ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2012 Математика. Информатика. Механика Вып. 1(9)

УДК 519.6

Линейные параметрические стохастические системы нейтрального типа с кратными запаздываниями

И. Е. Полосков
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 614990, Пермь, ул.Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

Рассматриваются проблемы, связанные с расчетом первых моментов фазового вектора линейной стохастической динамической системы нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями. Система возмущается аддитивными и мультипликативными случайными шумами. На основе комбинации схемы расширения фазового пространства и метода шагов строится цепочка стохастических дифференциальных уравнений без запаздывания, а затем и уравнения для искомых моментов. Приведены примеры анализа переходных режимов. Расчеты осуществлялись с помощью программы на входном языке пакета `Mathematica`.

Ключевые слова: *моделирование*; *стохастический анализ*; *линейная динамическая система*; *запаздывание*; *фазовый вектор*; *расширение*; *метод*; *фазовое пространство.*

Введение

Как известно, в последние годы значительный интерес вызывают проблемы, связанные с анализом явлений, которые описываются функционально-дифференциальными уравнениями (ФДУ) и их частными формами, такими как ДУ с запаздыванием, ДУ нейтрального типа, интегро-дифференциальные уравнения и др. [1–4]. Свидетельством этого служит постоянно увеличивающийся поток публикаций по данной тематике.

В настоящее время существует только несколько областей исследования ФДУ, где ведутся интенсивные научных разработки. Среди них качественный анализ существования и устойчивости решений ФДУ; прямое количественное исследование линейных систем, в первую очередь, на основе применения классического метода шагов; использование процедур усреднения ДУ с учетом малости запаздывания; различные численные интеграторы и другие методики для получения частных решений задач [4–6] и т.д.

В процессе развития методов анализа указанных систем, ставших уже классическими, возник интерес к стохастическим ФДУ разных типов [1, 4, 7–9]. Но исследование таких систем вызывает значительные трудности.

Наша схема анализа некоторых классов систем стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с запаздыванием [10–13] базируется на комбинации метода шагов и расширении фазового пространства (МШРФП) и позволяет строить процедуры исследования различных форм ФДУ с одной точки зрения. При этом в большинстве вариантов схемы ошибка метода отсутствует. Кроме того, исчезают многие проблемы, возникающие при реализации процедур прямого численного интегрирования ДУ с запаздыванием. В данной работе мы представляем детали этой схемы для анализа систем линейных неавтономных СДУ нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями, которые возмущаются аддитивными и мультипликативными случайными шумами. Применение этой схемы демонстрируется на примерах. Инструментом расчетов являлся пакет компьютерной алгебры (ПКА) `Mathematica` [14].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-96024).

1. Постановка задачи и метод исследования

Рассмотрим последовательность систем линейных параметрических СДУ Стратоновича [15] нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями следующего вида ($r = 0, 1, \ldots, \nu$, при $r = 0$ без запаздывания):

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{p}_r(t) + \sum_{\ell=1}^{r} P_{r,r-\ell}(t)\,\dot{\boldsymbol{X}}(t-\ell\,\tau) + \\ + \sum_{\ell=0}^{r} Q_{r,r-\ell}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\ell\,\tau) + \\ + \Big[U_r(t) + \sum_{\ell=0}^{r} V_{r,r-\ell}(t) : \boldsymbol{X}(t-\ell\,\tau)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}(t), \\ t > t_r = t_0 + r\cdot\tau; \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^*, \end{gathered} \tag{1}$$

где $t \geqslant t_0$ – время; $\tau = \text{const} > 0$; $\boldsymbol{X}(t) = \{X_i(t)\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, – фазовый вектор; $\boldsymbol{X}^* = \{X_i^*\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, – случайный вектор с известными характеристиками; $\dot{\boldsymbol{W}}(t) = \{\dot{W}_j(t)\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, – вектор независимых случайных функций типа белого шума с единичными интенсивностями:

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\big[\dot{\boldsymbol{W}}(t)\big] = 0, \\ \mathbf{M}\big[\dot{\boldsymbol{W}}(t_1)\,\dot{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}(t_2)\big] = E\cdot\delta(t_1 - t_2)\end{gathered} \tag{2}$$

($\boldsymbol{W}(t)$ – вектор независимых стандартных винеровских процессов); $\boldsymbol{p}_r(t) = \{p_{ri}(t)\}$, $P_{r\ell}(t) = \{p_{r\ell ij}(t)\}$, $Q_{r\ell}(t) = \{q_{r\ell ij}(t)\}$, $U_r(t) = \{u_{rik}(t)\}$, $V_{r\ell}(t) = \{v_{r\ell ijk}(t)\}$ – неслучайные векторы и матрицы; $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$; T и $\mathbf{M}$ – символы транспонирования и математического ожидания соответственно; E – единичная матрица;

$$S : \boldsymbol{Y} = \Big\{\sum_{j=1}^{n} S_{ijk}\,Y_j\Big\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Пусть в момент времени t_0 заданы значения элементов вектора математических ожиданий $\boldsymbol{m}^* = \mathbf{M}\big[\boldsymbol{X}^*\big]$ и матрицы дисперсий

$$\mathcal{D}^* = \mathbf{M}\big[\{\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{m}^*\}\{\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{m}^*\}^{\mathrm{T}}\big].$$

Задачей исследования является построение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для компонентов вектора средних $\boldsymbol{m}(t) = \mathbf{M}\big[\boldsymbol{X}(t)\big]$ и матрицы дисперсий $\mathcal{D}(t) = \mathbf{M}\big[\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\}\{\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}(t)\}^{\mathrm{T}}\big]$ фазового вектора $\boldsymbol{X}(t)$ при любом $t \geqslant t_0$.

Как и в ряде предыдущих наших работ, для того чтобы получить СДУ без запаздывания, применим метод расширения фазового пространства. Для этого введем следующие обозначения ($q = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\begin{gathered} s \in [0,\tau], \quad t_q = t_0 + q\cdot\tau, \quad s_q = s + t_q, \\ \boldsymbol{X}_q(s) = \boldsymbol{X}(s_q), \quad \boldsymbol{W}'_q(s) = \dot{\boldsymbol{W}}(s_q), \\ \Delta_q = (t_{q-1}, t_q], \quad \boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{X}_0, \quad \Xi_0 = \boldsymbol{W}_0, \\ \boldsymbol{Z}_1 = \mathrm{col}(\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1),\ \boldsymbol{Z}_2 = \mathrm{col}(\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2), \ldots, \\ \Xi_1 = \mathrm{col}(\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1), \Xi_2 = \mathrm{col}(\boldsymbol{W}_0, \boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_1), \ldots, \\ \boldsymbol{W}'_q(0) = \boldsymbol{W}'_{q-1}(\tau), \quad \boldsymbol{Y}_q \equiv \boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau), \\ \mathrm{col}(\boldsymbol{X}_0, \ldots, \boldsymbol{X}_{N-1}, \boldsymbol{X}_N) = \{X_{01}, X_{02}, \ldots, X_{0n}, \\ \ldots, X_{N1}, X_{N2}, \ldots, X_{Nn}\}^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{3}$$

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. На сегменте Δ_0 систему СДУ Стратоновича, решением которой является случайная векторная функция $\boldsymbol{Z}_0(s) = \boldsymbol{X}_0(s)$, можно записать в следующем виде (здесь и далее точкой обозначена производная по переменной s):

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{p}_0(s_0) + Q_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \\ + \Big[U_0(s_0) + V_{00}(s_0) : \boldsymbol{X}_0(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_0(s).\end{gathered}$$

1°. На сегментах Δ_0 и Δ_1 систему СДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_1(s) = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big)$ можно представить так:

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{p}_0(s_0) + Q_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \\ + \Big[U_0(s_0) + V_{00}(s_0) : \boldsymbol{X}_0(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_0(s), \\ \\ \dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{p}_1(s_1) + P_{10}(s_1)\,\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) + \\ + Q_{10}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + Q_{11}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \\ + \Big[U_1(s_1) + V_{10}(s_1) : \boldsymbol{X}_0(s) + \\ + V_{11}(s_1) : \boldsymbol{X}_1(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_1(s).\end{gathered}$$

... ...

$\boldsymbol{\nu}$°. Рассматривая сегменты Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν совместно, запишем систему СДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_\nu(s)$:

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{p}_0(s_0) + Q_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \\ + \Big[U_0(s_0) + V_{00}(s_0) : \boldsymbol{X}_0(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_0(s), \\ \dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{p}_1(s_1) + P_{10}(s_1)\,\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) + \\ + Q_{10}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + Q_{11}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \\ + \Big[U_1(s_1) + V_{10}(s_1) : \boldsymbol{X}_0(s) + \\ + V_{11}(s_1) : \boldsymbol{X}_1(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_1(s), \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \dot{\boldsymbol{X}}_\nu(s) = \boldsymbol{p}_\nu(s_\nu) + \sum_{\ell=1}^{\nu} P_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-\ell}(s) + \\ + \sum_{\ell=0}^{\nu} Q_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s) + \\ + \Big[U_\nu(s_\nu) + \sum_{\ell=0}^{\nu} V_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu) : \boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_\nu(s).\end{gathered}$$

$(\boldsymbol{\nu+1})^\circ$. На сегментах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν, $\Delta_{\nu+1}$ уравнения для компонентов случайной векторной функции $\boldsymbol{Z}_{\nu+1}(s)$ можно записать в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{p}_0(s_0) + Q_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \Big[U_0(s_0) + V_{00}(s_0) : \boldsymbol{X}_0(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_0(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{p}_1(s_1) + P_{10}(s_1)\,\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) + Q_{10}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + Q_{11}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \Big[U_1(s_1) + V_{10}(s_1) : \boldsymbol{X}_0(s) + V_{11}(s_1) : \boldsymbol{X}_1(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_1(s),$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_\nu(s) = \boldsymbol{p}_\nu(s_\nu) + \sum_{\ell=1}^{\nu} P_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-\ell}(s) + \sum_{\ell=0}^{\nu} Q_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s) + \Big[U_\nu(s_\nu) + \sum_{\ell=0}^{\nu} V_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu) : \boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_\nu(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu+1}(s) = \boldsymbol{p}_\nu(s_{\nu+1}) + \sum_{\ell=1}^{\nu} P_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1})\,\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-\ell+1}(s) + \sum_{\ell=0}^{\nu} Q_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1})\,\boldsymbol{X}_{\nu-\ell+1}(s) + \Big[U_\nu(s_{\nu+1}) + \sum_{\ell=0}^{\nu} V_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1}) : \boldsymbol{X}_{\nu-\ell+1}(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_{\nu+1}(s).$$

... ...

$\mathbf{N}^\circ$. Наконец, на сегментах Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν, $\Delta_{\nu+1}$, ..., Δ_N систему СДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_N(s)$ можно представить так:

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{p}_0(s_0) + Q_{00}(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \Big[U_0(s_0) + V_{00}(s_0) : \boldsymbol{X}_0(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_0(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{p}_1(s_1) + P_{10}(s_1)\,\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) + Q_{10}(s_1)\,\boldsymbol{X}_0(s) + Q_{11}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(s) + \Big[U_1(s_1) + V_{10}(s_1) : \boldsymbol{X}_0(s) + V_{11}(s_1) : \boldsymbol{X}_1(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_1(s),$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_\nu(s) = \boldsymbol{p}_\nu(s_\nu) + \sum_{\ell=1}^{\nu} P_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-\ell}(s) + \sum_{\ell=0}^{\nu} Q_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s) + \Big[U_\nu(s_\nu) + \sum_{\ell=0}^{\nu} V_{\nu,\nu-\ell}(s_\nu) : \boldsymbol{X}_{\nu-\ell}(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_\nu(s),$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu+1}(s) = \boldsymbol{p}_\nu(s_{\nu+1}) + \sum_{\ell=1}^{\nu} P_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1})\,\dot{\boldsymbol{X}}_{\nu-\ell+1}(s) + \sum_{\ell=0}^{\nu} Q_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1})\,\boldsymbol{X}_{\nu-\ell+1}(s) + \Big[U_\nu(s_{\nu+1}) + \sum_{\ell=0}^{\nu} V_{\nu,\nu-\ell}(s_{\nu+1}) : \boldsymbol{X}_{\nu-\ell+1}(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_{\nu+1}(s).$$

... ...

$$\dot{\boldsymbol{X}}_N(s) = \boldsymbol{p}_\nu(s_N) + \sum_{\ell=1}^{\nu} P_{\nu,\nu-\ell}(s_N)\,\dot{\boldsymbol{X}}_{N-\ell}(s) + \sum_{\ell=0}^{\nu} Q_{\nu,\nu-\ell}(s_N)\,\boldsymbol{X}_{N-\ell}(s) + \Big[U_\nu(s_N) + \sum_{\ell=0}^{\nu} V_{\nu,\nu-\ell}(s_N) : \boldsymbol{X}_{N-\ell}(s)\Big]\circ\dot{\boldsymbol{W}}_N(s).$$

... ...

2. Вывод уравнений для моментов

Теперь построенную выше на основе применяемой схемы цепочку параметрических линейных СДУ без запаздывания можно использовать для получения новой последовательности уравнений – последовательности ОДУ для первых моментов векторов $\boldsymbol{Z}_0$, $\boldsymbol{Z}_1$, ..., $\boldsymbol{Z}_N$, ... и $\boldsymbol{Z}_0^+ = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Z}_0\big)$, $\boldsymbol{Z}_1^+ = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Z}_1\big)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N^+ = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Z}_N\big)$, причем

$$\boldsymbol{m}_k(s) = \mathbf{M}\big[\boldsymbol{Z}_k\big] \equiv \mathrm{col}(\boldsymbol{m}_{X_0}, \boldsymbol{m}_{X_1}, ..., \boldsymbol{m}_{X_k}),$$

$$\boldsymbol{m}_k^+(s) = \mathbf{M}\big[\boldsymbol{Z}_k^+\big] = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{m}^*, \boldsymbol{m}_k(s)\big),$$

$$\mathcal{D}_k(s) = \mathbf{M}\big[\big(\boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{m}_k\big)\big(\boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{m}_k\big)^{\mathrm{T}}\big] = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{X_0X_0} & \mathcal{D}_{X_0X_1} & \dots & \mathcal{D}_{X_0X_k} \\ \mathcal{D}_{X_1X_0} & \mathcal{D}_{X_1X_1} & \dots & \mathcal{D}_{X_1X_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{X_kX_0} & \mathcal{D}_{X_kX_1} & \dots & \mathcal{D}_{X_kX_k} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_k^+(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_k^{+(11)}(s) & \dots & \mathcal{D}_k^{+(12)}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_k^{+(21)}(s) & \dots & \mathcal{D}_k^{+(22)}(s) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_k^{+(11)}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{Y_0X_0} & \mathcal{D}_{Y_0X_0} & \mathcal{D}_{Y_0X_1} \\ \mathcal{D}_{Y_0X_0} & \mathcal{D}_{X_0X_0} & \mathcal{D}_{X_0X_1} \\ \mathcal{D}_{Y_0X_1} & \mathcal{D}_{X_1X_0} & \mathcal{D}_{X_1X_1} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_k^{+(12)}(s) = \big[\ \mathcal{D}_{Y_0X_k}, \mathcal{D}_{X_0X_k}, \mathcal{D}_{X_1X_k}\ \big]^T,$$

$$\mathcal{D}_k^{+(21)}(s) = \big[\ \mathcal{D}_{Y_0X_k} \quad \mathcal{D}_{X_kX_0} \quad \mathcal{D}_{X_kX_1}\ \big],$$

$$\mathcal{D}_k^{+(22)}(s) = \big[\ \mathcal{D}_{X_kX_k}\ \big],$$

$$k = 0, 1, 2, ..., N, ...$$

В связи с тем что вектор $\boldsymbol{m}_k(s)$ и матрица $\mathcal{D}_k(s)$ являются блоками вектора $\boldsymbol{m}_k^+(s)$ и матрицы $\mathcal{D}_k^+(s)$ соответственно, достаточно вычислить только последние, а затем выбрать их необходимые элементы.

Несложно увидеть, что на каждом этапе r ($r = 0, 1, ..., N, ...$) структура систем СДУ принимает следующую форму:

$$\dot{\boldsymbol{Z}}_r(s) = \boldsymbol{f}_r(\boldsymbol{Z}_r(s), s) + G_r(\boldsymbol{Z}_r(s), s) \circ \Xi_r(s), \quad (4)$$

где

$$\boldsymbol{f}_r = \{f_{ri}\}, \quad G_r = \{g_{rik}\},$$

$$f_{ri} = f_{r0i}(s) + \sum_{j=1}^{n(r+1)} f_{rij}(s) \cdot Z_{rj}(s),$$

$$g_{rik} = g_{r0ik}(s) + \sum_{j=1}^{n(r+1)} g_{rijk}(s) \cdot Z_{rj}(s),$$

$$i = 1, 2, ..., n(r+1), \quad k = 1, 2, ..., m(r+1).$$

Используя компоненты векторов $\boldsymbol{f}_r$ и матриц G_r и заменяя в них элементы случайного вектора $\boldsymbol{Z}_r$ их возможными значениями, по формулам Стратоновича [15] мы можем вычислить коэффициенты сноса и диффузии

$$a_{ri} = f_{ri} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n(r+1)} \sum_{k=1}^{m(r+1)} \frac{\partial g_{rik}}{\partial z_{rj}} g_{rjk}, \quad (5)$$

$$b_{rij} = \sum_{k=1}^{m(r+1)} g_{rik}\, g_{rjk}, \quad (6)$$

$$i, j = 1, 2, ..., n(r+1)$$

уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова для плотности вероятности вектора $\boldsymbol{Z}_r(s)$. В свою очередь, на основе этого уравнения может быть построена замкнутая система ОДУ для элементов векторов $\boldsymbol{m}_r(s)$ и матриц $\mathcal{D}_r(s)$ в следующем виде:

$$\dot{m}_{ri}(s) = \mathbf{M}\big[a_{ri}\big], \quad (7)$$

$$\dot{D}_{rij}(s) = \mathbf{M}\big[(z_{ri} - m_{ri}) \cdot a_{rj} + \\ + (z_{rj} - m_{rj}) \cdot a_{ri} + b_{rij}\big]. \quad (8)$$

К этим уравнениям необходимо добавить начальные условия, форма которых будет такова:

$$m_{ri}(0) = \begin{cases} m_i^*, & r = 0, \\ m_{r-1,i}(\tau), & r > 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\mathcal{D}_r^+(0) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{D}^* & \mathcal{D}^* \\ \mathcal{D}^* & \mathcal{D}^* \end{bmatrix}, & r = 0, \\ \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{r-1}^+(0) & \mathcal{D}_r^{(12)} \\ \mathcal{D}_r^{(21)} & \mathcal{D}_r^{(22)} \end{bmatrix}, & r > 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathcal{D}_r^{(12)} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{Y_0 X_{r-1}}(\tau) \\ \mathcal{D}_{Y_0 X_{r-1}}(\tau) \\ \mathcal{D}_{X_0 X_{r-1}}(\tau) \\ \ldots \\ \mathcal{D}_{X_{r-2} X_{r-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_r^{(21)} = \big[\mathcal{D}_{X_{r-1} Y_0}(\tau)\ \mathcal{D}_{X_{r-1} Y_0}(\tau) \\ \mathcal{D}_{X_{r-1} X_0}(\tau)\ \ldots\ \mathcal{D}_{X_{r-1} X_{r-2}}(\tau)\big],$$

$$\mathcal{D}_r^{(22)} = \mathcal{D}_{X_{r-1} X_{r-1}}(\tau).$$

3. Примеры

Для демонстрации изложенной методики был осуществлен анализ поведения нескольких стохастических систем различной размерности. Некоторая часть полученных результатов приводится ниже. Все численно-аналитические расчеты были проведены с помощью программ на входном языке пакета `Mathematica` [14].

В качестве первой исследуемой модели была выбрана система

$$\dot{X}(t) = q_{00}\, X(t) + [u_0 + v_{00}\, X(t)]\, \dot{W}(t),$$

$$t \in (0, \tau], \qquad m(0) = m^*, \qquad D(0) = D^*;$$

$$\dot{X}(t) = p_{10}\, \dot{X}(t-\tau) + q_{10}\, X(t-\tau) + q_{11}\, X(t) + \\ + [u_1 + v_{10}\, X(t-\tau) + v_{11}\, X(t)]\, \dot{W}(t),$$

$$t \in (\tau, 2\tau];$$

$$\dot{X}(t) = p_{20}\, \dot{X}(t-2\tau) + p_{21}\, \dot{X}(t-\tau) + \\ + q_{20}\, X(t-2\tau) + q_{21}\, X(t-\tau) + q_{22}\, X(t) + \\ + [u_2 + v_{20}\, X(t-2\tau) + v_{21}\, X(t-\tau) + \\ + v_{22}\, X(t)]\, \dot{W}(t),$$

$$t > 2\tau,$$

где p_{ij}, q_{ij}, u_i, v_{ij} – постоянные. На рис.1 и 2 изображено поведение математического ожидания и дисперсии $X(t)$ при следующих значениях параметров:

$$u_0 = 0{,}125, \quad v_{00} = 0{,}1,$$

$$p_{10} = 0{,}25, \quad q_{10} = 0{,}25, \quad q_{11} = 1,$$

$$u_1 = 0{,}1, \quad v_{11} = 0{,}1,$$

$$p_{20} = 0{,}25, \quad p_{21} = -0{,}125, \quad q_{20} = 0{,}25,$$

$$q_{21} = -0{,}25, \quad q_{22} = -1, \quad u_2 = -0{,}125,$$

$$v_{20} = 0{,}1, \quad v_{21} = 0{,}05, \quad v_{22} = 0{,}05,$$

$$q_{00}:\ a)\ -1,\ b)\ -2,$$

$$v_{10}:\ a)\ 0{,}25,\ b)\ -0{,}125,$$

$$\tau = 0.5, \quad t_0 = 0, \quad m^0 = 2, \quad D^0 = 0{,}25.$$

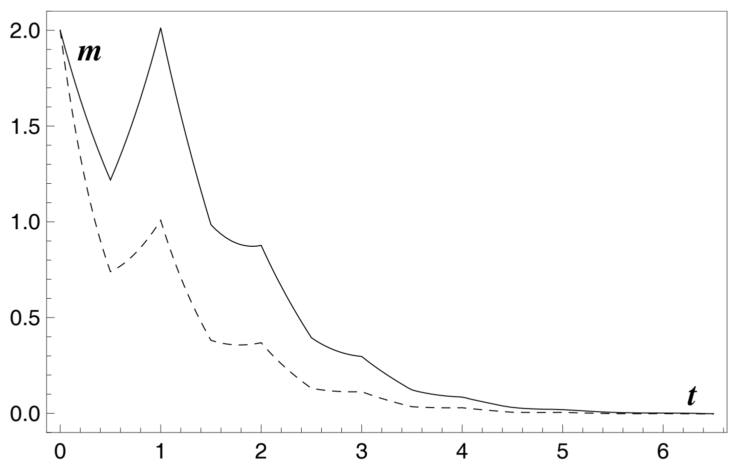

Рис.1

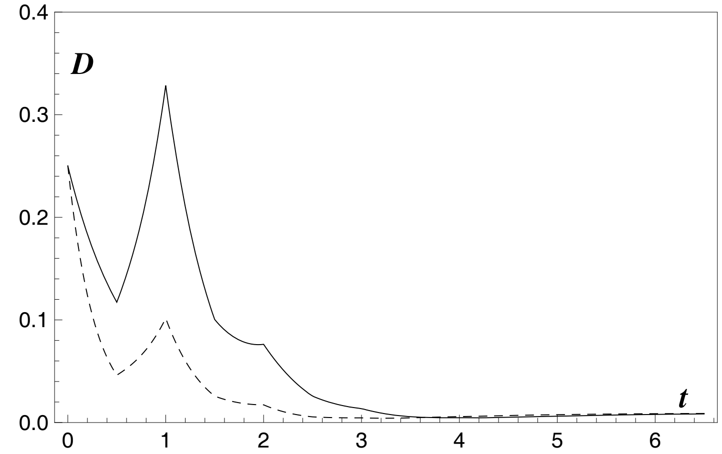

Рис.2

На этих рисунках случаю a) соответствуют непрерывные линии, а b) – штриховые.

Заключение

Методика, описанная в данной работе, может быть эффективно реализована на основе любого современного ПКА, такого как `Maple` или `Matlab` [6, 16], и использована для изучения многих типов систем с последействием как на основе полученных ОДУ для первых моментов, так и с помощью метода статистического моделирования (Монте-Карло) [17] в случае нелинейных систем. В отличие от известных других методов изложенная методика не предполагает предварительного изменения уравнений исследуемого объекта с целью исключения запаздывания. Более того, данная схема позволяет вычислять моментные функции и более высоких порядков.

Список литературы

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

4. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

5. *Bellen A., Zennaro M.* Numerical Methods For Delay Differential Equations. Oxford: University Press, 2003. 416 p.

6. *Shampine L.F., Gladwell I., Thompson S.* Solving ODEs with Malab. Cambridge: University Press, 2003. 272 p.

7. *Рубаник В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. Минск: Изд-во "Университетское", 1985. 143 с.

8. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.

9. *Kushner H.J.* Numerical methods for controlled stochastic delay systemы. Boston: Birkhauser, 2008. XIX, 281 p.

10. *Полосков И.Е.* Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С.58–73.

11. *Полосков И.Е.* Компьютерное моделирование динамики загрязнения бассейна реки с учетом запаздывания и случайных факторов // Вычислительные технологии. 2005. Т.10, № 1. С.103–115.

12. *Poloskov I.E.* Symbolic-numeric algorithms for analysis of stochastic systems with different forms of aftereffect // Proc. in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM). 2007. Vol.7, Is.1. P.2080011–2080012.

13. *Malanin V.V., Poloskov I.E.* About some schemes of study for systems with different forms of time aftereffect // Proc. of the IUTAM Symp. on Nonlinear Stochastic Dynamics and Control (Hangzhou, China) / eds. W.Q.Zhu, Y.K.Lin, G.C.Cai: IUTAM Bookseries, Vol. 29. Dordrecht: Springer, 2011. P.55–64.

14. *Wolfram S.* The Mathematica Book: 5th ed. Champaign, Il: Wolfram Media, 2003. 1488 p.

15. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособие. Ижевск: РХД, 2005. 296 с.

16. *Abell M.L., Braselton J.P.* Maple by Example. 3d ed. Amsterdam e.a.: Elsevier Inc., 2005. 563 p.

17. *Лоу А., Кельтон В.* Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. СПб.: Питер; Киев: Изд. группа BHV, 2004. 847 с.

Linear parametric stochastic neutral differential systems with multiple delays

I. E. Poloskov
Perm State National Research University, 614990, Perm, Bukirev st.,15
polosk@psu.ru

Problems of computation of the first moment functions for the phase vector of linear stochastic neutral delay differential system are considered in the paper. The system is excited by additive and multiplicative random noises. A combination of the phase space extension technique and the method of steps is used to derive a chain of stochastic differential equations without delay and equations for required moment functions too. Some examples of analysis of transition processes are demonstrated. Calculations were produced by a computer algebra package `Mathematica`-code program.

Keywords: *modeling*; *stochastic analysis*; *linear dynamic system*; *delay*; *phase vector*; *extension*; *method*; *phase space.*