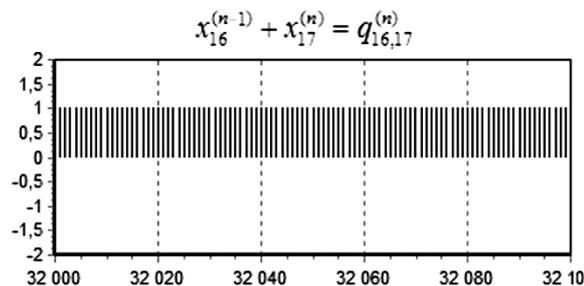
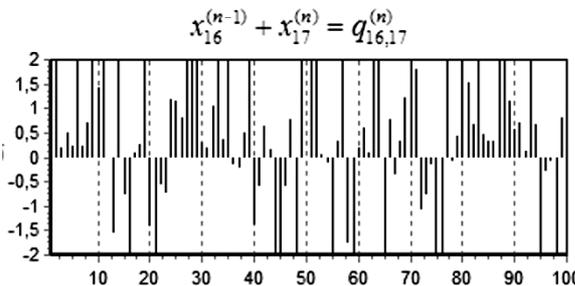


Рис. 8. Значения $q_{16,17}^{(n)}$ для определения корней x_{16} и x_{17} уравнения (3.1) методом Рутисхаузера

В табл. 3 и табл. 4 приведены значения коэффициентов квадратного уравнения, из которых устанавливаются комплексно-сопряженные корни x_8, x_9 , и x_{16}, x_{17} исходного уравнения (3.1). Значения $p^{(n)}$ и $q^{(n)}$ устанавливаются, соответственно, по формулам (3.2) и (3.3).

Здесь следует обратить внимание, что в алгоритме Рутисхаузера, описываемого формулами (3.2) и (3.3), текущие значения комплексно-сопряженных корней $x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}$, и $x_i^{(n-1)}$ представлены вещественными "отчетами", помещенными во вторых, третьих и шестых

колонках табл. 3 и табл. 4, соответственно. Необходимо отметить, что если при определении значения $-p_{i,i+1}^{(n)}$ использовались значе-

ния $x_i^{(n)}$ и $x_{i+1}^{(n)}$, т. е. значения с индексами n , то при определении $q_i^{(n)}$ использовались $x_i^{(n-1)}$ и $x_{i+1}^{(n)}$.

Таблица 3. Вычисление $p_{8,9}^{(n)}$ и $q_{8,9}^{(n)}$ корней x_8 и x_9 полинома (3.1)

Но-мер, n	Значения $x_8^{(n)}$	Значения $x_9^{(n)}$	$x_8^{(n)} + x_9^{(n)} = -p_{8,9}^{(n)}$	Но-мер, $n-1$	Значения $x_8^{(n-1)}$	$x_8^{(n-1)} \cdot x_9^{(n)} = q_{8,9}^{(n)}$
4	-0,414664529637	-1,720394634300	2,135059163938	3	2,1086448580002	-3,627701299348
8	-1,610547785596	2,0388517275563	-0,428303941960	7	-0,159352077756	-0,324895259022
16	8,5571638204583	-9,044584128796	0,487420308339	15	0,1341580914414	-1,213404144601
32	-9,605685735981	9,3551430443078	0,250542691674	31	-0,033407490681	-0,312531854072
64	-0,985383686441	0,2558611227752	0,729522563666	63	-4,385285205070	-1,122023996259
128	3,0837484809892	0,5228477024496	-3,606596183438	127	2,4514185865506	1,2817185757203
256	0,3878386797348	1,7472333173553	-2,135071997090	255	0,6785060457280	1,1855083691230
512	1,0653176704073	1,0688577423505	-2,134175412757	511	1,1053215863805	1,1814315353900
1024	0,9206943220156	1,2134813783752	-2,134175700390	1023	0,9735881711282	1,1814311158705
2048	1,8434258728037	0,2907498275870	-2,134175700390	2047	4,0633940376685	1,1814311158705
4096	0,6403931995785	1,4937825008122	-2,134175700390	4095	0,7908990199230	1,1814311158705
8192	1,1318515955707	1,0023241048201	-2,134175700390	8191	1,1786917127796	1,1814311158707
16384	1,0687661585851	1,0654095418056	-2,134175700390	16383	1,1088985685903	1,1814311158707
32768	0,9308122006913	1,2033634996994	-2,134175700390	32767	0,9817740991526	1,1814311158706

Таблица 4. Вычисление $p_{16,17}^{(n)}$ и $q_{16,17}^{(n)}$ корней x_{16} и x_{17} полинома (3.1)

Но-мер, n	Значения $x_{16}^{(n)}$	Значения $x_{17}^{(n)}$	$x_{16}^{(n)} + x_{17}^{(n)} = -p_{16,17}^{(n)}$	Но-мер, $n-1$	Значения $x_{16}^{(n-1)}$	$x_{16}^{(n-1)} \cdot x_{17}^{(n)} = q_{16,17}^{(n)}$
4	-0,650367282806	3,9885512074348	-3,338183924628	3	0,1254069295064	0,5001919601037
8	2,6226100199079	-7,245971571737	4,623361551830	7	-0,096605153243	0,6999981940838
16	-1,409443785323	2,2932222834843	-0,883778498161	15	-1,201507433319	-2,755323619859
32	2,2491409707031	1,9187896056538	-4,167930576357	31	0,5504044721778	1,0561103801203
64	-2,923525267781	0,9931703916162	1,930354876165	63	2,0040461698549	1,9903593193319
128	0,5533714452637	6,9890038864539	-7,542375331717	127	-0,163189979819	-1,140535403189
256	0,3381700668855	0,9234149303091	-1,261584997194	255	0,3818655772621	0,3526203754150
512	-0,716668665241	-7,044731834250	7,761400499492	511	-0,509705312119	3,5907372383748
1024	-1,175122162116	-1,564120876992	2,739243039110	1023	-1,284617999313	2,0092978316872
2048	-2,168764546515	0,2584107252435	1,910353821271	2047	3,9293644705157	1,0153899225722
4096	-0,876097912627	-1,034420616942	1,910518529570	4095	-0,981932564784	1,0157312894600
8192	-0,887702523859	-1,022816006266	1,910518530127	8191	-0,993073322900	1,0157312900592
16384	-0,910442525265	-1,000076004861	1,910518530127	16383	-1,015654095407	1,0157312900558
32768	-0,954844340425	-0,955674189700	1,910518530127	32767	-1,062842651818	1,0157312900558

На рис. 9–12 показаны графики модулей и модулей аргументов комплексно-сопряженные корней x_8 и x_9 , а также x_{16} и x_{17} ,

которые находятся из решений соответствующих квадратных уравнений с коэффициентами p и q , найденных по формулам (3.2) и (3.3).

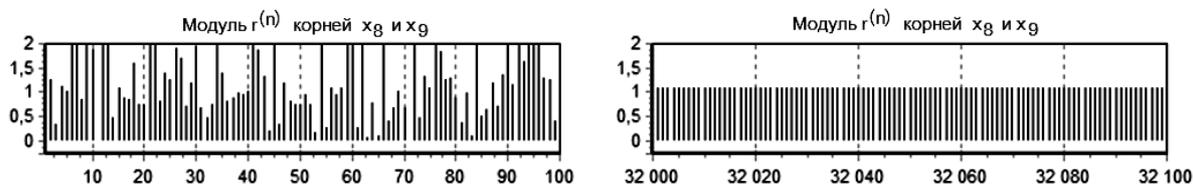


Рис. 9. Значения модулей $r^{(n)}$ корней x_8 и x_9 алгебраического уравнения (3.1)

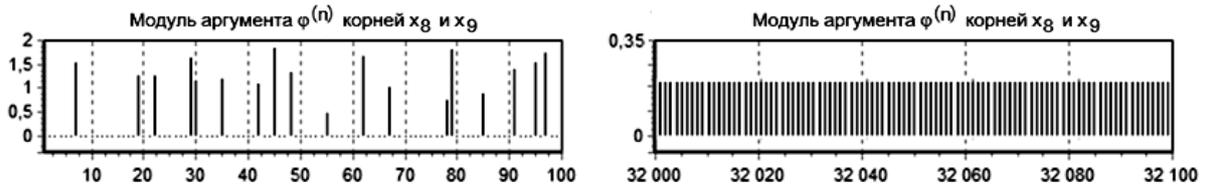


Рис. 10. Значения модулей аргумента $\varphi^{(n)}$ корней x_8 и x_9 алгебраического уравнения (3.1)

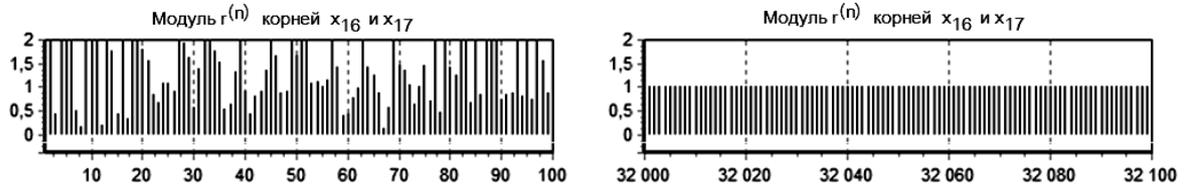


Рис. 11. Значения модулей $r^{(n)}$ корней x_{16} и x_{17} алгебраического уравнения (3.1)

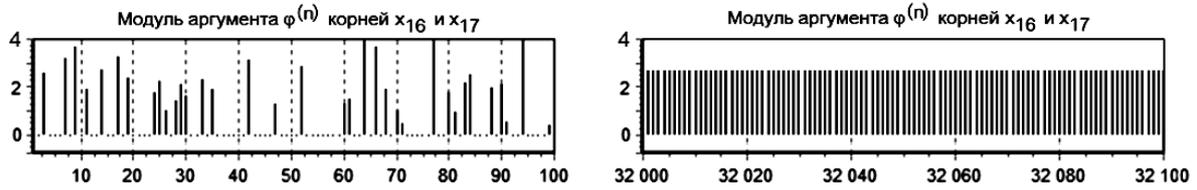


Рис. 12. Значения модулей аргумента $\varphi^{(n)}$ корней x_{16} и x_{17} алгебраического уравнения (3.1)

В табл. 5 и табл. 6 приведены результаты определения значений комплексно-сопряженных корней x_8 и x_9 , а также x_{16} и x_{17} , уравнения (3.1), найденных с использованием алгоритма Рутисхаузера, т. е. вычислений по формулам (3.2) и (3.3) коэффициентов p_n и q_n соответствующих квадратных уравнений. Из табл. 5 видно, что использование 1024 "под-

ходящих дробей", установленных по схеме Рутисхаузера, достаточно чтобы определить значения комплексных корней с погрешностью порядка 10^{-12} .

В табл. 7 приведены значения всех комплексно-сопряженных корней алгебраического уравнения (3.1), установленные по алгоритму Рутисхаузера.

Таблица 5. Вычисление модуля и аргумента корней x_8 и x_9 полинома (3.1),

$$x_{8,9} = 1,08693657398544 e^{\pm i0,191400165064972}$$

Номер, n	Модуль числа, r_n	$\varepsilon_r = r_{сп} - r_{оп} $	Аргумент числа, φ_n	$\varepsilon_\varphi = \varphi_{сп} - \varphi_{оп} $
4	1,1158899168281	0,0289533428426681	0	0,191400165064972
8	0,8230496025223	0,263886971463101	0	0,191400165064972
16	0,8844736889372	0,202462885048224	0	0,191400165064972
32	0,4476376907124	0,63929888327295	0	0,191400165064972
64	0,7555399227471	0,331396651238304	0	0,191400165064972
128	3,2069239079107	2,11998733392526	0	0,191400165064972
256	1,0888105294875	0,00187395550213496	$\pm 0,1980060837294$	0,00660591866450166
512	1,0869367669694	1,92984023931878E-7	$\pm 0,1914017768656$	1,61180066383496E-6
1024	1,0869365739869	1,54975316433992E-12	$\pm 0,1914001650734$	8,42771681705979E-12
2048	1,0869365739869	1,54946736864725E-12	$\pm 0,1914001650733$	8,42647690990281E-12
4096	1,0869365739869	1,5494431909388E-12	$\pm 0,1914001650733$	8,42634412224173E-12
8192	1,0869365739870	1,6335975541043E-12	$\pm 0,1914001650737$	8,82576486665922E-12
16384	1,0869365739870	1,63945745000615E-12	$\pm 0,1914001650738$	8,85362471541879E-12
32768	1,0869365739870	1,60205822132692E-12	$\pm 0,1914001650736$	8,67602971616529E-12

Таблица 6. Вычисление модуля и аргумента корней x_{16} и x_{17} полинома (3.1),

$$x_{16,17} = 1,00783494363534 e^{\pm i 2,81716408723112}$$

Номер, n	Модуль числа, r_n	$\varepsilon_r = r_{cn} - r_{dp} $	Аргумент числа, φ_n	$\varepsilon_\varphi = \varphi_{cn} - \varphi_{dp} $
4	3,1809371986261	2,17310225499081	0	2,81716408723112
8	0,1567167818651	0,85111816177014	0	2,81716408723112
16	2,1596173207825	1,15178237714722	0	2,81716408723112
32	3,8969189396028	2,88908399596747	0	2,81716408723112
64	1,4108009495786	0,40296600594327	0	0,49295154608135
128	7,6906763843418	6,68284144070649	0	2,81716408723112
256	0,8435806582107	0,164254285424618	0	2,81716408723112
512	0,4940946940303	0,51374024960496	0	2,81716408723112
1024	1,4174970305743	0,409662086939048	$\pm 2,880952923763$	0,063788836531610
2048	1,0076655807222	0,000169362913131	$\pm 2,817407581073$	0,000243493842078
4096	1,0078349514975	7,862186801122E-9	$\pm 2,817164097997$	1,076571377943E-8
8192	1,0078349517947	8,159444486385E-9	$\pm 2,817164097986$	1,075460564462E-8
16384	1,0078349517931	8,15780688964E-9	$\pm 2,817164097991$	1,075943707414E-8
32768	1,0078349517931	8,157792354395E-9	$\pm 2,817164097991$	1,075947995803E-8

Таблица 7. Таблица комплексных корней полинома (3.1), установленных алгоритмом Рутисхаузера

Номер корня	Модуль комплексного числа, r_{dp}	$\varepsilon_r = r_{cn} - r_{dp} $	Аргумент комплексного числа, φ_{dp}	$\varepsilon_\varphi = \varphi_{cn} - \varphi_{dp} $
x_3	1,3019083651899	3,06166762938358E-9	1,571198153935	2,1304093471979E-12
x_4	1,3019083651899	3,06166762938358E-9	-1,571198153935	2,1304093471979E-12
x_6	1,1336534947225	2,4093037300746E-7	2,6298587925427	3,78395993978807E-7
x_7	1,1336534947225	2,4093037300746E-7	-2,6298587925427	3,78395993978807E-7
x_8	1,0869365738996	8,5780759882456E-11	0,1914001646587	4,0619430429346E-10
x_9	1,0869365738996	8,5780759882456E-11	-0,1914001646587	4,0619430429346E-10
x_{10}	1,0412820666723	1,37600067427485E-7	2,3480631000996	1,2232170917446E-7
x_{11}	1,0412820666723	1,37600067427485E-7	-2,3480631000996	1,2232170917446E-7
x_{12}	1,0215908026600	4,52721716462812E-9	0,8725169878547	8,0012696357812E-9
x_{13}	1,0215908026600	4,52721716462812E-9	-0,8725169878547	8,0012696357812E-9
x_{14}	1,0161376755928	8,3623723971890E-10	0,3475864211367	1,0270492818974E-8
x_{15}	1,0161376755928	8,3623723971890E-10	-0,3475864211367	1,0270492818974E-8
x_{16}	1,0078350921916	0,00000012427761	2,8171646736139	0,00000058171811
x_{17}	1,0078346494686	0,0000002941667	-2,817164673613	0,0000005863828
...
x_{33}	0,9695948226639	7,0576164118603E-10	1,0435529637427	4,5125132536877E-10
x_{34}	0,9695948226639	7,0576164118603E-10	-1,0435529637427	4,5125132536877E-10
x_{35}	0,9532568700350	2,60624568175255E-8	0,7306320864041	3,05133764805254E-8
x_{36}	0,9532568700350	2,60624568175255E-8	-0,7306320864041	3,05133764805254E-8
x_{37}	0,9417118641751	1,53780326873671E-8	1,2600942028354	3,10873485659348E-8
x_{38}	0,9417118641751	1,53780326873671E-8	-1,2600942028354	3,10873485659348E-8
x_{39}	0,8837659758061	3,2978216579153E-8	1,8060231931201	5,69398196464911E-8
x_{40}	0,8837659758061	3,2978216579153E-8	-1,8060231931201	5,69398196464911E-8

Сравнение результатов вычисления комплексных корней уравнения (3.1), помещенных в табл. 2 и табл. 7, показывает, что алгоритм Рутисхаузера обеспечивает большую точность в определении корней, нежели r/φ -алгоритм.

В табл. 8 приведены действительные корни полинома (3.1), также найденные при помощи r/φ -алгоритма, т. е. формул (2.2) и (2.3).

Таблица 8. Действительные корни полинома (3.1)

Номер корня	Значения корней	$\varepsilon_\varphi = x_{cn} - x_{dp} $
x_1	-9,3604396905217	0,0000204683472
x_2	6,2763297683441	0,0000112704437
x_5	-1,1741951605108	0,0000001843916
x_{28}	-0,988530339599	0,000000219673
x_{41}	-0,841336008445	0,0000000811259

На рис. 13 показано расположение корней уравнения (3.1) на комплексной плоскости.

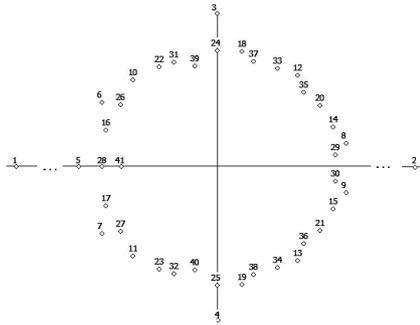


Рис. 13. Расположение корней уравнения (3.1) на комплексной плоскости

Заключение

Выше отмечалось, что формула (2.1) представляет корни полинома n -й степени через его коэффициенты. Используя эту формулу, можно устанавливать различные критерии, связанные с корнями полиномов общего вида. Таким образом, произвольное алгебраическое уравнение степени n разрешимо с использованием r/φ -алгоритма, т. е. формул (2.2) и (2.3), в функциях $N_i^{(n)}$, записываемых отношениями определителей Тейлора бесконечного порядка (2.1).

Список литературы

1. Кутищев Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени: теория, методы, алгоритмы. М.: Изд-во URRS, 2010. 232 с.
2. Корчагин И.Ф. Алгебраические уравнения. М.: Физматкнига, 2006. 160 с.
3. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972. 400 с.

4. Шмойлов В.И., Тучапский Р.И. Алгебраические уравнения. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений // Библиогр. указатель. Нац. акад. наук Украины, Ин-т приклад. проблем механики и математики. Львов, 2003. 83 с.
5. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби: в 3 т. Т. 2. Расходящиеся непрерывные дроби. Нац. акад. наук Украины, Ин-т приклад. проблем механики и математики. Львов, 2004. 558 с.
6. Шмойлов В.И., Коваленко В.Б. Некоторое применение алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестник Южного научного центра РАН, 2012. № 4 (149). С. 3–13.
7. Шмойлов В.И., Савченко Д.И. Об алгоритме суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2013. № 2. С. 258–276.
8. Кириченко Г.А., Шмойлов В.И. Алгоритмы суммирования расходящихся непрерывных дробей и некоторые их применения // Журн. вычислит. математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 4. С. 558–573.
9. Шмойлов В.И., Редин А.А., Никулин Н.А. Непрерывные дроби в вычислительной математике. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. 228 с.
10. Aitken A.C. On Bernulli's numerical solution of algebraic equations. Edinburg, Proc. Roy. Soc., (1925/26). P. 289–305.
11. Шмойлов В.И. Непрерывные дроби и r/φ -алгоритм. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. 608 с.
12. Рутисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей. М.: ИИЛ, 1960. 93 с.

The solution of algebraic equations using Rutishauser-Nikiportsa

V. I. Shmoylov¹, V. V. Selyankin², G. A. Kirichenko²

¹Research Institute Multiprocessor computing systems Southern Federal University
Russia, 347900, Taganrog, Chekhov st., 2

²Institute of Computer technologies and information safety Southern Federal University
Russia, 347900, Taganrog, Nekrasovsky, 44; vt_gak@mail.ru; 8(8634)37-14-28

Presents analytical expressions representing all the roots of a random algebraic equation of the n -th degree through the ratio of the original equation. These formulas consist of two relations infinite Toeplitz determinants, diagonal elements of which are the coefficients of the algebraic equation. Such structures were called continuous fractions of Nikiportsa. For efficient calculation of the values of continued fractions of Nikiportsa used recurrent algorithm of Rutishauser. As an example, consider the solution of the algebraic equation 41-th degree.

Key words: algebraic equations; infinite Toeplitz determinants; divergent continuous fraction; r/φ -algorithm.