ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2015 Математика. Информатика. Механика Вып. 2 (29)

УДК 519.21:004.94

Об одной численно-аналитической схеме расчета первых моментных функций вектора состояния линейной стохастической интегро-дифференциальной системы

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул.Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

В работе рассматривается приближенная схема анализа линейной динамической системы, описываемой стохастическими интегро-дифференциальными уравнениями. Схема базируется на локальной аппроксимации ядер этих уравнений, позволяющей на основе расширения пространства состояния привести исходные уравнения к системе линейных стохастических дифференциальных уравнений и, как следствие, построить цепочку замкнутых обыкновенных дифференциальных уравнений для вычисления первых моментных функций вектора состояния системы.

Ключевые слова: *стохастический анализ*; *линейная динамическая система*; *распределенное запаздывание*; *моделирование*; *вектор состояния*; *переходный процесс.*

Введение

Модели в форме детерминированных и стохастических интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ, СИДУ), обыкновенных и в частных производных, интересны как с теоретической, так и практической точек зрения вследствие того, что эти уравнения описывают значительное число явлений в различных областях, в частности, в теории колебаний с учетом аэроавтоупругости [1], наследственности материала [2], вязкоупругости [3] и др. Общая теория и первичная классификация детерминированных интегро-дифференциальных уравнений была разработана Вито Вольтерра [4] в первой половине XX в. Некоторые современные общие приложения ИДУ рассмотрены в [5].

Системы обыкновенных СИДУ, например в стохастической механике, часто возникают как результат применения таких методов, как метод конечных элементов (МКЭ) [6], метод конечных разностей (МКР) [7], метод Галеркина [8], метод прямых [9], разложение неизвестных функций по собственным функциям краевой задачи [10, 11] или каким-либо специальным функциям [12], к СИДУ в частных производных (СИДУвЧП) [13], которые описывают непрерывные вязкоупругие среды. После преобразования ИДУвЧП или СИДУвЧП в обыкновенные ИДУ или СИДУ зависящая от времени структура ядер в обыкновенных детерминированных или стохастических интегро-дифференциальных уравнениях движения сохраняется.

От некоторых таких уравнений (как пра-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобразования и науки России (Задание № 2014/153).

вило, это случаи вырожденности ядер [11, 14, 15]) возможен переход к дифференциальным уравнениям с помощью расширения пространства состояния. Однако существуют эволюционные ИДУ, служащие моделями во многих областях науки и содержащие интегрирование по времени, для которых это сделать сложно. Такие уравнения [4], обыкновенные и в частных производных, описывают сложное поведение объектов в различных средах с учетом предыдущей истории, температуры и других факторов [16–20].

Нелинейные и линейные стохастические ИДУ, кроме предыстории, позволяют учесть влияние на поведение объекта случайных возмущений. Достаточно общие формы линейных систем СИДУ имеют следующий вид:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \mathbb{A}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathbb{B}(t,\tau)\,\boldsymbol{X}(\tau)\,d\tau + \\ +\ \boldsymbol{c}(t) + \mathbb{G}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0. \quad (0.1)$$

В этих уравнениях t – время, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$, $T < +\infty$;

$$\boldsymbol{X}(t) = \operatorname{col}\big(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\big)$$

и

$$\boldsymbol{V}(t) = \operatorname{col}\big(V_1(t), V_2(t), \ldots, V_m(t)\big)$$

– случайные векторные процессы, определяющие состояние системы (вектор состояния) и случайные возмущения;

$$\boldsymbol{c}(t) = \operatorname{col}\big(c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)\big),$$

$$\mathbb{A}(t) = \{a_{ij}(t)\} \in \mathcal{M}_{n\times n},$$

$$\mathbb{B}(t,\tau) = \{b_{ij}(t,\tau)\} \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

($b_{ij}(t,\tau) \geqslant 0$ для всех τ, $t \in \mathbb{T}$),

$$\mathbb{G}(t) = \{g_{ij}(t)\} \in \mathcal{M}_{n\times m}$$

– неслучайные вектор и матрицы, компоненты которых дифференцируемы необходимое число раз по каждому из своих аргументов; $\boldsymbol{X}_0$ – случайный вектор с известными характеристиками, причем вектор $\boldsymbol{V}(t)$ статистически независим от $\boldsymbol{X}_0$; $\mathbb{R}^s$ – стандартное евклидово пространство размерности s, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; $\operatorname{col}\big(d_1, d_2, \ldots, d_s\big)$ – вектор-столбец с соответствующими компонентами; $\mathcal{M}_{s\times q}$ – множество действительных матриц размерности $s \times q$; точкой или точками сверху символа обозначаются производные по переменной t соответствующего порядка.

Вопросы связанные с определением СИДУ, существованием и единственностью их решений представлены в [21,22]. Общие идеи стохастической динамики были рассмотрены в [12, 23, 24].

Хорошо известно (см., например, [25] и там историю развития методов численного анализа), что решение интегро-дифференциальных уравнений является очень сложной проблемой даже в детерминированном случае. Этих трудностей еще больше при анализе линейных и нелинейных стохастических задач. Несмотря на существование ряда результатов, касающихся алгоритмов для стохастических интегро-дифференциальных уравнений (см., например, [13]), очень полезно адаптировать существующие методы решения детерминированных ИДУ для стохастических случаев, потому что основная часть методов качественного и количественного анализа явлений, описываемых ИДУ, состоит из детерминированных схем.

Ранее был разработан ряд схем для построения численных приближений решений детерминированных и стохастических интегро-дифференциальных уравнений. Что касается рассмотрения стохастических задач, приближенные алгоритмы обычно используются для прямого расчета поведения систем во времени. Эти схемы включают:

– полностью численные методы (классические и модифицированные гибридные), такие как явные и неявные схемы Эйлера [25] и МКЭ [26] для ИДУвЧП, Tau-метод [27], одношаговые и многошаговые методы Рунге-Кутты [28–31] для ИДУ, одношаговые методы Рунге-Кутты 4-го порядка [32], метод Рунге-Кутты [33] для расчета ковариационными функций, методы экстраполяции [34], Галеркина [35], итераций на последнем шаге [1], использование вейвлетов [36], определенных глобально Sinc-базисных функций [37], приближенное преобразование ИДУвЧП в ДУвЧП и СИДУ в СДУ на основе усреднения ядра [13, 38–40];

– приближенные аналитические методы, в т.ч. методы рядов Тейлора [41], последовательных приближений для вычисления функции Грина [42], асимптотический метод [43,44] для ИДУ и метод стохастического усреднения для СИДУ [2,45], методы многих масштабов [46], коллокации [47], теории возмущений [48], неподвижной точки на основе биортогональных систем для банаховых пространств [49].

Заметим, что существует ряд приближенных схем для упрощения интегральных ядер, такие как использование рядов Прони и алгоритм аппроксимации полиномами Лагерра для представления функций релаксации [50], метод приближения переходных функций экспонентами [1], приближенный вывод уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для СИДУ [51], расширения фазового пространства для случая ограниченности носителя ядра [52] и т.д. Основная цель таких упрощений – получить вырожденные в том или ином смысле ядра, что позволяет на основе расширения пространства состояния привести исходные СИДУ к системе стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Методика, представленная в настоящей работе, предназначена для анализа линейных динамических систем, описываемых стохастическими интегро-дифференциальными уравнениями, созвучна идеям алгоритмов данного направления, близка к схемам, изложенным в работах [15, 53], и базируется на локальной аппроксимации ядер СИДУ, что позволяет построить цепочку замкнутых обыкновенных дифференциальных уравнений для вычисления первых моментных функций вектора состояния системы.

1. Постановка задачи

Пусть $\boldsymbol{X}_0$ – гауссов случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{m}_{X_0} = \mathcal{E}[\boldsymbol{X}_0]\,,$$
$$\mathbb{D}_{X_0X_0} = \mathcal{E}\Big[\{\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{m}_{X_0}\}\{\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{m}_{X_0}\}^{\top}\Big]\,;$$

$\boldsymbol{V}(t)$ – случайный процесс, удовлетворяющий векторному линейному СДУ Ито

$$d\boldsymbol{V}(t) = \mathbb{H}\,\boldsymbol{V}(t)\,dt + \mathbb{Q}\,d\boldsymbol{W}(t), \tag{1.1}$$
$$t \in (t_0, T] \tag{1.2}$$

со случайным начальным условием

$$\boldsymbol{V}(t_0) = \boldsymbol{V}_0. \tag{1.3}$$

В уравнении (1.1)

$$\mathbb{H} = \{h_{ij}\} \in \mathcal{M}_{m\times m}$$

и

$$\mathbb{Q} = \{q_{ij}\} \in \mathcal{M}_{m\times r}$$

– заданные постоянные матрицы;

$$\boldsymbol{W}(t) = \mathrm{col}\big(W_1(t), W_2(t), \ldots, W_r(t)\big)$$

– векторный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами, такой, что его обобщенная производная по времени t, обозначаемая через

$$\dot{\boldsymbol{W}}(t) = \mathrm{col}\big(\dot W_1(t), \dot W_2(t), \ldots, \dot W_r(t)\big),$$

есть векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами,

$$\mathcal{E}\Big[\dot{\boldsymbol{W}}(t)\Big] = 0,$$
$$\mathcal{E}\Big[\dot{\boldsymbol{W}}(t)\,\dot{\boldsymbol{W}}^{\top}(t')\Big] = 2\,\pi\,\mathbb{E}_r\,\delta(t-t');$$

δ – дельта-функция Дирака; $\top$ – символ транспонирования; $\mathbb{E}_s$ – единичная матрица порядка s; $\boldsymbol{V}_0$ – начальный вектор, представляющий собой центрированную гауссову случайную величину со значениями в $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что плотность вероятности вектора $\boldsymbol{V}_0$ – гауссово стационарное распределение, ассоциированное с уравнением (1.1). Параметрами этого распределения являются среднее $\boldsymbol{m}_{V_0} = \mathcal{E}[\boldsymbol{V}_0] = 0$ и матрица дисперсий $\mathbb{D}_{V_0V_0} = \mathcal{E}\big[\boldsymbol{V}_0\,(\boldsymbol{V}_0)^{\top}\big]$. Кроме того, в уравнении (1.1) матрицы $\mathbb{H}$ и $\mathbb{Q}$ таковы, что $\boldsymbol{V}$ – случайный процесс второго порядка. Следовательно, $\{\boldsymbol{V}(t), t \in [t_0, T]\}$ – стационарный центрированный непрерывный в среднем квадратическом гауссовский случайный процесс, для которого

$$\boldsymbol{m}_V(t) = \mathcal{E}[\boldsymbol{V}(t)] = \boldsymbol{m}_{V_0} = 0,$$
$$\mathbb{C}_{VV}(t_1,t_2) = \mathcal{E}\Big[\boldsymbol{V}(t_1)\,\boldsymbol{V}^{\top}(t_2)\Big] = \mathbb{C}_{VV}(t_1-t_2),$$
$$\mathbb{D}_{VV}(t) = \mathbb{D}_{VV} = \mathbb{C}_{VV}(0) = \mathbb{C}_{V_0V_0}.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{X}_0$ и $\boldsymbol{V}$ – гауссовские случайные вектор и процесс соответственно, линейность уравнений (0.1) и (1.1), а также высказанные выше предположения, можно установить, что $\{\boldsymbol{X}(t), t \in [t_0, T]\}$

– непрерывный в среднем квадратическом гауссовский случайный процесс второго порядка. При этом для всех непустых и неупорядоченных точечных подмножеств отрезка $[t_0, T]$ многомерные распределения расширенных случайных векторов состояния будут гауссовыми, определяемыми соответствующими векторами средних и матрицами ковариационных функций.

Определим теперь векторную функцию математического ожидания, матрицы ковариационных функций и дисперсий векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$, а также все взаимные ковариационные функции $\boldsymbol{X}(t)$ с вектором возмущения $\boldsymbol{V}(t)$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m}_X(t) &= \mathcal{E}[\boldsymbol{X}(t)]\,,\\
\mathbb{C}_{XX}(t_1,t_2) &= \mathcal{E}\Big[\boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{X}^\top(t_2)\Big] - \\
&\quad - \boldsymbol{m}_X(t_1)\,\boldsymbol{m}_X^\top(t_2),\\
\mathbb{D}_{XX}(t) &= \mathbb{C}_{XX}(t,t),\\
\mathbb{C}_{XV}(t_1,t_2) &= \mathcal{E}\Big[\boldsymbol{X}(t_1)\,\boldsymbol{V}^\top(t_2)\Big]\,,\\
\mathbb{C}_{VX}(t_1,t_2) &= \mathcal{E}\Big[\boldsymbol{V}(t_1)\,\boldsymbol{X}^\top(t_2)\Big]\,.
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание введенные определения и обозначения, несложно увидеть, что решение поставленной задачи заключается в создании схемы для вычисления векторной функции математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t)$ и матрицы ковариационных функций $\mathbb{C}_{XX}(t_1,t_2)$ для любых $t, t_1, t_2 \in (t_0, T]$.

2. Методика решения задачи

Для получения требуемых уравнений необходимо расширить вектор состояния системы (0.1) до нового случайного вектора $\boldsymbol{Y}(t) = \operatorname{col}(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{V}(t))$ со значениями в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда вектор-функция математического ожидания $\boldsymbol{m}_Y(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^{n+m}$ и матрица ковариационных функций $\mathbb{C}_{YY}(t_1,t_2) \in \mathcal{M}_{(n+m)\times(n+m)}$ случайного процесса $\boldsymbol{Y}(t)$ определятся соотношениями

$$
\boldsymbol{m}_Y(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X(t) \\ \boldsymbol{0}_m \end{bmatrix}, \tag{2.1}
$$

$$
\mathbb{C}_{YY}(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{XX}(t_1,t_2) & \mathbb{C}_{XV}(t_1,t_2) \\ \mathbb{C}_{VX}(t_1,t_2) & \mathbb{C}_{VV}(t_1,t_2) \end{bmatrix}. \tag{2.2}
$$

Введенный случайный процесс $\boldsymbol{Y}(t)$ будет удовлетворять системе СИДУ

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{Y}(t) &= \big\{\overline{\mathbb{A}}(t)\,\boldsymbol{Y}(t) + \\
&+ \int_{t'}^{t} \overline{\mathbb{B}}(t,\tau)\,\boldsymbol{Y}(\tau)\,d\tau + \overline{\boldsymbol{c}}(t)\big\}\,dt + \\
&+ \overline{\mathbb{Q}}\,d\boldsymbol{W}(t), \quad t_0 \leqslant t' < t \leqslant T
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

со случайным начальным условием

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{Y}(t') = \boldsymbol{Y}',\\
&\boldsymbol{Y}' = \operatorname{col}(\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{V}_0) \quad \text{для} \quad t' = t_0.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

В уравнении (2.3) матрицы

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbb{A}}(t) &\in \mathcal{M}_{(n+m)\times(n+m)},\\
\overline{\mathbb{B}}(t) &\in \mathcal{M}_{(n+m)\times(n+m)},\\
\overline{\mathbb{G}}(t) &\in \mathcal{M}_{(n+m)\times m},\\
\overline{\mathbb{Q}} &\in \mathcal{M}_{(n+m)\times r}
\end{aligned}
$$

и вектор

$$
\overline{\boldsymbol{c}}(t) \in \mathbb{R}^{n+m}
$$

имеют блочную структуру и определяются так:

$$
\overline{\mathbb{A}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{A}(t) & \mathbb{G}(t) \\ \mathbb{O}_{m\times n} & \mathbb{H} \end{bmatrix},
$$

$$
\overline{\mathbb{B}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{B}(t) & \mathbb{O}_{n\times m} \\ \mathbb{O}_{m\times n} & \mathbb{O}_{m\times m} \end{bmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}(t) \\ \boldsymbol{0}_m \end{bmatrix},
$$

$$
\overline{\mathbb{G}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{G}(t) \\ \mathbb{O}_{m\times m} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n\times r} \\ \mathbb{Q} \end{bmatrix},
$$

где $\mathbb{O}_{s\times q}$ и $\boldsymbol{0}_s$ — нулевые матрица и вектор размерностей $s \times q$ и s соответственно.

Введем временную сетку

$$
\begin{gathered}
t_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \ldots < t_N = T,\\
h_k = t_k - t_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N,\\
\max_k h_k = h_* \ll 1,
\end{gathered}
$$

так, чтобы матричное ядро $\overline{\mathbb{B}}(t,\tau)$ на отрезке $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$, $k \geqslant 1$ с достаточной точностью можно было заменить на

$$
\widehat{\mathbb{B}}_k(t,\tau) = \sum_{\ell=0}^{L} \widehat{\mathbb{B}}_{k\ell}(t)\,(\tau - t_{k-1/2})^\ell,
$$

где

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{B}}_{k\ell}(t) &= \frac{1}{\ell!}\,\frac{\partial^\ell \overline{\mathbb{B}}(t,\tau)}{\partial \tau^\ell}\bigg|_{\tau = t_{k-1/2}},\\
t_{k-1/2} &= \frac{t_{k-1} + t_k}{2}.
\end{aligned}
$$

Тогда для отрезка Δ_k аппроксимацию системы (2.3) с начальным условием (2.4) можно записать так:

$$d\boldsymbol{Y}_k(t) = \Big\{\overline{\mathbb{A}}(t)\,\boldsymbol{Y}_k(t) + \\ + \int_{t_{k-1}}^{t} \widehat{\mathbb{B}}_k(t,\tau)\,\boldsymbol{Y}_k(\tau)\,d\tau + \overline{\boldsymbol{c}}(t)\Big\}\,dt + \\ + \ \overline{\mathbb{Q}}\,d\boldsymbol{W}(t), \quad t_{k-1} < t \leqslant t_k, \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{Y}_k(t_{k-1}) = \boldsymbol{Y}_{k-1}(t_{k-1}). \qquad (2.6)$$

Введем новые неизвестные случайные вектор-функции $\{\boldsymbol{Z}_{k\ell}(t),\ \ell = \overline{0,L},\ t \in \Delta_k\}$ с помощью соотношения

$$\boldsymbol{Z}_{k\ell}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} (\tau - t_{k-1/2})^{\ell}\,\boldsymbol{X}_k(\tau)\,d\tau.$$

Тогда система СДУ для векторного случайного процесса $\boldsymbol{\Xi}_k(t) = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{Y}_k(t), \boldsymbol{Z}_{k\ell}(t),\ \ell = \overline{0,L},\ t \in \Delta_k\big)$ будет иметь вид:

$$d\boldsymbol{\Xi}_k(t) = \big[\mathfrak{A}_k(t)\,\boldsymbol{\Xi}_k(t) + \mathfrak{c}_k(t)\big]\,dt + \\ + \mathfrak{Q}_k\,d\boldsymbol{W}(t), \quad (2.7)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_k(t_{k-1}) = \boldsymbol{\Xi}_{k-1}(t_{k-1}), \qquad (2.8)$$

где

$$\mathfrak{A}_k(t) = \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{A}}(t) & \mathcal{A}_k^{[12]}(t) \\ \mathcal{A}_k^{[21]}(t) & \mathcal{A}_k^{[22]}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_k^{[12]}(t) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{B}}_{k0}(t) & \ldots & \widehat{\mathbb{B}}_{kL}(t) \\ \mathbb{O}_{m\times n} & \ldots & \mathbb{O}_{m\times n} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_k^{[21]}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_n & \mathbb{O}_{n\times m} \\ (t - t_{k-1/2})\,\mathbb{E}_n & \mathbb{O}_{n\times m} \\ \ldots & \ldots \\ (t - t_{k-1/2})^L\,\mathbb{E}_n & \mathbb{O}_{n\times m} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_k^{[22]}(t) = \mathbb{O}_{n(L+1)\times n(L+1)},$$

$$\mathfrak{c}_k(t) = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{c}}(t) \\ \boldsymbol{0}_{n(L+1)} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{Q}_k = \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{Q}} \\ \mathbb{O}_{n(L+1)\times r} \end{bmatrix}.$$

Используя уравнения (2.7), (2.8) и соотношения из [54, §1.3], можно получить системы ОДУ для вектора математических ожиданий

$$\dot{\boldsymbol{m}}_{\Xi_k}(t) = \mathfrak{A}_k(t)\,\boldsymbol{m}_{\Xi_k}(t) + \mathfrak{c}_k(t), \qquad (2.9)$$

матрицы ковариационных функций

$$\frac{\partial \mathbb{C}_{\Xi_k\Xi_k}(t,\tau)}{\partial t} = \mathfrak{A}_k(t)\,\mathbb{C}_{\Xi_k\Xi_k}(t,\tau), \\ t_{k-1} \leqslant \tau < t \leqslant t_k, \quad (2.10)$$

и матрицы дисперсий

$$\dot{\mathbb{D}}_{\Xi_k\Xi_k}(t) = \mathfrak{A}_k(t)\,\mathbb{D}_{\Xi_k\Xi_k}(t) + \\ + \big[\mathfrak{A}_k(t)\,\mathbb{D}_{\Xi_k\Xi_k}(t)\big]^{\top} + 2\,\pi\,\mathfrak{Q}_k\,\mathfrak{Q}_k^{\top} \quad (2.11)$$

расширенного вектора состояния на промежутке Δ_k. Начальными условиями для указанных векторных и матричных функций будут:

$$\boldsymbol{m}_{\Xi_k}(t_{k-1}) = \boldsymbol{m}_{\Xi_{k-1}}(t_{k-1}), \qquad (2.12)$$

$$\mathbb{C}_{\Xi_k\Xi_k}(\tau,\tau) = \mathbb{D}_{\Xi_k\Xi_k}(\tau), \qquad (2.13)$$

$$\mathbb{D}_{\Xi_k\Xi_k}(t_{k-1}) = \mathbb{D}_{\Xi_{k-1}\Xi_{k-1}}(t_{k-1}). \qquad (2.14)$$

Итак, последовательно решая уравнения (2.9)–(2.11) с начальными условиями (2.12)–(2.14), мы получим характеристики случайного векторного процесса $\boldsymbol{\Xi}(t)$ на сегментах Δ_1, Δ_1, ..., Δ_N. По построению искомые характеристики процесса $\boldsymbol{X}(t)$ представляют собой первые блоки вектора $\boldsymbol{m}_{\Xi}(t)$ и матриц $\mathbb{C}_{\Xi\Xi}(t,\tau)$ и $\mathbb{D}_{\Xi\Xi}(t)$ размерностей n и $n\times n$ соответственно.

3. Пример

Исследуем переходный процесс, описываемый модельным уравнением

$$\ddot{U}(t) + 2\,\alpha\,\dot{U}(t) + \omega^2 U(t) + \\ + \beta\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)^2}\,\dot{U}(\tau)\,d\tau = \mu\,V(t), \quad (3.1) \\ U(0) = U_0, \quad \dot{U}(0) = \dot{U}_0,$$

где $\alpha > 0$, $\omega > 0$, β, $\gamma > 0$, μ – постоянные величины.

Если обозначить $U(t)$ через $X_1(t)$, а $\dot{U}(t)$ – через $X_2(t)$ ($n = 2$), то, приводя уравнение (3.1) к виду (0.1), получим

$$\mathbb{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\,\alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{B}(t,\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta e^{-\gamma(t-\tau)^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что процесс $V(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dV(t) = -h\,V(t)\,dt + q\,dW(t), \quad h > 0 \quad (3.2)$$

($m = r = 1$), а следовательно, спектральная плотность и дисперсия процесса $V(t)$ будут соответственно равны

$$\mathcal{S}_{VV}(\omega) = \frac{q^2}{\omega^2 + h^2}, \quad \mathcal{D}_{VV} = \pi\,\frac{q^2}{h}.$$

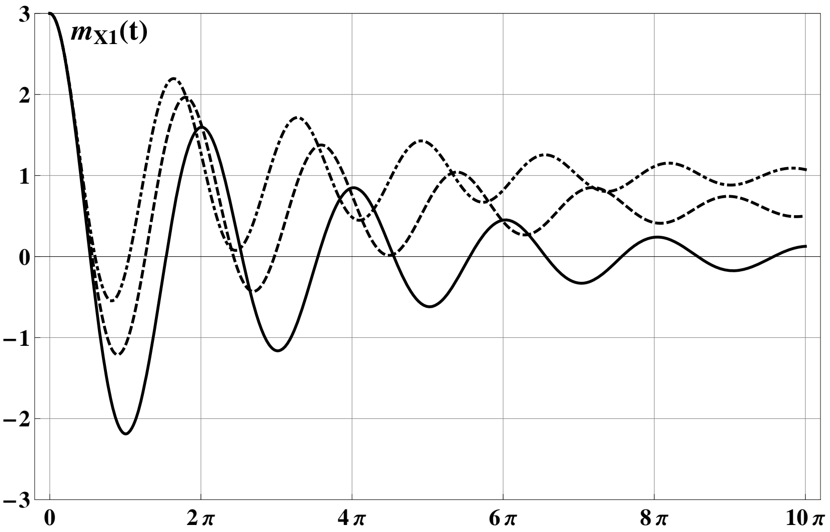

Рис.1

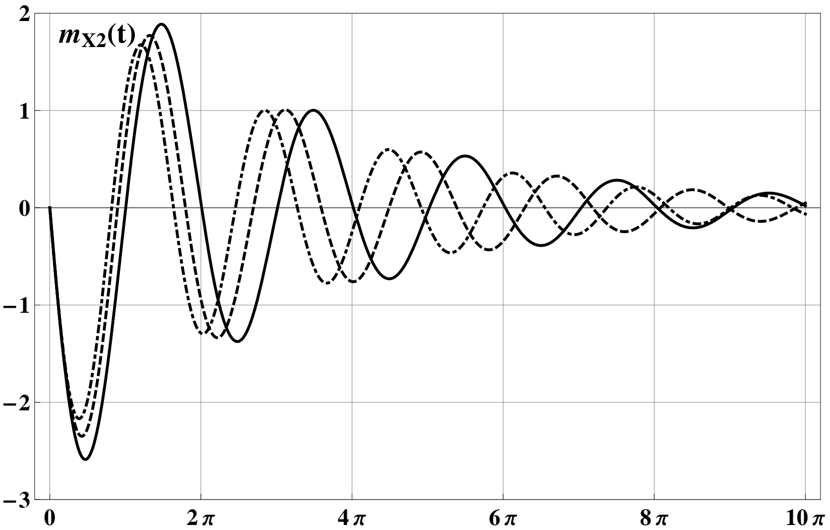

Рис.2

Результаты расчетов математических ожиданий и элементов матрицы дисперсий, проводившихся с помощью программы на входном языке пакета `Mathematica` [55], для следующих значений параметров:

$$\alpha = 0.1, \quad \beta = 0.2, \quad \gamma = 0.125,$$

$$\mu = 1.0, \quad T = 10.0\,\pi, \quad L = 4, \quad \omega = 1.0,$$

$$h = 2.0, \quad q = 0.6, \quad h_* = h_k = 0.005\,\pi,$$

$$\boldsymbol{m}_X(0) = \mathrm{col}(3.0, 0.0),$$

$$\mathbb{D}_{XX}(0) = \mathrm{diag}(0.25, 0.25)$$

отображены на рис. 1 ($m_{X1}(t)$); рис. 2 ($m_{X2}(t)$); рис. 3 ($D_{X11}(t)$); рис. 4 ($D_{X12}(t)$); рис. 5 ($D_{X22}(t)$) при $\beta = 0.0$, 0.25 и 0.5 непрерывными, штриховыми и штрих-пунктирными линиями соответственно.

Анализ приведенных рисунков показывает, что интегральный член играет роль добавочного демпфирования, а его величина существенно влияет на величины частот колебаний и смещений равновесных значений математических ожиданий и элементов матрицы дисперсий.

Заключение

Рассмотренную в настоящей статье процедуру можно отнести к схемам как расши-

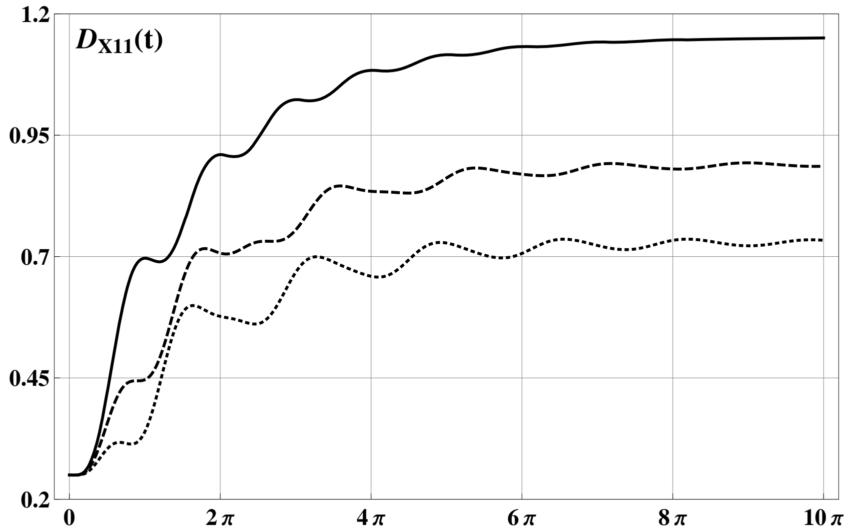

Рис.3

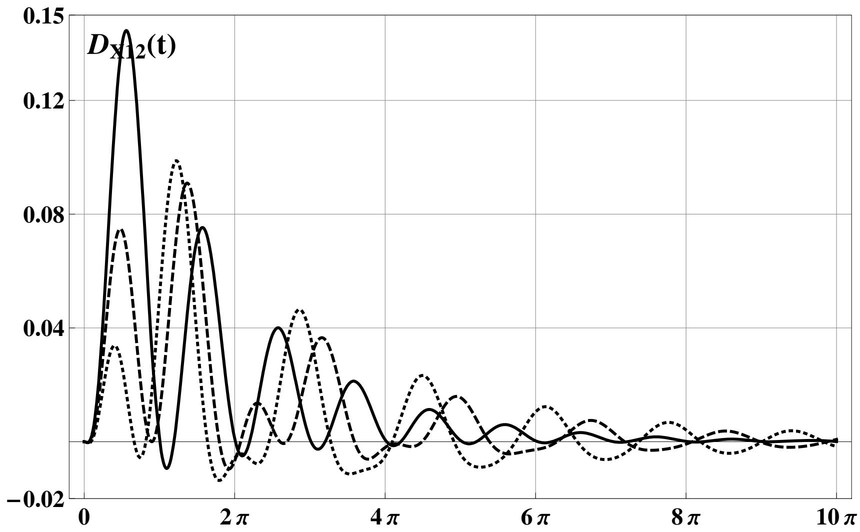

Рис.4

рения пространства состояния, так и анализа систем с изменяющейся структурой, причем если расширение такого пространства осуществляется единожды на этапе выбора точности аппроксимации $\sim O\big((0.5h_*)^L\big)$ матричного ядра системы, то изменение структуры (уравнений) происходит на каждом из сегментов Δ_k, $k = 1, 2, ..., N$, причем для решения ОДУ для математических ожиданий и элементов матрицы дисперсий на этих сегментах применимы стандартные численные интеграторы.

Используемое в данной работе тейлоровское разложение матричного ядра системы возможно только при наличии достаточного числа двусторонних производных у этого ядра внутри сегментов Δ_k и односторонних на его концах. В случае слабосингулярных ядер, которые нередко используются в моделях вязкоупругости, рассмотренный алгоритм непригоден. Для анализа уравнений с подобными ядрами необходимо обращение к специализированным схемам [56].

Список литературы

1. *Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А. и др.* Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 384 с.

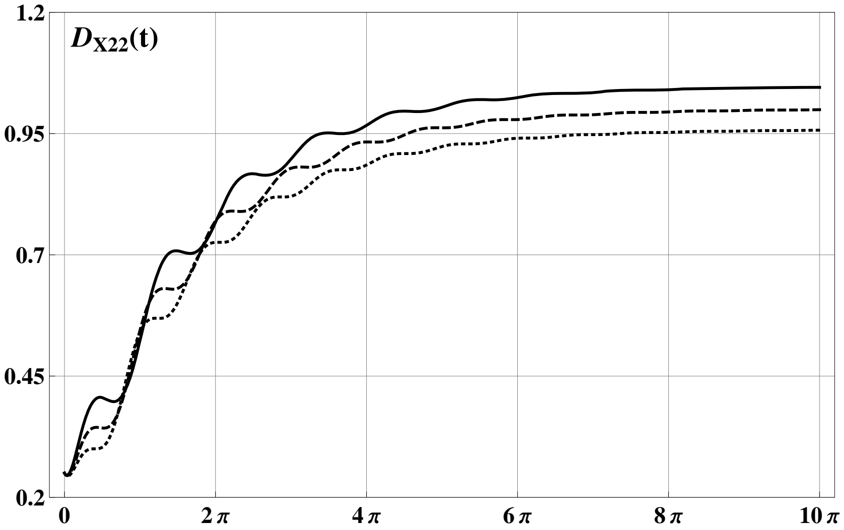

Рис.5

2. *Нгуен Т.К.* Нелинейные колебания вязкоупругих пластин под действием стационарных случайных сжимающих сил // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 12. С. 115–118.
3. *Потапов В.Д.* Устойчивость движения стохастической вязкоупругой системы // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 3. С. 137–145.
4. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
5. *Grigoriev Y.N., Ibragimov N.H., Kovalev V.F. et al.* Symmetries of integro-differential equations with applications in mechanics and plasma physics. Dordrecht, Heidelberg: Springer Science+Business Media, 2010. XIII+305 p.
6. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
7. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
8. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. М.: Наука, 1977. Т. 2. 400 с.
9. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 400 с.
10. *Филатов А.Н., Шарова Л.В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 152 с.
11. *Potapov V.D.* Stability of stochastic elastic and viscoelastic systems. Chichester: John Wiley and Sons, 1999. XI+275 p.
12. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Случайные процессы в нелинейных динамических системах. Аналитические и численные методы исследования. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 160 с.
13. *Soize C., Poloskov I.* Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation // Computers & Mathematics with Applications. 2012. Vol. 64. № 11. P. 3594–3612.
14. *Xie W.-C.* Dynamic stability of structures. Cambridge University Press, 2006. XVIII+435 p.
15. *Полосков И.Е.* Об анализе некоторых классов стохастических интегро-дифференциальных уравнений // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: Межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2003. С. 99–106.
16. *Ильюшин А.А., Победря Б.Б.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
17. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
18. *Ржаницын А.Р.* Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М.: Стройиздат, 1954. 288 с.

19. *Drozdov A.D., Kolmanovskii V.B., Nistri P. et al.* Stability of nonhomogeneous aging viscoelastic bodies under dynamic loading // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1995. Vol. 24, № 9. P. 1361–1375.
20. *Drozdov A.D.* A constitutive model in thermoviscoelasticity // Mechanics Research Communications. 1996. Vol. 23, № 5. P. 543–548.
21. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. Oxford: Woodhead Publishing, 2010. 422 p.
22. *Mohammed S.E.A.* Stochastic functional differential equations. Boston: Pitman, 1984. VI+245 p.
23. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 528 с.
24. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 488 с.
25. *Chen C., Shih T.* Finite element methods for integrodifferential equations. Singapore: World Scientific, 1998. 292 p.
26. *Golla D.F., Hughes P.C.* Dynamics of viscoelastic structures – a time domain, finite element formulation // Journal of Applied Mech. 1985. Vol. 52. P. 897–906.
27. *Khani A., Moghadam M.M., Shahmorad S.* Approximate solution of the system of non-linear Volterra integro-differential equations // Computational Methods in Applied Mathematics. 2008. Vol. 8, № 1. P. 77–85.
28. *Day J.T.* Note on the numerical solution of integro-differential equations // The Computer Journal. 1967. Vol. 9, № 4. P. 394–395.
29. *Mehdiyeva G., Imanova M., Ibrahimov V.* Application of the hybrid methods to solving Volterra integro-differential equations // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2011. Vol. 77. P. 1083–1087.
30. *Nguyen H.K., Hergman T.L., Cliff E.M.* Approximations for a class of Volterra integro-differential equations // Mathematical and Computer Modelling. 2005. Vol.42, № 5–6. P. 659–672.
31. *Wolkenfelt P.H.M.* Modified multilag methods for Volterra functional equations // Mathematics of Computation. 1983. Vol. 40, № 161. P. 301–316.
32. *Potapov V.D.* Nonlinear vibrations and stability of elastic and viscoelastic systems under random stationary loads // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46, № 3. P. 444–454.
33. *Чайковский М.В., Янович Л.А.* О численном нахождении корреляционных функций решения систем линейных интегро-дифференциальных уравнений со случайно возмущенной правой частью // Дифференциальные уравнения. 1987. № 2. С. 328–338.
34. *Chang S.H.* On certain extrapolation methods for the numerical solution of integro-differential equations // Mathematics of Computation. 1982. Vol. 39, № 159. P. 165–171.
35. *Lin T., Lin Y., Rao M. et al.* Petrov–Galerkin methods for linear Volterra integro-differential equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2001. Vol. 38, № 3. P. 937–963.
36. *Danfu H., Xufeng Sh.* Numerical solution of integro-differential equations by using CAS wavelet operational matrix of integration // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 194, № 2. P. 460–466.
37. *Jalaei K., Zarebnia M., Chalaki M.M.* Development of the Sinc method for nonlinear integro-differential equations // Australian Journal of Basic and Applied Sciences. 2010. Vol. 4, № 11. P. 5508–5515.
38. *Полосков И.Е.* Об анализе некоторых классов стохастических интегро-дифференциальных уравнений // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: Межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2003. Вып. 35. С. 99–106.
39. *Полосков И.Е.* О расчете первых моментов линейных интегро-дифференциальных систем с параметрическими возмущениями // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2006. Вып. 38. С. 133–142.

40. *Полосков И.Е.* Схема расширения вектора состояния для решения интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 2 (21). С. 59–65.

41. *Goldfine A.* Taylor series methods for the solution of Volterra integral and integro-differential equations // Mathematics of Computation. 1977. Vol. 31, № 139. P. 691–707.

42. *Hu Sh., Lakshmikantham V.* Monotone iterative technique for integro-differential equations // Асимптотические методы математической функции: сб-к науч. тр. / АН УССР. Ин-т математики. Киев: Наукова думка, 1988. С. 263–270.

43. *Нгуен В.Д.* Асимптотический метод исследования многочастотных колебаний в квазилинейных системах интегро-дифференциальных уравнений второго порядка // Украинский математический журнал. 1977. Т. 29, № 3. С. 404–410

44. *Плотников В.А., Рудык О.Г.* Об одной схеме усреднения в интегро-дифференциальных уравнениях // Украинский математический журнал. 1989. Т. 41, № 7. С. 995–997.

45. *Ariaratnam S.T.* Stochastic bifurcation in hereditary systems // 8th ASCE Specialty Conf. on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability (Univ. of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, 2000) / Proc. Paper PMC2000-163, 6 p. URL: http://www.usc.edu/dept/civil_eng/johnsone/pmc2000/sessions/papers/p163.pdf (дата обращения: 29.06.2015)

46. *Xu W., Rong H., Fang T.* Duffing oscillator with visco-elastic term under narrow-band random excitation // Acta Mechanica Sinica. 2002. Vol. 34, № 5. P. 764–771 (на китайском языке).

47. *Brunner H.* High-order methods for the numerical solution of Volterra integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1986. Vol. 15. P. 301–309.

48. *Grossman S.I., Miller R.K.* Perturbation theory for Volterra integrodifferential systems // Journal of Differential Equations. 1970. Vol. 8. P. 457–474.

49. *Berenguer M.I., Garralda-Guillem A.I., Galán M.R.* Biorthogonal systems approximating the solution of the nonlinear Volterra integro-differential equation // Fixed Point Theory and Applications. 2010. Article ID 470149. 9 p.

50. *Palmeri A., Muscolino G.* A numerical method for the time-domain dynamic analysis of buildings equipped with viscoelastic dampers // Structural Control and Health Monitoring. 2011. Vol. 18. P. 519–539.

51. *Кхием Н.Т.* О функции плотности вероятностей процессов, определяемых интегро-дифференциальными уравнениями // Украинский математический журнал. 1983. № 2. С. 227-234.

52. *Полосков И.Е.* Применение схемы МШ-РФП для анализа линейных стохастических систем с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 4 (8). С. 53–58.

53. *Полосков И.Е.* О расчете первых моментов линейных интегро-дифференциальных систем с параметрическими возмущениями // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2006. Вып. 38. С. 133–142.

54. *Астапов Ю.М., Медведев В.С.* Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1982. 304 с.

55. *Wolfram S.* The Mathematica book. 5th ed. Champaign, Il: Wolfram Media, 2003. 1488 p.

56. *Бойков И.В.* Приближенные методы решений сингулярных интегральных уравнений. Пенза: Изд-во ПГУ. 2004. 316 с.

About a symbolic and numeric scheme for a calculation of the first moment functions for the state vectors of linear stochastic integro-differential systems

I. E. Poloskov
Perm State University, 614990, Perm, Bukirev st., 15
polosk@psu.ru; (342) 2396560

In this paper we consider an approximate scheme for an analysis of linear dynamic system described by stochastic integro-differential equations. The scheme is based on a local approximation of kernels of these equations allowing to transform the original equations to a system of linear stochastic differential equations on the basis of a state space expansion and, consequently, to construct a chain of closed ordinary differential equations to calculate the first moment functions of the system state vector.

Keywords: *stochastic analysis*; *linear dynamic system*; *distributed delay*; *modelling*; *state vector*; *transition process.*