ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2015 Математика. Информатика. Механика Вып. 1(28)

УДК 519.21:004.94

О применении схемы Гийюзика для расчета матрицы спектральных плотностей вектора состояния линейной стохастической системы с многими запаздываниями

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул.Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

Схема Гийюзика (S.Guillouzic), предложенная для вычисления стационарной плотности решения линейного стохастического дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами и запаздыванием, применяется для анализа установившихся колебаний в линейной стохастической системе, которая возмущается стационарными шумами, дифференцируемыми в среднем квадратическом. Целью исследования является построение матрицы спектральных плотностей вектора состояния рассматриваемой системы. Аналитические результаты в дальнейшем предполагается применить для расчета характеристик движения автомобилей различных типов, перемещающихся с постоянной скоростью по неровной дороге со случайным микропрофилем.

Ключевые слова: *стохастический анализ*; *линейная динамическая система*; *запаздывание*; *спектральная плотность*; *вектор состояния*; *стационарный шум*; *движение автомобиля*.

Введение

В последние годы особенно большое внимание конструкторов и технологов стало уделяться повышению комфортности езды водителей и пассажиров легковых и грузовых автомобилей по дорогам различных классов, что естественно привело к необходимости построения и изучения более сложных моделей движения транспортных средств (ТС), в том числе передвигающихся по неровной поверхности. Известно, что перемещение автомобилей различных классов по дорогам со сложным микропрофилем сопровождается непрерывными колебаниями их подрессоренных и неподрессоренных частей, которые оказывают вредное влияние на водителя, пассажиров и перевозимые грузы, ухудшают условия работы агрегатов и узлов, вынуждают уменьшать скорость движения [1].

На характеристики транспортных динамических систем оказывают влияние: 1) воздействия, получаемые ТС из-за неровностей дороги; 2) изменения в скорости движения; 3) временны́е лаги, которые существуют вследствие наличия расстояния между осями колес; 4) наличие демпфирования и жесткости в колесах [2].

Случайные возмущения от дороги вследствие переменности скорости движения моделируются нестационарными случайными

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 14-01-96019.

процессами с известными характеристиками. Но нередко в моделях переменность скорости не учитывается, например в методиках, предназначенных для вычисления спектральной плотности. При этом, как правило, неровности дороги моделируются случайными функциями с заданными характеристиками, получаемыми в результате прохождения (векторного) белого шума через линейный фильтр.

Наряду с учетом нерегулярности дорожного полотна уже давно признано необходимым принимать во внимание и запаздывание воздействия случайного микропрофиля на одну или несколько пар задних колес ТС относительно передних [3,4]. Чтобы преодолеть трудности учета эффекта запаздывания, используют несколько подходов. Самый простой – это анализ стационарных режимов в линейных системах.

Важным классом моделей, предназначенных для учета влияния последействия на динамику систем различных классов, являются детерминированные и стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) с запаздыванием [5–8].

Основными вероятностными характеристиками векторов состояния стохастических систем как с запаздываем, так и без запаздывания являются плотности вероятности распределения этих векторов, зависящие от пространственных и временных координат. К сожалению, для произвольных систем СДУ получение точных аналитических представлений таких плотностей в настоящее время невозможно. В ряде случаев можно ограничиться вычислением стационарных плотностей, если таковые существуют. Исследование системы еще более упрощается, если ее можно описать линейными обыкновенными СДУ с постоянными коэффициентами и аддитивными возмущениями [9]. Это связано с тем, что для последних стационарными плотностями будут одно- и многомерные нормальные гауссовы распределения, параметризуемые векторами математических ожиданий и матрицами ковариаций (дисперсий) соответствующего порядка.

Ряд простых задач для таких систем с одним постоянным запаздыванием был решен в работах У. Кюхлера, Т.Д. Франка и С. Гийюзика [10–17], причем С.Гийюзик предложил интересную схему расчета параметров одномерного стационарного гауссового распределения. В [18] схема Гийюзика была распространена на новые области применения, включающие кратные запаздывания, СДУ с запаздыванием нейтрального типа и высших порядков.

В данной работе схема С. Гийюзика применяется для анализа установившихся колебаний в линейной стохастической системе с запаздыванием, которая возмущается стационарными шумами, дифференцируемыми в среднем квадратическом. Целью исследования является построение матрицы спектральных плотностей вектора состояния рассматриваемой системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему СДУ с многими постоянными запаздываниями τ_s следующего вида:

$$\mathcal{A}\,\ddot{\boldsymbol{X}}(t)+\mathcal{B}\,\dot{\boldsymbol{X}}(t)+\mathcal{K}\,\boldsymbol{X}(t)= \\ =\sum_{\ell=0}^{k}\big[\mathcal{G}_\ell\,\dot{\boldsymbol{V}}(t-\tau_\ell)+\mathcal{H}_\ell\,\boldsymbol{V}(t-\tau_\ell)\big], \quad (1.1)$$

где t – время; $\tau_0=0$; $\tau_\ell>0$, $\ell=1,2,...,k$;

$$\boldsymbol{X}(t)=\{X_1(t),X_2(t),...,X_n(t)\}^T$$

– вектор состояния ($n\in\mathbb{N}$);

$$\boldsymbol{V}(t)=\{V_1(t),V_2(t),...,V_q(t)\}^T$$

– векторный случайный процесс (СП, $q\in\mathbb{N}$), возмущающий соответствующую систему и имеющий стационарные в широком смысле и стационарно связанные, дифференцируемые в среднем квадратическом компоненты, что отражается в соотношениях для вектора математических ожиданий и матриц ковариационных функций и спектральных плотностей следующим образом:

$$\boldsymbol{m}_V(t)=\{m_{V1}(t),m_{V2}(t),...,m_{Vq}(t)\}^T\equiv \\ \equiv\mathcal{E}[\boldsymbol{V}(t)]=\boldsymbol{m}_V^0\equiv\text{const},$$

$$\mathbb{C}_{VV}(t_1,t_2)=\{\mathcal{C}_{V_iV_j}(t_1,t_2)\}\equiv \\ \equiv\mathcal{E}\big[\boldsymbol{V}^\circ(t_1)\boldsymbol{V}^{\circ T}(t_2)\big]=\mathbb{C}_{VV}(t_2-t_1)= \\ =\mathbb{C}_{VV}(t),\quad t=t_2-t_1,$$

$$\boldsymbol{V}^\circ(t)=\boldsymbol{V}(t)-\boldsymbol{m}_V(t),$$

$$\mathbb{S}_{VV}(\omega) = \{\mathcal{S}_{V_iV_j}(\omega)\} \equiv \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega t}\,\mathbb{C}_{VV}(t)\,dt;$$

$\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$, $\mathcal{B} = \{b_{ij}\}$, $\mathcal{K} = \{k_{ij}\}$ и $\mathcal{G}_s = \{g_{sij}\}$, $\mathcal{H}_s = \{h_{sij}\}$ $(s = \overline{0,k}\,)$ – постоянные $n\times n$- и $n\times q$-матрицы соответственно, причем $\mathcal{K}$ обратима; T – символ транспонирования матрицы (вектора); $\mathcal{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания.

Задача исследования состоит в построении соотношений для вектора математических ожиданий

$$\boldsymbol{m}_X(t) = \{m_{X1}(t), m_{X2}(t), ..., m_{Xn}(t)\}^T,$$

матрицы ковариационных функций

$$\mathbb{C}_{XX}(t_1,t_2) = \{\mathcal{C}_{X_iX_j}(t_1,t_2)\}$$

и матрицы спектральных плотностей

$$\mathbb{S}_{XX}(\omega) = \{\mathcal{S}_{X_iX_j}(\omega)\} \equiv \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\boldsymbol{i}\omega t}\,\mathbb{C}_{XX}(t)\,dt$$

вектора состояния при условии, что все переходные процессы в системе затухли.

2. Методика решения задачи

Предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) таковы, что при $t\to+\infty$ после переходного режима в системе, описываемой этим уравнением, устанавливается стационарный режим, при котором вектор $\boldsymbol{X}(t)$, как и $\boldsymbol{V}(t)$, будет стационарным векторным случайным процессом (со стационарно связанными компонентами) с неизвестными постоянным вектором математических ожиданий $\boldsymbol{m}^*_X$ и матрицами ковариационных функций $\mathbb{C}^*_{XX}(t)$ и спектральных плотностей $\mathbb{S}^*_{XX}(\omega)$, а оба эти векторных процесса – стационарно связанными.

Вследствие утверждений корреляционного анализа [19] и сделанных предположений ясно, что для полного описания гауссовского стационарного векторного случайного процесса $\boldsymbol{X}(t)$ достаточно вычислить вектор $\boldsymbol{m}^*_X$ и матрицу $\mathbb{S}^*_{XX}(\omega)$, а все остальные необходимые характеристики этого векторного СП (матрицу ковариационных функций $\mathbb{C}^*_{XX}(t)$ и матрицу ковариаий $\mathbb{D}^*_X$) можно получить по известным формулам [19].

С учетом предположений первая часть задачи решается без труда на основании соотношения

$$\boldsymbol{m}^*_X = \mathcal{K}^{-1}\sum_{\ell=0}^{k}\mathcal{H}_\ell\,\boldsymbol{m}^0_V. \qquad (2.1)$$

Применим идею С.Гийюзика для выполнения общей части выкладок по решению второй части поставленной задачи. Для этого сначала получим векторно-матричное уравнение для центрированного процесса $\boldsymbol{X}^\circ(t) = \boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t)$, которое будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{A}\,\ddot{\boldsymbol{X}}^\circ(t) + \mathcal{B}\,\dot{\boldsymbol{X}}^\circ(t) + \mathcal{K}\,\boldsymbol{X}^\circ(t) = = \sum_{\ell=0}^{k}\bigl[\mathcal{G}_\ell\,\dot{\boldsymbol{V}}^\circ(t-\tau_\ell) + \mathcal{H}_\ell\,\boldsymbol{V}^\circ(t-\tau_\ell)\bigr]. \qquad (2.2)$$

Тогда, если обе части последнего уравнения для момента времени $t = t_1$ умножить слева на $\boldsymbol{X}^\circ(t_2)$, вектор $\boldsymbol{V}^\circ(t_1)$ – слева на транспонированное уравнение (2.2), записанное для $t = t_2$, а затем усреднить полученные соотношения, то в результате будем иметь следующие уравнения для матриц нестационарных ковариационных функций $\mathbb{C}_{XX}(t_1,t_2)$ и $\mathbb{C}_{VX}(t_1,t_2)$:

$$\mathcal{A}\,\frac{\partial^2\mathbb{C}_{XX}(t_1,t_2)}{\partial t_1^2} + \mathcal{B}\,\frac{\partial\mathbb{C}_{XX}(t_1,t_2)}{\partial t_1} + + \mathcal{K}\,\mathbb{C}_{XX}(t_1,t_2) = = \sum_{\ell=0}^{k}\Bigl[\mathcal{G}_\ell\,\frac{\partial\mathbb{C}_{VX}(t_1-\tau_\ell,t_2)}{\partial t_1} + + \mathcal{H}_\ell\,\mathbb{C}_{VX}(t_1-\tau_\ell,t_2)\Bigr], \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2\mathbb{C}_{VX}(t_1,t_2)}{\partial t_2^2}\,\mathcal{A}^T + \frac{\partial\mathbb{C}_{VX}(t_1,t_2)}{\partial t_2}\,\mathcal{B}^T + + \mathbb{C}_{VX}(t_1,t_2)\,\mathcal{K}^T = = \sum_{\ell=0}^{k}\Bigl[\frac{\partial\mathbb{C}_{VV}(t_1,t_2-\tau_\ell)}{\partial t_2}\,\mathcal{G}_\ell^T + + \mathbb{C}_{VV}(t_1,t_2-\tau_\ell)\,\mathcal{H}_\ell^T\Bigr]. \qquad (2.4)$$

В установившемся режиме с учетом соотношений

$$\frac{\partial}{\partial t_1}=-\frac{\partial}{\partial t},\quad \frac{\partial}{\partial t_2}=\frac{\partial}{\partial t},\quad \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t_2^2},$$

$$\mathbb{C}_{XX}(t_1,t_2)=\mathbb{C}_{XX}(t_2-t_1)=\mathbb{C}^*_{XX}(t),$$

$$\mathbb{C}_{XV}(t_1,t_2)=\mathbb{C}_{XV}(t_2-t_1)=\mathbb{C}^*_{XV}(t),$$

$$\mathbb{C}_{VX}(t_1,t_2)=\mathbb{C}_{VX}(t_2-t_1)= \\ =\mathbb{C}^*_{VX}(t)\equiv\mathbb{C}^{*T}_{XV}(t)$$

эти уравнения можно записать так:

$$\mathcal{A}\,\mathbb{C}''_{XX}(t)-\mathcal{B}\,\mathbb{C}'_{XX}(t)+\mathcal{K}\,\mathbb{C}_{XX}(t)= \\ =\sum_{\ell=0}^{k}\big[-\mathcal{G}_\ell\,\mathbb{C}'_{VX}(t+\tau_\ell)+ \\ +\mathcal{H}_\ell\,\mathbb{C}_{VX}(t+\tau_\ell)\big],\quad (2.5)$$

$$\mathbb{C}''_{VX}(t)\,\mathcal{A}^T+\mathbb{C}'_{VX}(t)\,\mathcal{B}^T+\mathbb{C}_{VX}(t)\,\mathcal{K}^T= \\ =\sum_{\ell=0}^{k}\big[\mathbb{C}'_{VV}(t-\tau_\ell)\,\mathcal{G}^T_\ell+ \\ +\mathbb{C}_{VV}(t-\tau_\ell)\,\mathcal{H}^T_\ell\big].\quad (2.6)$$

Если теперь левые и правые части векторно-матричных уравнений (2.5), (2.6) умножить на $e^{-\boldsymbol{i}\omega t}/(2\pi)$, а затем проинтегрировать по t от $-\infty$ до $+\infty$ и учесть равенства

$$\mathbb{S}^*_{XX}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\boldsymbol{i}\omega t}\,\mathbb{C}^*_{XX}(t)\,dt,$$

$$e^{\pm\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathbb{S}^*_{XX}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\boldsymbol{i}\omega t}\,\mathbb{C}^*_{XX}(t\pm\tau_\ell)\,dt,$$

$$(\boldsymbol{i}\,\omega)^r\,\mathbb{S}_{XX}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\boldsymbol{i}\omega t}\,\mathbb{C}^{(r)*}_{XX}(t)\,dt,$$

$$\mathbb{S}^*_{VX}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\boldsymbol{i}\omega t}\,\mathbb{C}^*_{VX}(t)\,dt,$$

$$e^{\pm\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathbb{S}^*_{VX}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\boldsymbol{i}\omega t}\,\mathbb{C}^*_{VX}(t\pm\tau_\ell)\,dt,$$

$$(\boldsymbol{i}\,\omega)^r\,\mathbb{S}^*_{VX}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\boldsymbol{i}\omega t}\,\mathbb{C}^{(r)*}_{VX}(t)\,dt,$$

$$r=1,2,$$

то получим следующую систему матричных уравнений для неизвестных матриц спектральных плотностей $\mathbb{S}^*_{XX}(\omega)$ и $\mathbb{S}^*_{VX}(\omega)$:

$$\big[(\boldsymbol{i}\,\omega)^2\,\mathcal{A}-\boldsymbol{i}\,\omega\,\mathcal{B}+\mathcal{K}\big]\,\mathbb{S}^*_{XX}(\omega)= \\ =\sum_{\ell=0}^{k}\big(-\boldsymbol{i}\,\omega\,e^{\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathcal{G}_\ell+ \\ +e^{\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathcal{H}_\ell\big)\,\mathbb{S}^*_{VX}(\omega),\quad (2.7)$$

$$\mathbb{S}^*_{VX}(\omega)\,\big[(\boldsymbol{i}\,\omega)^2\,\mathcal{A}^T+\boldsymbol{i}\,\omega\,\mathcal{B}^T+\mathcal{K}^T\big]= \\ =\mathbb{S}_{VV}(\omega)\,\sum_{\ell=0}^{k}\big(\boldsymbol{i}\,\omega\,e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathcal{G}^T_\ell+ \\ +e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathcal{H}^T_\ell\big).\quad (2.8)$$

Введем обозначения:

$$\mathbb{H}_1(\omega)=(\boldsymbol{i}\,\omega)^2\,\mathcal{A}-\boldsymbol{i}\,\omega\,\mathcal{B}+\mathcal{K},$$

$$\mathbb{H}_2(\omega)=\sum_{\ell=0}^{k}\big(-\boldsymbol{i}\,\omega\,e^{\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathcal{G}_\ell+e^{\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathcal{H}_\ell\big),$$

$$\mathbb{H}_3(\omega)=(\boldsymbol{i}\,\omega)^2\,\mathcal{A}^T+\boldsymbol{i}\,\omega\,\mathcal{B}^T+\mathcal{K}^T,$$

$$\mathbb{H}_4(\omega)=\sum_{\ell=0}^{k}\big(\boldsymbol{i}\,\omega\,e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathcal{G}^T_\ell+e^{-\boldsymbol{i}\omega\tau_\ell}\,\mathcal{H}^T_\ell\big),$$

$$\mathbb{H}_5(\omega)=\mathbb{H}_1^{-1}(\omega)\,\mathbb{H}_2(\omega),$$

$$\mathbb{H}_6(\omega)=\mathbb{H}_4(\omega)\,\mathbb{H}_3^{-1}(\omega)$$

(последние – в предположении, что матрицы $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_3$ обратимы). Тогда получим

$$\mathbb{S}^*_{XX}(\omega)=\mathbb{H}_5(\omega)\,\mathbb{S}_{VV}(\omega)\,\mathbb{H}_6(\omega),\qquad (2.9)$$

а отсюда по формулам

$$\mathbb{C}^*_{XX}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\boldsymbol{i}\omega t}\,\mathbb{S}^*_{XX}(\omega)\,d\omega,\qquad (2.10)$$

$$\mathbb{D}^*_X=\mathbb{C}^*_{XX}(0)\qquad (2.11)$$

определим искомые матрицы ковариационных функций и ковариаций.

Заключение

Соотношения (2.9)–(2.11), позволяющие построить матрицу спектральных плотностей вектора состояния линейной стохастической системы, которая возмущается стационарными шумами, дифференцируемыми в среднем квадратическом, представляют собой решение поставленной задачи. Полученные аналитические результаты в дальнейшем планируется применить для расчета характеристик движения автомобилей различных классов, перемещающихся с постоянной скоростью по неровной дороге со случайным микропрофилем.

Список литературы

1. *Яценко Н.Н., Прутчиков О.К.* Плавность хода грузового автомобиля. М.: Машиностроение, 1968. 220 с.
2. *Hac A., Youn I.* Optimal design of active and semi-active suspensions including time delays and preview // Journal of Vibrations and Acoustics. 1993. V.115. P.498–508.
3. *Павлюк Ю.С., Сакулин В.Д.* Аналитическая оценка случайных колебаний линейных систем в случае запаздывания колебаний // Динамика и прочность конструкций: Тематический сб. науч. трудов. Челябинск: ЧПИ, 1975. N 159. С.62–67.
4. *Светлицкий В.А.* Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1991. 320 с.
5. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
7. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
8. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
9. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособие. Ижевск: РХД, 2005. 296 с.
10. *Küchler U., Mensch B.* Langevin's stochastic differential equation extended by a time-delayed term // Stochastics Rep. 1992. Vol.40. P.23–42.
11. *Guillouzic S., L'Heureux I., Longtin A.* Small delay approximation of stochastic differential delay equations // Physical Review. 1999. Vol.E59, N 4. P.3970-3982.
12. *Guillouzic S., L'Heureux I., Longtin A.* Rate processes in a stochastically driven delayed overdamped // Physical Review. 2000. Vol.E61, N 5. P.4906-4914.
13. *Guillouzic S.* Fokker-Planck approach to stochastic delay differential equations. Thesis for the degree of Doctor of Philosophy. Ottawa: University of Ottawa, 2000. 200 p.
14. *Frank T.D., Beek P.J.* Stationary solutions of linear stochastic delay differential equations: Applications to biological systems // Physical Review. 2001. Vol. E64, N 2. P.1:021917. 12 p.
15. *Frank T.D.* Multivariate Markov processes for stochastic systems with delays: Application to the stochastic Gompertz model with delay // Physical Review. 2002. Vol.E66, N 1. P.1:011914. 8 p.
16. *Frank T.D.* Stationary distributions of stochastic processes described by a linear neutral delay differential equation // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2005. Vol.38, N 28. P.L485–L490.
17. *Frank T.D.* Delay Fokker-Planck equations, Novikov's theorem, and Boltzmann distributions as small delay approximations // Physical Review. 2005. Vol. E72, N 1. P.1:011112. 8 p.
18. *Полосков И.Е.* О расширении области применения схемы Гийюзика поиска стационарных распределений для линейных стохастических систем с запаздыванием // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2013. Вып.45. С.92–102.
19. *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы. 3-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2006. 448 с.

On an application of the Guillouzic's scheme for a calculation of the matrix of spectral densities for the state vector of a linear delay differential stochastic system

I. E. Poloskov
Perm State University, 614990, Perm, Bukirev st., 15
polosk@psu.ru; (342) 2396560

In the paper, the Guillouzic's scheme suggested for a calculation of the stationary probability density function of solution for a linear stochastic delay differential equation of the first degree with constant coefficients is applied for an analysis of steady-state oscillations in a linear stochastic system which is perturbed by stationary noise being differentiable in the mean square sense. The aim of the study is to construct the matrix of spectral densities for the state vector of the system. It is supposed that analytical results will be used for calculations of motion characteristics of different types of vehicles traveling at a constant speed on rough roads with random microprofiles.

Keywords: *stochastic analysis*; *linear dynamic system*; *delay*; *spectral density*; *state vector*; *stationary noise*; *motion of vehicle.*